รายงานการวิจัย

เรื่อง

การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาสำหรับสองกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ)

Modified Ishikawa Iteration Process for Two Nonexpansive Semigroups in CAT(κ) Spaces

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

บรรชา นันจรัส

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

2562

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

(งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ปีงบประมาณ 2560)

รายงานการวิจัย

เรื่อง

การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาสำหรับสองกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ)

Modified Ishikawa Iteration Process for Two Nonexpansive Semigroups in CAT(κ) Spaces

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

บรรชา นันจรัส

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

2562

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

(งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ปีงบประมาณ 25560)

หัวข้อวิจัย การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาสำหรับสองกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ)

ผู้ดำเนินการวิจัย นายบรรชา นันจรัส

ที่ปรึกษา ไม่มี

หน่วยงาน สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

ปี พ.ศ. 2562

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้เราได้ผลลัพธ์การลู่เข้าแบบเข้มสำหรับการปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาสำหรับสองกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) เมื่อ $\kappa > 0$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

Research Title Modified Ishikawa Iteration Process for Two Nonexpansive Semigroups in CAT(κ) Spaces

Researcher Mr. Bancha Nanjaras

Research Consultants -

Organization Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology Rajabhat Maha Sarakham University

Year 2019

ABSTRACT

In this paper, we obtain strong convergence theorems of modified Ishikawa iteration process for two nonexpansive semigroups in CAT(κ) spaces with $\kappa > 0$.

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยเล่มนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก อ. อัฐชัย ชฎา และ อ.ดร. วีรพงษ์ วงศ์พินิจ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ซึ่งท่านได้ให้คำแนะนำและให้ข้อคิดเห็นต่าง ๆ และงานวิจัยเล่มนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ซึ่งให้การสนับสนุนค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ในการดำเนินงานวิจัยเล่มนี้จนทำให้งานวิจัยเล่มนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีและขอกราบขอบพระคุณอาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคามทุกท่านที่มีส่วนช่วยเหลือให้คำปรึกษาและเป็นกำลังใจในการทำงานวิจัยเรื่องนี้

สุดท้ายนี้ขอกราบพระคุณ บิดา มารดา ครูและอาจารย์ทุกท่านที่คอยให้การสนับสนุนด้วยดีเสมอมาจนทำให้งานวิจัยเล่มนี้สำเร็จไปด้วยดี

บรรชา นันจรัส

2562

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย......ก

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ......ข

กิตติกรรมประกาศ......ค

สารบัญ......ง

บทที่ 1 บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญ......1

วัตถุประสงค์ของการวิจัย......3

ขอบเขตการวิจัย......3

สมมติฐานการวิจัย......3

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ......3

บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎี เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การส่ง......5

ปริภูมิ CAT(κ)......5

บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย

การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวา......9

ทฤษฎีบทลู่เข้า......9

บทที่ 4 ผลการวิจัย

ผลการวิจัย......14

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย......15

อภิปรายผล......15

ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้......15

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป......15

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

หน้า

บรรณานุกรม

บรรณานุกรมภาษาต่างประเทศ..19

ประวัติผู้วิจัย

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญ

ทฤษฎีบทจุดตรึง (fixed point Theory) ถือว่าเป็นวิชาที่มีประโยชน์อย่างมากไม่เฉพาะแค่คณิตศาสตร์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ แต่มีประโยชน์ไปยังสาขาอื่น ๆ มากมายทั้ง ฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์และเศรษฐศาสตร์เป็นต้น กล่าวคือปัญหาเกือบทั้งหมดในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์สามารถสร้างแบบจำลองและแปลงให้อยู่ในรูปสมการ อสมการ หรือระบบสมการ และอสมการได้ ซึ่งส่วนใหญ่ปัญหาที่ซับซ้อนก็มักจัดได้ในรูปสมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation) ในการแก้ปัญหาดังกล่าวนี้นักคณิตศาสตร์สามารถแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปของสมการหรืออสมการของตัวดำเนินการหรือการส่ง และปรากฏว่าจุดตรึงของตัวดำเนินการที่สร้างขึ้นก็คือคำตอบของสมการ หรืออสมการที่กำลังสนใจนั่นเอง ในการศึกษาทฤษฎีบทจุดตรึงจะมีอยู่ 2 ประเด็นหลัก ได้แก่ การมีอยู่จริงของจุดตรึง และการประมาณค่าหาจุดตรึงโดยใช้กระบวนการทำซ้ำในแบบต่าง ๆ ดังนั้นนักคณิตศาสตร์จึงพยายามพัฒนากระบวนการทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาจุดตรึงสำหรับการส่งในแบบต่าง ๆ และปริภูมิต่าง ๆ ซึ่งจะนำไปสู่คำตอบหรือผลเฉลยของสมการ หรืออสมการที่ต้องการ ต่อไปเป็นตัวอย่างกระบวนการทำซ้ำบางส่วนเพื่อใช้ประมาณค่าหาจุดตรึง

เริ่มจากในปี ค.ศ. 1953 Mann ได้สร้างได้กระบวนการทำซ้ำซึ่งปัจจุบันเป็นที่รู้จักกันทั่วไปคือ Mann iteration ซึ่งนิยามดังนี้ ให้ H ปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $\varnothing \neq C \subset H$ ซึ่งเป็นเซตนูนปิด และ $T: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย ให้ $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน H โดย

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n \end{cases}$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 1967 Halpern [2] ได้สร้างกระบวนการทำซ้ำที่คล้ายกับ Mann ซึ่งปัจจุบันเป็นที่รู้จักกันทั่วไปคือ Halpern iteration ซึ่งนิยามดังนี้ ให้ H ปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $\varnothing \neq C \subset H$ ซึ่งเป็นเซตนูนปิด และ $T: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย ให้ $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน H โดย

$$\begin{cases} u \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n) T x_n \end{cases}$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 1974 Ishikawa ได้สร้างกระบวนการทำซ้ำแบบใหม่ที่เป็นรูปทั่วไปมากกว่า Mann ซึ่งรู้จักกันในชื่อ Ishikawa iteration ซึ่งนิยามดังนี้ ให้ H ปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $\varnothing \neq C \subset H$ ซึ่งเป็นเซตนูนปิด และ $T: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย ให้ $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วง $[0,1]$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน H โดย

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Ty_n \end{cases}$$

ให้ $s \geq 0$ และ C ไม่ใช่เซตว่าง เป็นเซตปิด เซตนูน และเป็นเซตย่อยของปริภูมิเมตริก X จะเรียกการส่ง $T(s): C \to C$ ว่าเป็นการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย ถ้าสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $T(0)x = x$ สำหรับทุก $x \in C$
2. $T(s+t)x = T(s)T(t)$ สำหรับทุก $s,t \geq 0$
3. $\rho(T(s)x, T(s)y) \leq \rho(x,y)$ สำหรับทุก $x, y \in C$ และ $s \geq 0$
4. สำหรับแต่ละ $x \in C$ ฟังก์ชันจาก $[0,\infty)$ ไปยัง C ที่กำหนดโดย $s \mapsto T(s)x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จะเขียน $\Im = \{T(s): 0 \leq s \leq \infty\}$ แทน เซตของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายบน C และจะเขียน $F(T(s))$ แทน เซตของจุดตรึงของ $T(s)$ และเขียน $F(\Im)$ แทนเซตของจุดตรึงร่วมของ $\Im$ นั่นคือ $F(\Im) = \bigcap_{0 \leq s < \infty} F(T(s))$

ในปี 2003 Suzuki ได้สร้างกระบวนการทำซ้ำแบบใหม่เพื่อประมาณค่าหาจุดตรึงสำหรับการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายนิยามดังนี้ ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ C เป็นเซตปิด นูน ที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตย่อยของ X และ $T(t_n): C \to C$ เป็นการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วง $(0,1)$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน C โดย

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = (1-a_n)x_n \oplus a_n x_n T(t_n)x_n \end{cases}$$

ต่อมาในปี 2003 Eslamian และ Dhompongsa ได้ปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวา $\{x_n\}$ แบบใหม่สำหรับสองการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย $T(t_n)$, $S(t_n)$ บนเซต C เมื่อ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิ CAT(0) ที่เป็นเซตปิด นูน กล่าวคือ

$$\begin{cases} y_n = (1-a_n)x_n \oplus a_n T(t_n)x_n, \\ x_{n+1} = (1-b_n)x_n \oplus b_n S(t_n)x_n \end{cases}$$

สำหรับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วง $(0,1)$ และ $\{t_n\} \subset [0,\infty)$

เนื่องจากทุกปริภูมิ CAT(0) เป็นปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$ นั่นคือปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$ จะวางนัยทั่วไปหรือครอบคลุมปริภูมิ CAT(0)

ดังนั้นในการศึกษาและทำวิจัยนี้จะขยายผลลัพธ์ของ Eslamian และ Dhompongsa จากเดิมที่ศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาในปริภูมิ CAT(0) เราจะนำมาศึกษาและขยายผลในปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

วัตถุประสงค์ของการวิจัยครั้งนี้จะศึกษาและขยายขอบเขตองค์ความรู้เดิมให้กว้างขวางยิ่งขึ้นกว่าเดิม ตามรายละเอียดดังนี้

1. เพื่อหาเงื่อนไขที่เพียงพอบนปริภูมิ CAT(κ) และสมบัติของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$ ที่ทำให้การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วมของสองการส่งกึ่งกรุปมแบบไม่ขยาย

2. เพื่อพิสูจน์การลู่เข้าของการปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาสำหรับการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$

ขอบเขตการวิจัย

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นศึกษาเงื่อนไขที่เพียงพอบนปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$ และสมบัติของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย ที่ทำให้การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วมสำหรับการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$

สมมติฐานการวิจัย

มีเงื่อนไขที่เพียงพอบนปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$ และสมบัติของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายที่ทำให้การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วมสำหรับสองการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

การศึกษาองค์ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีจุดตรึง ถือว่าเป็นการศึกษาที่มีประโยชน์อย่างมากในทางคณิตศาสตร์และกำลังเป็นที่สนใจของนักคณิตศาสตร์ทั่วโลก มีผลงานวิจัยทางด้านนี้ตีพิมพ์มากมายในปัจจุบัน ไม่เพียงแค่คณิตศาสตร์และคณิตศาสตร์ประยุกต์เท่านั้น แต่ยังมีประโยชน์ไปยังสาขาอื่น ๆ ทั้ง วิศวกรรมศาสตร์ ฟิสิกส์ คอมพิวเตอร์ และเคมี เป็นต้นเราสามารถสรุปประโยชน์จากงานวิจัยนี้ได้ ดังนี้

1. ได้องค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์คือได้แนวคิดของปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$ รวมทั้งนิยาม และทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2. ได้เงื่อนไขที่เพียงพอที่ทำให้การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วมสำหรับสองการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

บทที่ 2
แนวคิด ทฤษฎี เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยาม และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องในการทำวิจัยครั้งนี้ โดยแบ่งเป็น 2 หัวข้อ ได้แก่ การส่ง และปริภูมิ CAT(κ)

2.1 การส่ง (mapping)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ X เป็นปริภูมิเมตริก จะเรียก $T:C\to C$ ว่า เป็น**การส่งแบบไม่ขยาย** (nonexpansive mapping) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\rho(Tx,Ty)\le \rho(x,y)$$

สำหรับทุก $x,y\in C$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ C ไม่เป็นเซตว่าง เป็นเซตปิด เซตนูน และเป็นเซตย่อยของ X จะเรียกการส่ง $T(s):C\to C$ ว่าเป็น**การส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย** (nonexpansive semigroup mapping) ถ้าสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $T(0)x=x$ สำหรับทุก $x\in C$
2. $T(s+t)x=T(s)T(t)$ สำหรับทุก $s,t\ge 0$
3. $\rho(T(s)x,T(s)y)\le \rho(x,y)$ สำหรับทุก $x,y\in C$ และ $s\ge 0$
4. สำหรับแต่ละ $x\in C$ ฟังก์ชันจาก $[0,\infty)$ ไปยัง C ที่กำหนดโดย $s\mapsto T(s)x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

เพื่อความสะดวกต่อไปจะเขียน $\Im=\{T(s):0\le s\le\infty\}$ แทน เซตของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายบน C และเขียน $F(T(s))$ แทน เซตของจุดตรึงของ $T(s)$ และเขียน $F(\Im)$ แทนเซตของจุดตรึงร่วมของ $\Im$ นั่นคือ $F(\Im)=\bigcap_{0\le s<\infty} F(T(s))$

2.2 ปริภูมิ CAT(κ) (CAT(κ) spaces)

บทนิยาม 2.2.3 ให้ (X,ρ) เป็นปริภูมิเมตริก ให้ $x,y\in X$ และ $c:[0,l]\to X$ โดยที่ $c(0)=x$, $c(y)=l$ และ $\rho\left(c(t),c(t')\right)=|t-t'|$ สำหรับทุก $t,t'\in[0,l]$

1. จะเรียกภาพ (image) ของ c ว่าเป็น**เส้นโค้งเชื่อม** (geodesic segment) จาก x ไปยัง y และถ้าหากว่ามีเส้นโค้งเชื่อมจาก x ไปยัง y เพียงเส้นเดียวแล้ว จะแทนเส้นโค้งเชื่อมนี้ด้วยสัญลักษณ์ $[x, y]$

2. จะเรียก X ว่าเป็น**ปริภูมิเส้นโค้ง** (geodesic space) ถ้ามีเส้นโค้งเชื่อมสำหรับทุก ๆ $x, y \in X$

บทนิยาม 2.2.4 ให้ (X,ρ) เป็นปริภูมิเมตริก และ D เป็นจำนวนจำนวนจริงบวก จะเรียก X ว่าเป็น**ปริภูมิเส้นโค้ง** D ($D-$geodesic space) ถ้า $\rho(x,y)<D$ และมีเส้นโค้งเชื่อมสำหรับทุก ๆ $x, y \in X$

บทนิยาม 2.2.5 ให้ (X,ρ) เป็นปริภูมิเมตริก ให้ Y เป็นเซตย่อยของ X จะเรียก Y ว่าเป็น**เซตนูน** (convex) ถ้า $[x, y] \subseteq Y$ สำหรับทุก $x, y \in Y$

บทนิยาม 2.2.6 ให้ $\kappa \in R$ จะเขียน M_κ^n แทนเมตริกต่อไปนี้

1. ถ้า $\kappa = 0$ แล้ว M_0^n เป็นปริภูมิยูคลิเดียน (Euclidean space) E^n
2. ถ้า $\kappa > 0$ แล้ว M_κ^n เป็นปริภูมิทรงกลม (spherical space) S^n โดยที่ฟังก์ชันระยะทางคูณด้วย $1/\sqrt{\kappa}$
3. ถ้า $\kappa < 0$ แล้ว M_κ^n เป็นปริภูมิไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic space) โดยที่ฟังก์ชันระยะทางคูณด้วย $1/\sqrt{-\kappa}$

บทนิยาม 2.2.7 โค้งสามเหลี่ยม (geodesic triangle) $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ ในปริภูมิเส้นโค้ง (X,d) คือสามเหลี่ยมที่มีจุด $x_1, x_2, x_3 \in X$ ซึ่งเป็นจุดยอดมุม และเส้นโค้งเชื่อมระหว่างแต่ละคู่ของจุดยอดมุม **สามเหลี่ยมเปรียบเทียบ** (comparison triangle) สำหรับแต่ละโค้งสามเหลี่ยม $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ ในปริภูมิ (X,d) คือ สามเหลี่ยม $\overline{\Delta}(x_1, x_2, x_3) := \Delta(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$ ใน M_κ^2 ที่

$$\rho(x, y) = d_{M_\kappa^2}(\overline{x}, \overline{y}),\ \rho(y, z) = d_{M_\kappa^2}(\overline{y}, \overline{z}) \text{ และ } \rho(z, x) = d_{M_\kappa^2}(\overline{z}, \overline{x})$$

ถ้า $\kappa \le 0$ แล้วจะมีสามเหลี่ยมเปรียบเทียบใน M_κ^2

ถ้า $\kappa > 0$ แล้วจะมีสามเหลี่ยมเปรียบเทียบใน M_κ^2 ก็ต่อเมื่อ

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)+\rho(z,x) < 2D_\kappa \quad \text{เมื่อ } D_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa}.$$

บทนิยาม 2.2.8 ให้ (X,ρ) เป็นปริภูมิเส้นโค้ง ให้ Δ เป็นสามเหลี่ยมโค้งในปริภูมิ X และให้ $\overline{\Delta}$ เป็นสามเหลี่ยมเปรียบเทียบสำหรับ Δ จะกล่าวว่า Δ สอดคล้องกับ**อสมการของ CAT(κ)** ถ้าสำหรับทุก ๆ $p, q \in \Delta(x, y, z)$ และทุกจุดเปรียบเทียบ $\overline{p}, \overline{q} \in \overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ เราได้ว่า

$$\rho(p,q) \le d_{M_\kappa^2}(\overline{p}, \overline{q})$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

บทนิยาม 2.2.9 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $\kappa \in R$

1. จะเรียก X ว่าเป็น**ปริภูมิ CAT(κ) เมื่อ** $\kappa \le 0$ ถ้า X เป็นปริภูมิเส้นโค้งที่สอดคล้องกับ

อสมการของ CAT(κ)

2. จะเรียก X ว่าเป็น**ปริภูมิ CAT(κ) เมื่อ** $\kappa > 0$ ถ้า X เป็นปริภูมิเส้นโค้งที่ $\rho(x,y)+\rho(y,z)+\rho(z,x) < 2D_\kappa$ และสอดคล้องกับอสมการของ CAT(κ)

บทนิยาม 2.2.10 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $K \in (0,2]$ จะเรียก X ว่าเป็นเซตนูน K

($K-$convex) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\rho^2\left(x,(1-\alpha)y \oplus \alpha z\right) \le (1-\alpha)\rho^2(x,y) + \alpha\rho^2(x,z) - \frac{K}{2}\alpha(1-\alpha)\rho^2(y,z)$$

สำหรับทุก ๆ $x,\ y,\ z \in X$ และ $\alpha \in [0,1]$

บทตั้ง 2.2.11 (Panyanak, B., 2015) ให้ $\kappa > 0$ และ (X,ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\mathrm{diam(X)} \le \dfrac{\pi/2-\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ จะได้ว่า (X,ρ) เป็นเซตนูน K สำหรับ $K = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$

บทตั้ง 2.2.12 (Bridson, M., 1999) ให้ $\kappa > 0$ และ (X,ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\mathrm{diam(X)} \le \dfrac{\pi/2-\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ จะได้ว่า

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

$$\rho(x,\alpha y \oplus (1-\alpha)z) \le \alpha\rho(x,y) + (1-\alpha)\rho(x,z),$$

สำหรับทุก ๆ $x,\ y,\ z \in X$ และ $\alpha \in [0,1]$

บทนิยาม 2.2.13 ให้ (X,ρ) เป็นปริภูมิเมตริก และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน X ให้ $x \in X$ จะกล่าวว่า $\{x_n\}$ **ลู่เข้าสู่** (converges to) x ถ้า $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$

บทนิยาม 2.2.14 ให้ (X,ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) บริบูรณ์ และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน X ให้ $x \in X$ กำหนด $r(x,\{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty}\rho(x,x_n)$

$$r(\{x_n\}) = \inf\{r(x,\{x_n\}) : x \in X\}$$

และ $$A(\{x_n\}) = \{x \in X : r(x,\{x_n\}) = r(\{x_n\})\}$$

ทฤษฎีบท 2.2.15 (Esp´ınola, R. & Fern´andez-Le´on, A., 2009) ให้ $\kappa > 0$ และ (X, ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\operatorname{diam}(X) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน X จะได้ว่า $A(\{x_n\})$ บรรจุสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น

จะกล่าวว่าลำดับ $\{x_n\}$ **ลู่เข้าแบบเดลต้า** ($\Delta - converges$) สู่ $x \in X$ ถ้า $A(\{u_n\}) = \{x\}$ เมื่อ $\{u_n\}$ เป็นลำดับย่อยใด ๆ ของ $\{x_n\}$ และเราเขียน $\Delta - \lim_n x_n = x$

บทตั้ง 2.2.16 (Dhompongsa, S. & Panyanak, B., 2008) ให้ $\kappa > 0$ และ (X, ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\operatorname{diam}(X) \leq \frac{\pi/2 - \varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน X ซึ่ง $A(\{x_n\}) = \{x\}$ และ $\{u_n\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{x_n\}$ ซึ่ง $A(\{u_n\}) = \{u\}$ และลำดับ $\{\rho(x_n, u)\}$ เป็นลำดับลู่เข้า จะได้ว่า $x = u$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

เนื้อหาในบทนี้ ผู้วิจัยจะนำเสนอการปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาสำหรับสองการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าของกระบวนการทำซ้ำสู่จุดตรึงร่วมสำหรับการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ)

3.1 การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวา

การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาสำหรับการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) มีเนื้อหาสาระดังนี้: ให้ $\kappa > 0$ และ (X, ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ให้ C เป็นเซตปิด นูน ที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตย่อยของ X กำหนดให้ $T(t_n)$ และ $S(t_n)$ เป็นการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน C โดย

$$\begin{cases} y_n = (1-a_n)x_n \oplus a_n T(t_n)x_n \\ x_{n+1} = (1-b_n)x_n \oplus b_n S(t_n)y_n \end{cases} \tag{3.1.1}$$

สำหรับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับใน $[a,b] \subset [0,1]$ และ $\{t_n\} \subset [0,\infty)$ สำหรับทฤษฎีบทการลู่เข้าจะกล่าวรายละเอียดในเนื้อหาดังต่อไปนี้

3.2 ทฤษฎีบทลู่เข้า

การศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของกระบวนการทำซ้ำ (3.1.1) สู่จุดตรึงร่วมสำหรับสองการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) จากการวิจัยพบว่าได้ทฤษฎีบท และองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญโดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังนี้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

บทตั้ง 3.2.1 ให้ $\kappa > 0$ และ (X, ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\mathrm{diam(X)} \le \dfrac{\pi/2-\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ ให้ C เป็นเซตปิด นูน ที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตย่อยของ X กำหนดให้ $\Im = \{T(t): t > 0\}$ และ $\Psi = \{T(t): t > 0\}$ เป็นเซตของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย สมมติว่า $\Gamma = F(\Im) \cap F(\Psi) \ne \varnothing$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน C โดย

$$\begin{cases} y_n = (1-a_n)x_n \oplus a_n T(t_n)x_n \\ x_{n+1} = (1-b_n)x_n \oplus b_n S(t_n)y_n \end{cases}$$

สำหรับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับใน $[a,b] \subset [0,1]$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \rho(x_n, z)$ หาค่าได้สำหรับแต่ละ $z \in \Gamma$

การพิสูจน์ ให้ $z \in \Gamma$ โดยบทตั้ง 2.2.12 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\rho(y_n,z) &= \rho\left((1-a_n)\oplus a_nT(t_n)x_n, z\right)\\
&\le (1-a_n)\rho(x_n,z)+a_n\rho(T(t_n)x_n,z)\\
&\le (1-a_n)\rho(x_n,z)+a_n\rho(x_n,z)\\
&= \rho(x_n,z)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\rho(x_{n+1},z) &= \rho\left((1-b_n)\oplus b_nS(t_n)y_n, z\right)\\
&\le (1-b_n)\rho(x_n,z)+b_n\rho(S(t_n)y_n,z)\\
&\le (1-b_n)\rho(x_n,z)+b_n\rho(y_n,z)\\
&= \rho(x_n,z)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\{\rho(x_{n+1},z)\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและเป็นลำดับไม่เพิ่มสำหรับทุก ๆ $z\in\Gamma$
เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,z)$ หาค่าได้

ทฤษฎีบท 3.2.2 ให้ $\kappa>0$ และ (X,ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\mathrm{diam(X)}\le\frac{\pi/2-\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon\in(0,\pi/2)$ ให้ C เป็นเซตปิด นูน ที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตย่อยของ X กำหนดให้ $\Im=\{T(t):t>0\}$ และ $\Psi=\{T(t):t>0\}$ เป็นเซตของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย สมมติว่า $\Gamma=F(\Im)\cap F(\Psi)\neq\varnothing$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน C โดย

$$
\begin{cases}
y_n=(1-a_n)x_n\oplus a_nT(t_n)x_n\\
x_{n+1}=(1-b_n)x_n\oplus b_nS(t_n)y_n
\end{cases}
$$

สำหรับ $\{a_n\},\{b_n\}$ และ $\{t_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $a_n,b_n\in[a,b]\subset(0,1)$
2. $t_n>0,\liminf_{x\to\infty} t_n=0,\limsup_{x\to\infty} t_n>0$ และ $\lim_{x\to\infty}(t_{n+1}-t_n)=0$

ดังนั้นสำหรับ $t>0$ จะได้ $\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,T(t)x_n)=\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,S(t)x_n)=0$

การพิสูจน์ ให้ $z\in\Gamma$ โดยบทตั้ง 3.2.1 จะได้ว่า $\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,z)$ หาค่าได้
โดยบทนิยาม 2.2.10 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\rho^2(y_n,z) &= \rho^2\left((1-a_n)\oplus a_nT(t_n)x_n, z\right)\\
&\le (1-a_n)\rho^2(x_n,z)+a_n\rho^2(T(t_n)x_n,z)-\frac{R}{2}a_n(1-a_n)\rho^2(x_n,T(t_n)x_n)\\
&\le (1-a_n)\rho^2(x_n,z)+a_n\rho^2(x_n,z)-\frac{R}{2}a_n(1-a_n)\rho^2(x_n,T(t_n)x_n)\\
&\le \rho^2(x_n,z)-\frac{R}{2}a_n(1-a_n)\rho^2(x_n,T(t_n)x_n)
\end{aligned}
$$

และ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

$$\begin{aligned}
\rho^2(x_{n+1},z) &= \rho^2\left((1-b_n)x_n \oplus b_n S(t_n)y_n, z\right) \\
&\le (1-b_n)\rho^2(x_n,z) + b_n\rho^2(S(t_n)y_n,z) - \frac{R}{2}b_n(1-b_n)\rho^2(x_n,S(t_n)y_n) \\
&\le (1-b_n)\rho^2(x_n,z) + b_n\rho^2(y_n,z) - \frac{R}{2}b_n(1-b_n)\rho^2(x_n,S(t_n)y_n) \\
&\le \rho^2(x_n,z) - \frac{R}{2}b_n a_n(1-a_n)\rho^2(x_n,T(t_n)x_n) - \frac{R}{2}b_n(1-b_n)\rho^2(x_n,S(t_n)y_n) \\
&\le \rho^2(x_n,z) - \frac{R}{2}b_n a_n(1-a_n)\rho^2(x_n,T(t_n)x_n)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{R}{2}a^2(1-b)\rho(x_n,T(t_n)x_n) \le \frac{R}{2}b_n a_n(1-a_n)\rho^2(x_n,T(t_n)x_n) \le \rho^2(x_n,z) - \rho^2(x_{n+1},z)$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,z)$ หาค่าได้ เมื่อ $n\to\infty$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,T(t_n)x_n) = 0$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,S(t_n)x_n) = 0$$

ดังนั้น

$$\rho(x_n,y_n) = \rho(x_n,(1-a_n)x_n \oplus a_n T(t_n)x_n) \le a_n\rho(x_n,T(t_n)) \to 0 \text{ เมื่อ } n\to\infty$$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\rho(x_n,S(t_n)x_n) &\le \rho(x_n,S(t_n)y_n) + \rho(S(t_n)y_n,S(t_n)x_n) \\
&\le \rho(x_n,S(t_n)y_n) + \rho(y_n,x_n) \to 0 \text{ เมื่อ } n\to\infty
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,S(t_n)x_n) = 0$ ต่อไปจะแสดงว่าสำหรับ $t>0$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

$$\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,T(t_n)x_n) = \lim_{x\to\infty}\rho(x_n,S(t_n)x_n) = 0$$

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,T(t_n)x_n) = 0$ สมมติว่า

$$\lim_{x\to\infty} t_n = \lim_{x\to\infty}\frac{\rho(x_n,T(t_n)x_n)}{t_n} = 0$$

จะได้ว่า

$$\rho(x_n,T(t)x_n)\le\sum_{k=0}^{\left[\frac{t}{t_n}\right]}\rho\left(T\left((k+1)t_n\right)x_n,T\left(kt_n\right)x_n\right)+\rho\left(T\left(\left[\frac{t}{t_n}\right]t_n\right)x_n,T(t)x_n\right)$$
$$=\left[\frac{t}{t_n}\right]\rho\left(T(t_n)x_n,x_n\right)+\rho\left(T\left(t-\left[\frac{t}{t_n}\right]t_n\right)x_n,x_n\right)$$
$$=\frac{t}{t_n}\rho\left(T(t_n)x_n,x_n\right)+\max\left\{\rho\left(T(s)x_n,\ x_n\right):0\le s\le t_n\right\}$$

จากบทนิยาม 2.1.2 ข้อ 4. และ $\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,T(t_n)x_n)=0$ จะได้ว่า $\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,T(t)x_n)=0$
ในทำนองเดียวกันจะได้ $\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,S(t)x_n)=0$

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ $\kappa>0$ และ (X,ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\mathrm{diam(X)}\le\frac{\pi/2-\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon\in(0,\pi/2)$ ให้ C เป็นเซตปิด นูน ที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตย่อยของ X กำหนดให้ $\Im=\{T(t):t>0\}$ และ $\Psi=\{T(t):t>0\}$ เป็นเซตของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย สมมติว่า $\Gamma=F(\Im)\cap F(\Psi)\ne\varnothing$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน C โดย

$$\begin{cases}y_n=(1-a_n)x_n\oplus a_nT(t_n)x_n\\ x_{n+1}=(1-b_n)x_n\oplus b_nS(t_n)y_n\end{cases}$$

สำหรับ $\{a_n\},\{b_n\}$ และ $\{t_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $a_n,b_n\in[a,b]\subset(0,1)$
2. $t_n>0,\liminf_{x\to\infty}t_n=0,\limsup_{x\to\infty}t_n>0$ และ $\lim_{x\to\infty}(t_{n+1}-t_n)=0$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเดลต้าสู่จุดตรึงร่วม $z\in\Gamma$

การพิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\rho(x_n,T(t)x_n)=0 \text{ และ } \lim_{x\to\infty}\rho(x_n,S(t)x_n)=0$$

สำหรับทุก $t>0$ ให้ $\omega_w(x_n)=\bigcup A(\{u_n\})$ เมื่อ $\{u_n\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{x_n\}$
ก่อนอื่นจะพิสูจน์ว่า $\omega_w(x_n)\subset\Gamma$ ให้ $u\in\omega_w(x_n)$ จะได้ว่ามีลำดับย่อย $\{u_n\}$ ของ $\{x_n\}$ ซึ่ง $A(\{x_n\})=\{u\}$ จะได้ว่ามีลำดับย่อย $\{v_n\}$ ของ $\{x_n\}$ ซึ่ง $\Delta-\lim_{x\to\infty}v_n=v\in C$
เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\rho(v_n,T(t)v)&\le\rho(v_n,T(t)v_n)+\rho(T(t)v_n,T(t)v)\\&\le\rho(v_n,T(t)v_n)+\rho(v_n,v)\end{aligned}\qquad(3.2.1)$$

จากอสมการ (3.2.1) จะได้ว่า

$$\limsup_{x\to\infty}\rho(v_n,T(t)v)\le\limsup_{x\to\infty}\rho(v_n,v)$$

โดยทฤษฎีบท 2.2.15 จะได้ว่า $T(t)v=v$ สำหรับทุก ๆ $t>0$

ดังนั้น $v \in F(\Im)$ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $v \in F(\Psi)$ นั่นคือ $v \in \Gamma$ โดยบทตั้ง 3.2.1 จะได้ $\lim_{x\to\infty} \rho(x_n, v)$ หาค่าได้ โดยทฤษฎีบท 2.15 จึงสรุปได้ว่า $u = v \in \Gamma$ นั่นคือ $\omega_w(x_n) \subset \Gamma$ ต่อไปจะแสดงว่า $\omega_w(x_n)$ บรรจุสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น ให้ $\{u_n\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{x_n\}$ ซึ่ง $A(\{x_n\}) = \{u\}$ และให้ $A(\{x_n\}) = \{x\}$ เนื่องจาก $u \in \omega_w(x_n) \subset \Gamma$ โดยบทตั้ง 3.2.1 จะได้ว่า
$\lim_{x\to\infty} \rho(x_n, u)$ หาค่าได้ โดยทฤษฎีบท 2.2.15 จะได้ว่า $x = u$ นั่นคือ $\omega_w(x_n)$ บรรจุสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น จึงสรุปได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเดลต้าสู่จุดตรึงร่วม $z \in \Gamma$

ทฤษฎีบท 3.2.4 ให้ $\kappa > 0$ และ (X, ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\mathrm{diam}(X) \le \dfrac{\pi/2 - \varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ ให้ C เป็นเซตกระชับ นูน ที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตย่อยของ X กำหนดให้ $\Im = \{T(t) : t > 0\}$ และ $\Psi = \{T(t) : t > 0\}$ เป็นเซตของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย สมมติว่า $\Gamma = F(\Im) \cap F(\Psi) \ne \varnothing$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน C โดย

$$\begin{cases} y_n = (1-a_n)x_n \oplus a_n T(t_n)x_n \\ x_{n+1} = (1-b_n)x_n \oplus b_n S(t_n)y_n \end{cases}$$

สำหรับ $\{a_n\}, \{b_n\}$ และ $\{t_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $a_n, b_n \in [a,b] \subset (0,1)$
2. $t_n > 0, \liminf_{x\to\infty} t_n = 0, \limsup_{x\to\infty} t_n > 0$ และ $\lim_{x\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วม $z \in \Gamma$

การพิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} \rho(x_n, T(t)x_n) = 0 \text{ และ } \lim_{x\to\infty} \rho(x_n, S(t)x_n) = 0$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

สำหรับทุก $t > 0$ เนื่องจาก C เป็นเซตกระชับ จะได้ว่ามี $\{x_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{x_n\}$ ซึ่ง $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ z ต่อไปเราจะแสดงว่า $z \in \Gamma$ สำหรับแต่ละ $t \ge 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \rho(z, T(t)z) &\le \rho(z, T(t)x_{n_k}) + \rho(T(t)x_{n_k}, T(t)z) \\ &\le 2\rho(z, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, T(t)x_{n_k}) \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty \end{aligned}$$

ดังนั้น $z = T(t)z$ นั่นคือ $z \in F(\Im)$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\begin{aligned} \rho(z, S(t)z) &\le \rho(z, S(t)x_{n_k}) + \rho(S(t)x_{n_k}, S(t)z) \\ &\le 2\rho(z, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, S(t)x_{n_k}) \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty \end{aligned}$$

ดังนั้น $z = S(t)z$ นั่นคือ $z \in F(\Psi)$ เพราะฉะนั้น $z \in \Gamma$ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z)$ หาค่าได้ จึงสรุปได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วม $z \in \Gamma$

บทที่ 4
ผลการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลจากการวิจัยที่สำคัญโดยมีเนื้อสาระ ดังนี้

ผลการวิจัย

ผลจากการวิจัยจะได้ทฤษฎีบทและองค์ความรู้ที่สำคัญ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

บทตั้ง 1. ให้ $\kappa > 0$ และ (X, ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\operatorname{diam}(X) \le \frac{\pi/2-\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ ให้ C เป็นเซตปิด นูน ที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตย่อยของ X กำหนดให้ $\Im = \{T(t): t > 0\}$ และ $\Psi = \{T(t): t > 0\}$ เป็นเซตของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย สมมติว่า $\Gamma = F(\Im) \cap F(\Psi) \neq \varnothing$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน C โดย

$$\begin{cases} y_n = (1-a_n)x_n \oplus a_n T(t_n)x_n \\ x_{n+1} = (1-b_n)x_n \oplus b_n S(t_n)y_n \end{cases}$$

สำหรับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับใน $[a,b] \subset [0,1]$ จะได้ว่า $\lim_{x\to\infty} \rho(x_n, z)$ หาค่าได้สำหรับแต่ละ $z \in \Gamma$

ทฤษฎีบท 2. ให้ $\kappa > 0$ และ (X, ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\operatorname{diam}(X) \le \frac{\pi/2-\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ ให้ C เป็นเซตปิด นูน ที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตย่อยของ X กำหนดให้ $\Im = \{T(t): t > 0\}$ และ $\Psi = \{T(t): t > 0\}$ เป็นเซตของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย สมมติว่า $\Gamma = F(\Im) \cap F(\Psi) \neq \varnothing$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน C โดย

$$\begin{cases} y_n = (1-a_n)x_n \oplus a_n T(t_n)x_n \\ x_{n+1} = (1-b_n)x_n \oplus b_n S(t_n)y_n \end{cases}$$

สำหรับ $\{a_n\}, \{b_n\}$ และ $\{t_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $a_n, b_n \in [a,b] \subset (0,1)$
2. $t_n > 0, \liminf_{x\to\infty} t_n = 0, \limsup_{x\to\infty} t_n > 0$ และ $\lim_{x\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$

ดังนั้นสำหรับ $t > 0$ จะได้ $\lim_{x\to\infty} \rho(x_n, T(t)x_n) = \lim_{x\to\infty} \rho(x_n, S(t)x_n) = 0$

ทฤษฎีบท 3. ให้ $\kappa > 0$ และ (X, ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\operatorname{diam}(X) \le \frac{\pi/2-\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ ให้ C เป็นเซตปิด นูน ที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตย่อยของ X กำหนดให้ $\Im = \{T(t): t > 0\}$ และ $\Psi = \{T(t): t > 0\}$ เป็นเซตของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย สมมติว่า $\Gamma = F(\Im) \cap F(\Psi) \neq \varnothing$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน C โดย

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

$$\begin{cases} y_n = (1-a_n)x_n \oplus a_n T(t_n)x_n \\ x_{n+1} = (1-b_n)x_n \oplus b_n S(t_n)y_n \end{cases}$$

สำหรับ $\{a_n\},\{b_n\}$ และ $\{t_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $a_n, b_n \in [a,b] \subset (0,1)$
2. $t_n > 0, \liminf_{x\to\infty} t_n = 0, \limsup_{x\to\infty} t_n > 0$ และ $\lim_{x\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเดลต้าสู่จุดตรึงร่วม $z \in \Gamma$

ทฤษฎีบท 4. ให้ $\kappa > 0$ และ (X,ρ) เป็นปริภูมิ CAT(κ) ที่ $\mathrm{diam(X)} \le \dfrac{\pi/2-\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ ให้ C เป็นเซตกระชับ นูน ที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตย่อยของ X กำหนดให้ $\Im = \{T(t) : t > 0\}$ และ $\Psi = \{T(t) : t > 0\}$ เป็นเซตของการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย สมมติว่า $\Gamma = F(\Im) \cap F(\Psi) \neq \varnothing$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ ใน C โดย

$$\begin{cases} y_n = (1-a_n)x_n \oplus a_n T(t_n)x_n \\ x_{n+1} = (1-b_n)x_n \oplus b_n S(t_n)y_n \end{cases}$$

สำหรับ $\{a_n\},\{b_n\}$ และ $\{t_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $a_n, b_n \in [a,b] \subset (0,1)$
2. $t_n > 0, \liminf_{x\to\infty} t_n = 0, \limsup_{x\to\infty} t_n > 0$ และ $\lim_{x\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วม $z \in \Gamma$

จากการศึกษาค้นคว้าวิจัยในครั้งนี้ทำให้ได้ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการอ้างอิงผลงานทางวิชาการ รวมทั้งสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

บทที่ 5
สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

การศึกษากระบวนการทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาจุดตรึงร่วมสำหรับการส่งสองกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$ ซึ่งได้ทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญยิ่ง สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึง รายละเอียดเกี่ยวกับข้อสรุปจากการวิจัย อภิปรายผลจากการวิจัยและข้อเสนอแนะที่สำคัญดังต่อไปนี้

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยนี้เป็นการวิจัยพื้นฐานเพื่อหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้การปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วมสำหรับการส่งสองกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$ พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของกระบวนการทำซ้ำดังกล่าว ผลจากการวิจัยได้ข้อสรุปที่สำคัญ คือ ได้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้กระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วมสำหรับ การส่งสองกึ่งกรุปแบบไม่ขยาย รวมทั้งทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ได้จากการวิจัยยังได้ครอบคลุมทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ศึกษาโดย Eslamian และ Dhompongsa

อภิปรายผล

ผลจากการวิจัยเกี่ยวกับการปรับเปลี่ยนกระบวนการทำซ้ำอิชิคาวาสำหรับสองกึ่งกรุปแบบไม่ขยายในปริภูมิ CAT(κ) สำหรับทุก $\kappa > 0$ จะเห็นว่า ถ้าวางเงื่อนไขบางอย่างแล้วทฤษฎีบทลู่เข้าที่ได้จะครอบคลุมผลงานของ Eslamian และ Dhompongsa ในปริภูมิ CAT(0) ที่ศึกษาไว้ก่อนหน้านี้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

การทำงานวิจัยในครั้งนี้เป็นการสร้างองค์ความรู้ใหม่ทางทฤษฎีจุดตรึง ผู้สนใจสามารถนำไปใช้อ้างอิงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทางด้านทฤษฎีบทจุดตรึงและทฤษฎีบทการลู่เข้าในปริภูมิที่เกี่ยวข้องได้

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

แนวทางการทำวิจัยต่อพอสรุปได้ดังนี้

1. ผู้ดำเนินการวิจัย สามารถศึกษากระบวนการทำซ้ำอื่น ๆ ที่ครอบคลุมกระบวนการทำซ้ำในโครงการวิจัยนี้
2. ผู้ดำเนินการวิจัยสามารถศึกษาการส่งที่คลาสใหญ่กว่าการส่งกึ่งกรุปแบบไม่ขยายได้

บรรณานุกรม

Bridson, M. & Haeiger, A. (1999). *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Cho, Y. J., Ciric, L. & Wang, S. H. (2011). *Convergence theorems for nonexpansive semigroups in CAT(0) spaces*, Nonlinear Anal, 2011(74), 6050-6059.

Dhompongsa, S. & Panyanak, B. (2008). *On Δ-convergence theorems in CAT(0) spaces*, Comput. Math. Appl, 2008(56), 2572-2579.

Eslamian, M. & Dhompongsa, S. (2013). *Modified Ishikawa iteration process for two nonexpansive semigroups in CAT(0) spaces*, U.P.B. Bull., Series A. Vol, 75, 99-106.

Esp´ınola, R. & Fern´andez-Le´on, A. (2009*). CAT(k)-spaces, weak convergence and fixed points*, J. Math. Anal. Appl, 2009(353), 410-427.

Halpern, B. (1967). *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (6), 957-961.

Ishikawa, S. (1974). *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc, 44, 147-150.

Mann, W. R. (1953). *Mean value methods in iteration*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol, 4, 506–510.

Panyanak, B. (2015). *On an open problem of Kyung Soo Kim*, Fixed Point Theory and Appl.

Suzuki, T. (2003). *On strong convergence to common fixed points of nonexpansive semigroups in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc, 131, 2133-2136.

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ประวัติผู้วิจัย

1. ข้อมูลเบื้องต้น

ชื่อ (ไทย)...................บรรชา.....................สกุล.................นันจรัส...

ชื่อ (อังกฤษ).................Bancha............... สกุล..........................Nanjaras..

เกิดวันที่....19....เดือน.....ธันวาคม......พ.ศ.....2527.......สัญชาติ.........ไทย..........ศาสนา.......พุทธ........

ที่อยู่ปัจจุบัน.........83 ม.2 ตำบลภูดิน อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ 46000.......................................

ตำแหน่งปัจจุบัน....อาจารย์...

สังกัด/หน่วยงาน............คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี/สาขาวิชาคณิตศาสตร์................................

ที่อยู่หน่วยงาน....สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏ

มหาสารคาม 80 ถนนนครสวรรค์ ต.ตลาด อ.เมือง จ.มหาสารคาม44000...

2. ประวัติการศึกษา

วุฒิการศึกษา	สาขา	มหาวิทยาลัย	ปีที่จบการศึกษา
ครุศาสตรบัณฑิต (คบ.)	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม	2549
วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (วท.ม.)	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่	2552
ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต (ปร.ด.)	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่	2559

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

3. ประวัติการทำงาน

ช่วงปีที่ทำงาน	ตำแหน่ง	หน่วยงาน
2552- ปัจจุบัน	อาจารย์	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

4. ความเชี่ยวชาญ

1. การวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (Functional Analysis)
2. พีชคณิตนามธรรม (Abstract Algebra)
3. การวิเคราะห์จำนวนจริง (Real Analysis)

5. ผลงานวิจัย

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

Year	Publications	impact factor
2010	**B. Nanjaras**, B. Panyanak, W. Phuengrattana, Fixed point theorems and convergence theorems for Suzuki-generalized nonexpansive mappings in CAT(0) spaces, Nonlinear Anal., Hybrid Systems, 4(2010), 25-31.	-
2010	**B. Nanjaras**, B. Panyanak, Demiclosed principle for asymptotically nonexpansive mappings in CAT(0) spaces, Fixed Point Theory Appl. 2010 (2010), Art. ID 268780.	1.936 (in 2010)

2012	**Bancha Nanjaras**, Bancha Panyanak. An approximation method for common fixed points of a finite family of asymptotic pointwise nonexpansive mappings, Fixed Point Theory and Applications, 2012	1.866 (in 2012)
2014	**Bancha Nanjaras**, Bancha Panyanak. Generalized hybrid mappings onCAT(k) spaces, Journal of Inequalities and Applications, 2014	0.768 (in 2013)
2015	**B. Nanjaras**, Fixed point theorems for fundamentally nonexpansive mappings in CAT(k) spaces, J. Nonlinear Anal. Optim. (to appear)	-

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY