รายงานการวิจัย

เรื่อง

แบบจำลองการไหลใน 2 มิติของของไหลแบบมีความหนืดที่ไม่อัดตัว

2D-FLOW MODEL OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

อัครพงศ์ วงศ์พัฒน์

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

2562

(งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ปีงบประมาณ 2562)

รายงานการวิจัย

เรื่อง

แบบจำลองการไหลใน 2 มิติของของไหลแบบมีความหนืดที่ไม่อัดตัว

2D-FLOW MODEL OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

อัครพงศ์ วงศ์พัฒน์

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

2562

(งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ปีงบประมาณ 2562)

หัวข้อวิจัย แบบจำลองการไหลใน 2 มิติของของไหลแบบมีความหนืดที่ไม่อัดตัว

ผู้ดำเนินการวิจัย นายอัครพงศ์ วงศ์พัฒน์

หน่วยงาน สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

ปี พ.ศ. 2562

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ เป็นการศึกษาแบบจำลองการไหลใน 2 มิติ ของของไหลแบบมีความหนืดที่ไม่อัดตัว และมีสิ่งกีดขวางการไหล โดยระบบอยู่ในสภาวะคงตัว (steady state) ศึกษาด้วยโปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ผลจากการศึกษาพบว่า เมื่อความหนาแน่นและความหนืดของของไหลมีการเปลี่ยนแปลง ส่งผลให้ความเร็วและความดันเกิดการเปลี่ยนแปลง ส่วนบริเวณรอบ ๆ สิ่งกีดขวางความเร็วและความดันมีการเปลี่ยนแปลงมากกว่าบริเวณอื่น

Research Title 2D-FLOW MODEL OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

Researcher Akkharaphong Wongphat
Organization Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology
Rajabhat Maha Sarakham University
Year 2019

ABSTRACT

A 2D-Flow Model of viscous incompressible fluid is formulated under a barrier of flowing in steady state system condition. This paper proposes FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D to solve this model. The numerical results show that the change of density and viscosity has influenced to velocity and pressure especially around this barrier.

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคามเป็นอย่างสูงที่ได้อนุมัติทุนสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้ ทำให้ผู้ทำงานวิจัยได้พัฒนาองค์ความรู้ และจะได้นำความรู้ที่ได้ไปพัฒนาการเรียนการสอน เพื่อให้มีประสิทธิภาพเพิ่มมากขึ้น ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไวท์ยางกูร ที่ได้ให้คำปรึกษาเกี่ยวกับปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ และปัญหาเกี่ยวกับเวกเตอร์ จึงทำให้งานวิจัยฉบับนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

และสุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณคณาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคามทุกท่านที่ให้คำแนะนำสำหรับการทำงานวิจัยในครั้งนี้

อัครพงศ์ วงศ์พัฒน์

ผู้จัดทำ

2562

สารบัญ

หน้า

รายการสัญลักษณ์

สัญลักษณ์และความหมาย			หน่วย
$\vec{V}$	คือ	เวกเตอร์ความเร็ว ($\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$)	
$\vec{n}$	คือ	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบของโดเมน	
u	คือ	ความเร็วในแนวแกน x	m/s
v	คือ	ความเร็วในแนวแกน y	m/s
μ	คือ	ความหนืดพลศาสตร์	$N \cdot s/m^2$
ρ	คือ	ความหนาแน่น	kg/m^3
ρ_0	คือ	ความหนาแน่นเริ่มต้น	kg/m^3
p	คือ	ความดัน	N/m^2
p_0	คือ	ความดันบรรยากาศเริ่มต้น	N/m^2
τ	คือ	ความเค้น	N/m^2
τ_{xx}	คือ	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x	N/m^2
τ_{yy}	คือ	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y	N/m^2
τ_{yx}	คือ	ความเค้นเฉือนในแนวแกน x	N/m^2
τ_{xy}	คือ	ความเค้นเฉือนในแนวแกน y	N/m^2
t	คือ	เวลา	s
$\vec{F}$	คือ	แรง	N
F_x	คือ	แรงรวมในแนวแกน x	N

f_x	คือ	แรงในแนวแกน x	N
f_y	คือ	แรงในแนวแกน y	N
m	คือ	มวลของก้อนของไหล	kg
$\bar{a}$	คือ	ความเร่งของมวลในแนวแกน x	m/s^2
a_x	คือ	ความเร่งของมวลในแนวแกน x	m/s^2
Γ_0	คือ	ผนังของโดเมนซึ่งเป็นส่วนที่ของไหลไหลผ่านไม่ได้	
Γ_1	คือ	สิ่งกีดขวางภายในโดเมนซึ่งเป็นส่วนที่ของไหลไหลผ่านไม่ได้	
Γ_{in}^x	คือ	ทางที่ของไหลไหลเข้าสู่โดเมนในแนวแกน x	
Γ_{in}^y	คือ	ทางที่ของไหลไหลเข้าสู่โดเมนในแนวแกน y	
Γ_{out}^x	คือ	ทางที่ของไหลไหลออกจากโดเมนในแนวแกน x	

รายการสัญลักษณ์ (ต่อ)

สัญลักษณ์และความหมาย

$\frac{D}{Dt}$ คือ อนุพันธ์สัมบูรณ์ $\left(\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)$

∇ คือ เกรเดียนต์ $\left(\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}\right)$

$N_i(x, y)$ คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในสมาชิก เมื่อ i = 1, 2, 3

ϕ_i คือ ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ เมื่อ i = 1, 2, 3

$\lfloor N \rfloor$ คือ เมทริกซ์แถวนอน

$\{\phi\}$ คือ เมทริกซ์แถวตั้ง

w คือ ฟังก์ชันน้ำหนัก

Ω คือ โดเมน, พื้นที่ของสมาชิก

Γ คือ เส้นโค้ง, ขอบของโดเมน

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ของไหล (fluid) โดยทั่วไปจะหมายถึงสสารในสถานะของเหลวหรือก๊าซ ซึ่งไม่สามารถคงรูปอย่างถาวรด้วยตัวของมันเอง แต่จะมีรูปร่างได้ภายในภาชนะหรือสิ่งที่บรรจุอยู่ ถ้ามองในระดับอนุภาคจะพบว่าโดยทั่วไปอะตอมหรือโมเลกุลของของไหลจะมีการเคลื่อนที่ไปมา และทำให้เกิดพลังงานจากอนุภาคหนึ่งไปสู่อนุภาคหนึ่งหรือสู่ผนังของภาชนะที่บรรจุอยู่ ในทางตรงกันข้ามอนุภาคของของแข็งจะอยู่ในที่อยู่นิ่งไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ ความหมายอย่างง่ายทางกลศาสตร์ ของไหล คือสสารที่ไม่มีความต้านทานแรงดึงหรือแรงเฉือนได้ โดยปราศจากการเคลื่อนที่ ส่วนของแข็ง คือสสารที่สามารถต้านทานแรงดึงและแรงเฉือนได้ และสามารถคืนตัวสู่รูปร่างเดิมได้ (ในกรณีที่ยังไม่เกินพิกัดความยืดหยุ่น)

การแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ มีส่วนอย่างมากในการสร้างเสริมปรับปรุงความเป็นอยู่ของมนุษย์ให้ดียิ่งขึ้น ปรากฏการณ์ส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นรอบตัวสามารถอธิบายได้โดยใช้กฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์และทำการประดิษฐ์ขึ้นในลักษณะของสมการต่างๆ ซึ่งอาจจะอยู่ในของสมการเชิงอนุพันธ์(differential equations) หรือ ในรูปแบบของสมการปริพันธ์ (integral equations) เป็นต้น สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาต่างๆ ผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ที่ต้องการและจำเป็นต้องประดิษฐ์ขึ้นโดยระเบียบวิธีวิเคราะห์ (analytical method) นั้นทำได้ยากมาก เหตุผลดังกล่าว ก่อให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ขึ้น ระเบียบวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณนั้นมีหลายแบบ วิธีที่ได้รับความนิยมกันอย่างกว้างขวางในอดีตที่ผ่านมา คือ ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) อีกวิธีหนึ่งที่เรียกว่า ระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด (finite element method) ซึ่งนิยมเรียกด้วยคำย่อกันว่า FEM ระเบียบวิธีสมาชิกจำกัดนี้ สามารถนำมาใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้เป็นอย่างดี สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้ใกล้เคียงเที่ยงตรง กล่าวคือ เริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นชิ้นๆ ที่เรียกว่า สมาชิก

ในกาวิเคราะห์ปัญหานั้น ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ ผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาได้จะประกอบด้วยค่าของตัวแปรตามตำแหน่งต่าง ๆ กันบนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ผลเฉลยแม่ตรงจะประกอบด้วยค่าต่าง ๆ ทั้งหมดนับเป็นจำนวนอนันต์ค่า แทนที่จะทำการหาผลเฉลยแม่นตรงที่ประกอบด้วยค่าต่าง ๆ จำนวนมากมายเช่นนี้ในทางปฏิบัตินั้นเป็นไปไม่ได้ หลักการก็คือ ทำการลดค่าทั้งหมดที่มีจำนวนอนันต์ค่านั้นมาเป็นค่าโดยประมาณในจำนวนที่นับได้ (finite) ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยสมาชิก ซึ่งมีขนาดต่าง ๆ กัน

งานวิจัยนี้ศึกษาปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (non - linear partial differential equation) ซึ่งเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจและเกี่ยวข้องกับปัญหาต่าง ๆ ทางฟิสิกส์ด้วย การไหลของของไหลอธิบายทางคณิตศาสตร์ด้วยสมการนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งประกอบด้วย

สมการของการอนุรักษ์มวล (Conservation of mass)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentums)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.2}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+g\beta\left(T-T_c\right) \tag{1.3}$$

สมการอนุรักษ์พลังงาน (Consevation of energy equation)

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{1.4}$$

โดยที่ u คือ ความเร็วในแนวแกน x (x-component of the flow velocity)

v คือ ความเร็วในแนวแกน y (y-component of the flow velocity)

ρ คือ ความหนาแน่น (density)

μ คือ ความหนืดพลศาสตร์ (dynamic viscosity)

p คือ ความดันของของไหล (pressure)

T คือ อุณหภูมิของของไหล

T_c คือ อุณหภูมิเย็นที่ผนัง

T_h คือ อุณหภูมิร้อนที่ผนัง

g คือ ความเร่งแรงโน้มถ่วงของโลก

β คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวตามอุณหภูมิ

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

2.1 ศึกษาลักษณะการไหลของของไหลแบบมีความหนืดที่ไม่อัดตัวใน 2 มิติ โดเมนการไหลมีสิ่งกีดขวาง และระบบอยู่ในสภาวะคงตัว

2.2 เพื่อพัฒนาวิธีสมาชิกจำกัดสำหรับปัญหาการไหลผ่านของของไหลแบบมีความหนืดและอัดตัวไม่ได้ ใน 2 มิติบริเวณที่กำหนด กับเงื่อนไขขอบ

2.3 เพื่อศึกษาค่า *Prandtl* (Pr) ของของไหลที่มีผลต่อของไหล

3. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

3.1 ได้ความรู้เกี่ยวกับลักษณะการไหลของของไหลแบบมีความหนืดที่ไม่อัดตัวใน 2 มิติ โดเมนการไหลมีสิ่งกีดขวาง และระบบอยู่ในสภาวะคงตัว

3.2 สามารถแก้ไขปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยใช้ระเบียบวิธีสมาชิกจำกัดสำหรับปัญหาการไหลผ่านของของไหลแบบมีความหนืดและอัดตัวไม่ได้ใน 2 มิติบริเวณที่กำหนด กับเงื่อนไขขอบได้

4. ขอบเขตและข้อจำกัดของการวิจัย

การศึกษาวิจัยครั้งนี้ใช้วิธีสมาชิกจำกัดศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการไหลแบบมีความ หนืดและไม่อัดตัว โดยใช้วิธีสมาชิกจำกัดด้วยโปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ซึ่งการศึกษางานนี้จะพิจารณาพารามิเตอร์ของเลขพรันด์เทิล และเลขเรย์ลีที่อยู่ในช่วง โดยการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์แบบไร้มิติดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \tag{1.5}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{\partial P}{\partial X}+\Pr\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) \tag{1.6}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{\partial P}{\partial X}+\Pr\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right)+Ra\Pr\theta \tag{1.7}$$

$$U\frac{\partial T}{\partial X}+V\frac{\partial T}{\partial Y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}\right) \tag{1.8}$$

ฟังก์ชันสายธาร (Stream function) สำหรับการไหลในสองมิติแบบไร้มิติ ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}=\frac{\partial U}{\partial Y}-\frac{\partial V}{\partial X} \tag{1.9}$$

โดยที่ X คือ ระยะทางในแนวนอนแบบไร้มิติ

Y คือ ระยะทางในแนวตั้งแบบไร้มิติ

V คือ ระยะทางในแนวแกน Y แบบไร้มิติ

U คือ ความเร็วในแนวแกน X แบบไร้มิติ

P คือ ความดันแบบไร้มิติ

$\Pr$ คือ เลขพรันด์เทิล

Ra คือ เลขเรย์ลี

θ คือ อุณหภูมิแบบไร้มิติ

Ψ คือ ฟังก์ชันสายธารแบบไร้มิติ

T คือ อุณหภูมิของของไหล

T_c คือ อุณหภูมิเย็นที่ผนัง

T_h คือ อุณหภูมิร้อนที่ผนัง

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

2.1. พื้นฐานทางกลศาสตร์ของไหล

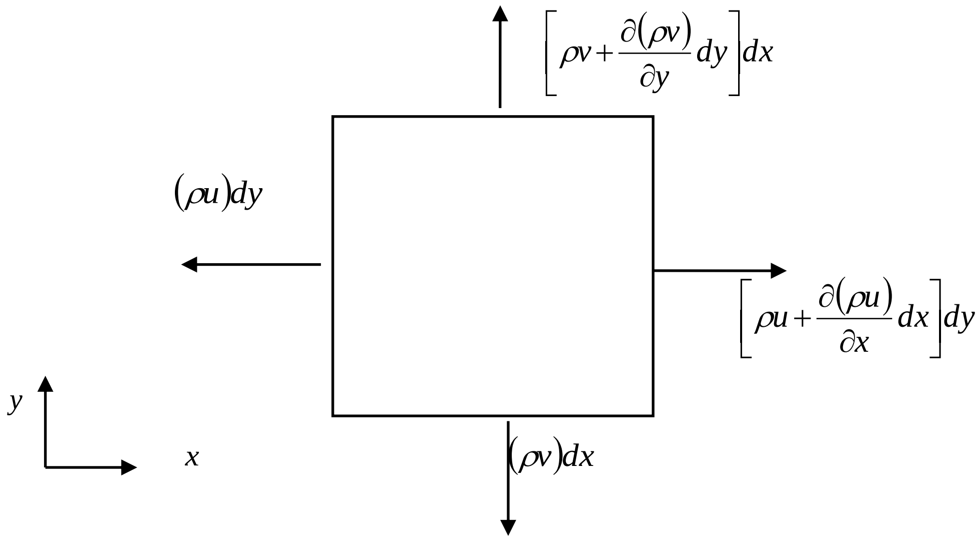
ของไหล (fluid) หมายถึง สสารที่เปลี่ยนแปลงรูปร่างได้อย่างต่อเนื่อง เมื่อมีแรงเฉือน (shear force) มากระทำ ซึ่งแรงเฉือนนี้อาจมีขนาดเพียงเล็กน้อยก็สามารถทำให้ของไหลเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้

การวิเคราะห์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการไหลโดยทั่วไปจำเป็นต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) ที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของการไหลซึ่งประกอบด้วย สมการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) และสมการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy)

ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นการศึกษาการไหลแบบราบเรียบมีความหนืดที่ไม่อัดตัว (viscous incompressible flow) ในสองมิติ ดังนั้นความหนาแน่นของการไหลอาจถูกสมมติให้มีค่าคงที่ได้ และสำหรับการไหลที่มีความเร็วต่ำนั้น อุณหภูมิของของไหลจะถูกสมมติให้กระจายสม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมนของการไหล ทำให้สมการอนุรักษ์พลังงานไม่มีความสัมพันธ์กับสมการอนุรักษ์มวล และโมเมนตัม

2.1 สมการอนุรักษ์มวล (conservation of mass)

การประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลในสองมิติที่ได้จากกฎการอนุรักษ์มวลสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ โดยพิจารณาจากการไหลผ่านกรอบเล็กๆ ขนาดกว้าง dx และ dy ดังแสดงในภาพที่ 2.1 ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล (วินัย, 2546)



ภาพที่ 2.1 รูปแบบแสดงฟลักซ์ของมวลของไหลผ่านกรอบเล็กๆ ที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล

เนื่องจากทั้งความหนาแน่น ρ และความเร็ว u นั้นเปลี่ยนแปลงไปตลอด ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในแนวแกน x ผ่านขอบ dy ของการไหลผ่านกรอบเล็กๆ นี้ คือ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dy - [\rho u]dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdy \tag{2.1}$$

ในทำนองเดียวกันปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในการไหลผ่านขอบ dx ล่างไปยังขอบบนคือ

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]dx - [\rho v]dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdy \tag{2.2}$$

ดังนั้นผลรวมของปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านกรอบเล็ก ๆ นี้มีค่าเท่ากับ

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dxdy \tag{2.3}$$

และเนื่องจากปริมาณของมวลในกรอบเล็กๆ นี้คือ $\rho(dxdy)$ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลหรือปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ลดลงไปคือ

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdy \tag{2.4}$$

แต่มวลในกรอบเล็กๆ นี้ต้องไม่เกิดการสูญหาย ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ dx และ dy ต้องเท่ากับปริมาณฟลักซ์ของมวลในกรอบเล็กๆ ที่ลดลงนั่นคือ

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dxdy = -\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdy \tag{2.5}$$

หารสมการ (2.5) ด้วย $dxdy$ แล้วจัดรูปใหม่ จะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] = 0 \tag{2.6}$$

หรือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\right) = 0 \tag{2.7}$$

โดยที่ $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ (2.8)

และ $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$ แทนค่าเวกเตอร์ ความเร็วของการไหล (2.9)

สมการ (2.6) นี้คือสมการอนุรักษ์มวลที่อยู่ในรูปแบบของพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าจำนวน 3 ค่า ได้แก่ความเร็วของการไหล u,v และความหนาแน่น ρ แต่เนื่องจากวิทยานิพนธ์นี้เป็นการศึกษาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวซึ่งความหนาแน่นของก้อนของไหลมีค่าคงที่ ดังนั้นสมการ (2.6) จึงลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.10}$$

หรือ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 \tag{2.11}$$

สมการอนุรักษ์มวล (2.6) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเทนเซอร์ได้คือ

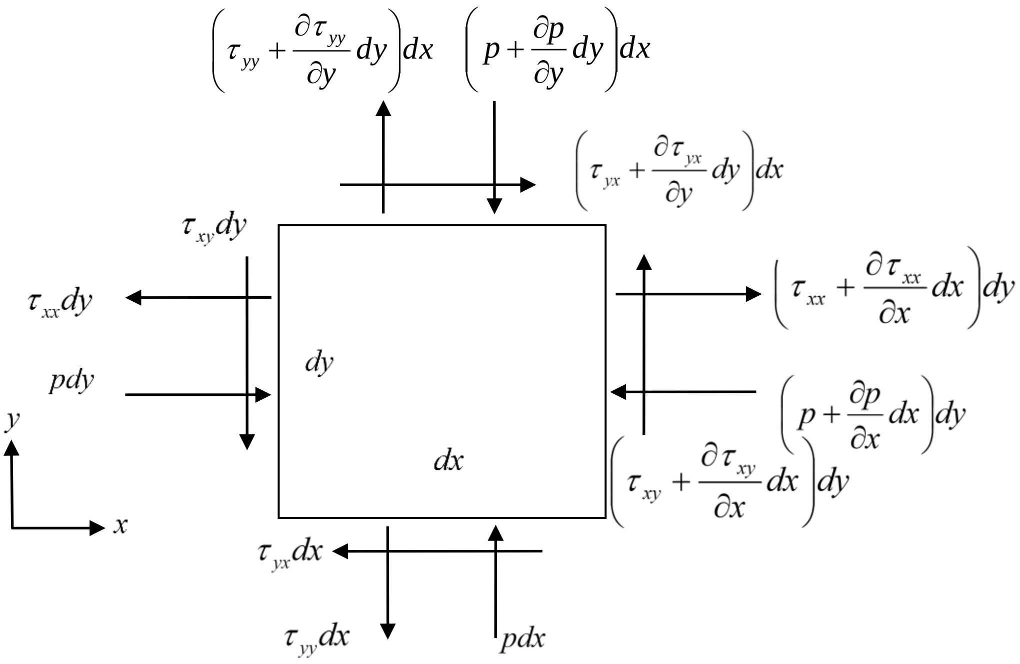
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}=0 \qquad i=1,2 \tag{2.12}$$

2.2 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum)

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยอาศัยกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) ที่กล่าวว่า ผลรวมของแรงภายนอกเท่ากับมวลคูณด้วยอัตราเร่ง ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ โดยให้ $\bar{F}$ แทนเวกเตอร์ของแรง m แทนมวล และ $\bar{a}$ แทนเวกเตอร์ของความเร่ง ได้ดังนี้

$$\sum \bar{F} = m\bar{a} \tag{2.13}$$

ดังนั้นหากพิจารณามวลซึ่งมีขนาดกว้าง dx และ dy ที่กำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหลดังแสดงในภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 แรงต่าง ๆ ที่กระทำบนผิวของก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล

แรงภายนอกทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.13) ประกอบด้วย

1.2.1 แรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักของก้อนของไหลเอง (body force) ซึ่งเป็นแรงอันเนื่องมากจากความโน้มถ่วงของโลก

1.2.2 แรงกระทำที่ผิวต่าง ๆ บนก้อนของไหล (surface forces) ซึ่งประกอบด้วยแรงอันเนื่องมากจากความดัน p, ความเค้นตั้งฉาก (normal stress) τ_{xx}, τ_{yy} และความเค้นเฉือน (shear stress) τ_{xy}, τ_{yx} สำหรับดรรชนีล่างของความเค้นเฉือนต่าง ๆ นั้นกำหนดได้โดยให้ตัวห้อยแรกแทนทิศทางที่ตั้งฉากกับทิศแกนของความเค้น ส่วนตัวห้อยหลังแทนทิศทางที่ความเค้นนี้กระทำ หากพิจารณาเฉพาะความสัมพันธ์ของกฎข้อที่สองของนิวตันในทิศแกน x คือ

$$\sum F_x = ma_x \tag{2.14}$$

โดยที่ F_x และ a_x เป็นค่าของแรงและความเร่งในทิศแกน x ตามลำดับ

หากกำหนดให้ f แทนน้ำหนักของตัวของไหลแล้วแรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักของตัวของไหลเองในทิศทางแกน x คือ

$$\rho f_x(dxdy) \tag{2.15}$$

และแรงรวมที่กระทำที่ผิวต่าง ๆ ในทิศแกน x ของก้อนมวลนี้คือ

$$\left[p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]dy+\left[\left(\tau_{xx}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx\right)-\tau_{xx}\right]dy+\left[\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)-\tau_{yx}\right]dx \tag{2.16}$$

ดังนั้นแรงรวมทั้งหมดในทิศแกน x ที่เกิดจากพจน์ต่าง ๆ ในสมการ (2.15) และ (2.16) คือ

$$\sum F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)dxdy+\rho f_x dxdy \tag{2.17}$$

ส่วนมวลของก้อนของไหลนี้คือ

$$m=\rho(dxdy) \tag{2.18}$$

สำหรับค่าความเร่งของมวลในสมการ (2.14) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว u ของมวลที่กำลังเคลื่อนที่นั้นต่อเวลา

$$a_x=\frac{Du}{Dt} \tag{2.19}$$

แทนค่าสมการ (2.17) – (2.19) ลงในกฎข้อที่สองของนิวตันในสมการ (2.14) แล้วหารตลอดด้วย $dxdy$ จะได้

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\rho f_x \tag{2.20}$$

ในทำนองเดียวกันกฎข้อที่สองของนิวตันสำหรับทิศแกน y ก่อให้เกิดสมการอนุพันธ์ที่สอดคล้องกันดังนี้

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\rho f_y \tag{2.21}$$

ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.20)-(2.21) สามารถแปลงให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ย่อย โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังแสดงในสมการ (2.22) คือ

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.22}$$

หรือ

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right) \tag{2.23}$$

เมื่อประยุกต์ความสัมพันธ์ในสมการ (2.22) เข้ากับความเร็ว u และ v ทำให้ได้

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.24}$$

และ

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.25}$$

แทนค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของความเร็ว u และ v ลงในสมการ (2.20)-(2.21) จะได้

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\rho f_x \tag{2.26}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\rho f_y \tag{2.27}$$

สำหรับของไหลแบบนิวโตเนียน (Newtonian fluid) ซึ่งมีคุณสมบัติว่าค่าความเค้นแปรผันโดยตรงกับการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (velocity gradient) สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\tau_{xx}=\lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.28}$$

$$\tau_{yy}=\lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.29}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.30}$$

โดย μ แทนค่าความหนืดพลศาสตร์ (dynamic viscosity) และ λ แทนค่าความหนืดที่สอง (second viscosity) ซึ่งหากเป็นปัญหาการไหลแบบไม่อัดตัวค่า λ จะไม่ถูกนำมาใช้ในการคำนวณ เมื่อแทนค่าความเค้นต่าง ๆ ที่อยู่ในรูปของความเร็วจากสมการ (2.28) - (2.30) ลงในสมการ (2.26) - (2.27) จะก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม ซึ่งเรียกกันโดยทั่วไปว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) ดังนี้

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\rho f_x \tag{2.31}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)\right)+\rho f_y \tag{2.32}$$

สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวในสองมิติหากไม่คิดแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหลจะทำให้สมการนาเวียนร์-สโตกส์ลดรูปลงเป็น

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left[2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \tag{2.33}$$

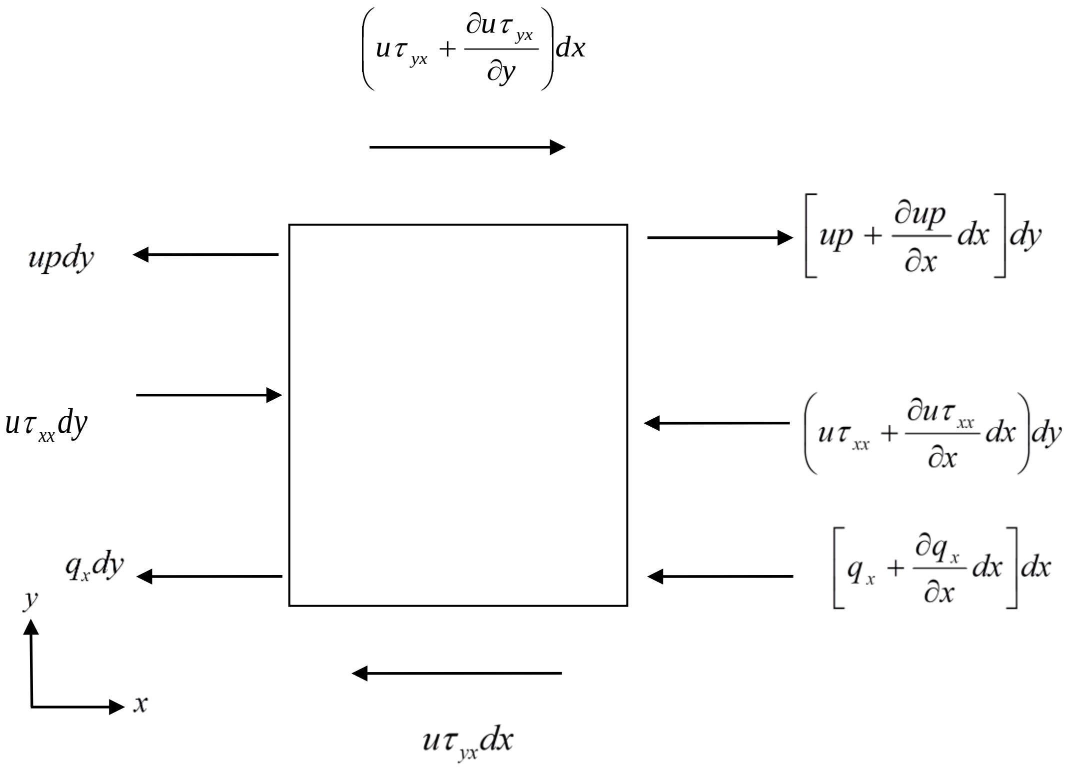
$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \tag{2.34}$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในสมการ (2.33)-(2.34) สามารถเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ของเทนเซอร์ (tensor notations)ได้คือ

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\qquad i,j=1,2 \tag{2.35}$$

2.3 สมการอนุรักษ์พลังงาน (Conservatios of energy equation)

ความเป็นจริงชนิดที่สามของการไหลโดยทั่วไปที่สามารถนำมาสร้างขึ้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพิ่มเติมได้อีกนั่นคือ กฎที่ว่าพลังงานนั้นไม่สูญหายไป (Conservatios of energy) จะพิจารณามวลที่มีขนาดกว้าง dx และ dy โดยมีความลึกหนึ่งหน่วยซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล ดังภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 รูปแบบแสดงงานที่เกิดขึ้นและปริมาณฟลักซ์ในทิศแกน x ที่ไหลผ่านก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล เพื่อใช้ในการสร้างสมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน

สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานสามารถสร้างขึ้นได้โดยใช้กฎข้อแรกของเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจะเท่ากับปริมาณฟลักซ์ความร้อน ที่ให้แก่ก้อนมวลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนมวลนั้น

อัตราการเปลี่ยนแปลง		ปริมาณฟลักซ์		อัตราของงานที่เกิดขึ้น
ของพลังงาน	=	ความร้อนที่ให้	+	เนื่องจากแรงต่าง ๆ
ก้อนมวล		แก่ก้อนมวล		บนก้อนมวลนั้น

หรือ $A = B + C$ (2.29)

โดย A, B และ C แทนความหมายต่าง ๆ ดังแสดงในสมการ (2.29) นี้หากเริ่มต้นพิจารณาที่พจน์ C ซึ่งแทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนมวลนี้ แรงชนิดแรกคือแรงจากน้ำหนักของก้อนมวลนั้นเอง ซึ่งเมื่อคูณกับความเร็วของการไหลในทิศทางนั้นก่อให้เกิดอัตราของงานคือ

$$\rho\vec{f} \cdot \vec{V}(dxdy)$$

โดยที่ $\vec{f}$ คือแรงจากน้ำหนักของก้อนมวลและ $\vec{V} = ui + vj$ คือความเร็วของการไหล จากภาพที่ (2.3) อัตราของงานที่เพิ่มขึ้นจากความดัน p ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[up - \left(up + \frac{\partial(up)}{\partial x}dx\right)\right]dy = -\frac{\partial(up)}{\partial x}dxdy$$

อัตราของงานที่เพิ่มขึ้นจากความเค้นตั้งฉาก τ_{xx} ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[u\tau_{xx} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}dx\right]dy - u\tau_{xx}dy = -\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}dxdy$$

และอัตราของงานที่เพิ่มขึ้นจากความเค้นเฉือน τ_{yx} ที่กระทำบนด้าน dx ในทิศแกน x คือ

$$\left[u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dy\right]dx - u\tau_{yx}dx = -\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dxdy$$

ในทำนองเดียวกัน อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆที่กระทำบนก้อนมวลในทิศแกน y ก็สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้เช่นกัน ก่อให้เกิดอัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ บนก้อนมวลนี้คือ

$$C = \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y}\right) + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}\right]dxdy + \rho\vec{f}.\vec{V}dxdy$$

สำหรับพจน์ B ซึ่งแทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลนั้น และจากภาพที่ 2.9 ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน x และผ่านขอบ dy ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาของก้อนมวลนั้นคือ

$$\left[q_x - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)\right]dy = -\frac{\partial q_x}{\partial x}dxdy$$

ในทำนองเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน y ผ่านขอบ dx ทั้งทางด้านล่างและด้านบนของก้อนมวลนั้นคือ

$$\left[q_y - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)\right]dx = -\frac{\partial q_y}{\partial y}dxdy$$

ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์ความร้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นบนก้อนมวลนี้คือ

$$B=\left[-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}\right]dxdy \tag{2.30}$$

แต่กฎของฟูริเยอร์ (Fourier's law) ปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_x และ q_y นั้นแปรผันขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) ดังนี้

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x}, q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.31}$$

โดยที่ k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal conductivity) ของของไหล ดังนั้น พจน์ B จึงกลายมาเป็น

$$B=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]dxdy \tag{2.32}$$

ส่วนพจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลอันประกอบด้วยพลังงานภายใน (Internal energy) ซึ่งเกิดการเคลื่อนไหวของโมเลกุลภายในของไหลนั้น และพลังงานจลน์ (Kinetic energy) ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากของไหลนั้นเกิดการไหล หาก e แทนพลังงานภายใน และ $V^2/2$ คือพลังงานจลน์ที่ก้อนมวลนั้นไหลด้วยความเร็ว V ดังนั้น พลังงานรวม (Total energy) คือ $e+V^2/2$ ซึ่งมีหน่วยต่อหนึ่งหน่วยมวลเนื่องจากปริมาณมวลทั้งหมดของก้อนมวลคือนี้ $\rho(dxdy)$ ดังนั้น พจน์ A ซึ่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลนี้คือ

$$A=\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)dxdy \tag{2.33}$$

ทำการแทน พจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจากสมการ (2.33)

พจน์ B ซึ่งแทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลจากสมการ (2.32)

พจน์ C ซึ่งแทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนมวลจากสมการ (2.29)

ลงในสมการ (2.28) แล้วหารตลอดด้วย $dxdy$ ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน ดังนี้

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V} \tag{2.34}$$

หากกำหนดให้ ε แทนพลังงานรวม (Tonal energy) ซึ่งประกอบไปด้วยพลังงานภายใน e และพลังงาน $V^2/2$ ดังนี้

$$\varepsilon=e+\frac{V^2}{2}=e+\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{2} \tag{2.35}$$

สำหรับพจน์ทางด้านขวาของสมการ (2.34) นี้ประกอยด้วยความเค้นตั้งฉาก τ_{xx}, τ_{yy} และความเค้นเฉือน τ_{yx} ซึ่งมีค่าเท่ากับ τ_{xy} ค่าความเค้นย่อยเหล่านี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าความหนืด μ และความเร็ว u และ v สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียนตามสมการ (2.17) –(2.19) เนื่องจากค่าความดัน p จัดเป็นความเค้นตั้งฉากชนิดหนึ่ง ดังนั้น สมการ (2.34) จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่กะทัดรัดได้หากกำหนดความเคนตั้งฉากรวมดังนี้

$$\bar{\tau}_{xx} = \tau_{xx} - p = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - p \tag{2.36}$$

$$\bar{\tau}_{yy} = \tau_{yy} - p = 2\mu\frac{\partial v}{\partial x} - p \tag{2.37}$$

และ

$$\bar{\tau}_{yx} = \tau_{xy} = \mu\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] \tag{2.38}$$

โดยเฉพาะในกรณีของไหลแบบไม่อัดตัวภายใต้สถานะอยู่ตัว เมื่อแทนความเค้นตั้งฉากรวมแล้ว $\bar{\tau}_{xx}, \bar{\tau}_{yy}$ แล้วสมการอนุรักษ์พลังงาน (2.34) จะลดรูปลงเป็น

$$\rho\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial(u\bar{\tau}_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\bar{\tau}_{yy})}{\partial y} + \rho\vec{f}\cdot\vec{V} \tag{2.39}$$

พิจารณาพจน์แรกของสมการ (2.39)

$$\rho\frac{D\varepsilon}{Dt} = \rho\left(u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)$$

ในการไหลแบบไม่อัดตัวภายใต้สถานะอยู่ตัวนั้น จึงสามารถอยู่ได้ดังนี้

$$\rho\frac{D\varepsilon}{Dt} = \rho\left(u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) \tag{2.40}$$

แทนค่าสมการ (2.40) ลงในสมการ (2.39) จะได้

$$\rho\left(u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial(u\bar{\tau}_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\bar{\tau}_{yy})}{\partial y} + \rho\vec{f}\cdot\vec{V} \tag{2.41}$$

ทำการแทนพลังงานรวมในรูปแบบของพลังงานภายใน e และพลังงานจลน์ $V^2/2$ จากสมการ (2.35) ลงทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.41) จะได้

$$\rho\left[u\frac{\partial}{\partial x}\left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial(u\bar{\tau}_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\bar{\tau}_{yy})}{\partial y}+\rho\vec{f}.\vec{V} \tag{2.42}$$

ทำการกระจายพจน์ต่าง ๆ ทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.42) นี้ออกมา จะได้

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right)+\rho u\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\rho v\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$+u\frac{\partial\bar{\tau}_{xx}}{\partial x}+\bar{\tau}_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$+v\frac{\partial\bar{\tau}_{yy}}{\partial y}+\vec{\tau}_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\rho\vec{f}_x u+\rho\vec{f}_y v \tag{2.43}$$

จากนั้นทำการย้ายข้างและจัดพจน์ต่าง ๆ ในสมการ (2.43) นี้ให้เหมาะสมดังนี้

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right)+u\left[\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial\bar{\tau}_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}-\rho\vec{f}_x\right]$$

$$+v\left[\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial\bar{\tau}_{yy}}{\partial y}-\rho\vec{f}_y\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\bar{\tau}_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\bar{\tau}_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.44}$$

ผลรวมของพจน์ต่าง ๆ ในวงเล็บสี่เหลี่ยมแรกและสี่เหลี่ยมที่สองทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.52) นี้ ต่างมีค่าเท่ากับศูนย์ซึ่งสอดคล้องกับสมการอนุรักษ์โมเมนตัม (2.15) และ (2.16) ตามลำดับ ส่วนค่าความเค้นต่าง ๆ ทางด้านขวามือของสมการ (2.44) นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเร็วสำหรับของไหลแบบนิวโทเนียนตามสมการ (2.36) - (2.38) เป็นผลให้สมการ (2.44) กลายมาเป็น

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-p\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2-p\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.45}$$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับความดัน p ทางด้านขวามือของสมการ (2.45) จำนวนสองพจน์นี้เมื่อรวมกันแล้วมีค่าเท่ากับศูนย์สอดคล้องตามสมการเชิงอนุรักษ์มวล (2.6) ที่ว่า $\partial u/\partial x+\partial v/\partial y=0$ ดังนั้น สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน (2.45) จึงสามารถลดรูปได้เป็น

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\phi \tag{2.46}$$

โดย ϕ แทนฟังก์ชันการกระจายความหนืด (Viscous dissipation function) ดังนั้น

$$\phi=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

พจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการ (2.46) แทนการกระจายของพลังงานความหนืดซึ่งเป็นอัตราการสูญเสียพลังงานกล (Mechanical energy) ในการเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อน (Thermal energy) อันเนื่องมาจากผลของความหนืดของของไหล สำหรับการไหลที่มีความเร็วค่อนข้างต่ำนั้น การเปลี่ยนแปลงรูปแบบของพลังงานเนื่องมาจากพจน์การกระจายความหนืดนี้มีค่าน้อยซึ่งอาจละทิ้งได้ เป็นผลให้สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานลดรูปลงสู่รูปแบบที่กะทัดรัดมากยิ่งขึ้น ดังนี้

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (2.47)$$

และค่าพลังงานภายใน e อาจมสมมุติให้แปรผันตามไปกับค่าของอุณหภูมิ T ดังนี้

$$e=c_pT$$

โดย c_p แทนความร้อนจำเพาะของของไหลที่มีปริมาณคงตัว (Specific heat at constant volume) และหากกำหนดให้ความร้อนจำเพาะนี้มีค่าคงที่แล้ว สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานคือ

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (2.48)$$

จัดรูปสมการ (2.48) จะทำให้ได้สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานกลายมาเป็น

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{k}{pc_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \qquad (2.49)$$

และเนื่องจาก $\frac{k}{\rho c_p}=\alpha$ ดังนั้น สมการ (2.49) จะทำให้ได้สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานที่อยู่ในรูปดังนี้

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

1.4 ฟังก์ชันสายธาร (Steam function) สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัว

สำหรับการไหลที่ถูกสมมุติว่าไม่อัดตัวเมื่อค่าความหนาแน่น ρ ของของไหลนั้นมีค่าคงที่ จากสมการอนุรักษ์มวลนั่นคือ

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (2.50)$$

ในที่นี้ กำหนดให้ฟังก์ชันสายธาร $\psi(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์อันดับสองของ $\psi(x,y)$ ต่อเนื่องด้วย และทำให้

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (2.51)$$

ในกรณีที่มีการไหลแบบไม่หมุนเวียนแบบสองมิติ

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

และ
$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{2.52}$$

แทนค่า

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=0$$

นั่นคือ
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0$$

หรือ
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0 \tag{2.53}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{2.54}$$

2.5 พารามิเตอร์แบบไร้มิติ

2.5.1 เลขพรันเทิล (Prandtl number)

เลขพรันเทิลเป็นพารามิเตอร์ไร้มิติ ซึ่งเป็นตัวบ่งบอกถึงความสามารถของของไหลในการกระจายโมเมนตัม (Momentum diffiusivity) ในของไหลเมื่อเทียบกับการกระจายความร้อน (Thermal diffusivity) ในของเหลวสมการ ดังนี้

$$\mathrm{Pr}=\frac{v}{a}=\frac{\mu c_p}{k} \tag{2.55}$$

เมื่อ v แทน ความหนืดเชิงจลศาสตร์ (Viscous diffusion rate)| $v=\mu/\rho\left(m/s^2\right)$

a แทน การแพร่ของความร้อน (Thermsl diffusion rate)| $a=k/\rho c_p\left(m/s^2\right)$

μ แทน ความหนืดเชิงพลศาสตร์ (Pas)

c_p แทน ความจุความร้อนจำเพาะ (J/Kg)

k แทน การนำความร้อน (W/mK)

ρ แทน ความหนาแน่น (Kg/m^3)

2.5.2 เลขเรย์เล (Rayleitgh number)

เลขเรย์เลแสดงอัตราส่วนของแรงรอยตัวเนื่องจากอุณหภูมิต่อแรงความหนืดในของไหลดังนี้

$$Ra=\frac{g\beta(T_h-T_c)L^3}{v\alpha} \tag{2.56}$$

เมื่อ L แทน ความกว้างหรือความยาวของปัญหา

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 เปลี่ยนตัวแปรของสมการแบบมีมิติให้อยู่ในรูปสมการแบบไร้มิติ

ในการวิเคราะห์ลักษณะปัญหาการไหลโดยทั่วไปนั้น เราจำเป็นต้องเริ่มจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่แสดงถึงการอนุรักษ์มวล, การอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และการอนุรักษ์พลังงานเป็นต้น ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ประกอบด้วยสมการทั้งหมด 4 สมการ สำหรับปัญหาการศึกษาในงานวิจัยนี้และโปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยคือ FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ควบคู่กับการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์

3.1.1 การใช้ FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D กับเงื่อนไขสมการนาเวียร์-สโตกส์

สมการนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืดที่อัดตัวไม่ได้ในปัญหา 2 มิติ สมการที่ใช้คือ

สมการของการอนุรักษ์มวล (Conservation of mass)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3.1}$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentums)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{3.2}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+g\beta\left(T-T_c\right) \tag{3.3}$$

สมการอนุรักษ์พลังงาน (Consevation of energy equation)

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{3.4}$$

ฟังก์ชันสายธาร (Steam function)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.5}$$

ศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ (3.1) – (3.5) โดยใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรและกฎลูกโซ่เพื่อเปลี่ยนสมการแบบไร้มิติ โดยใช้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$X=\frac{x}{L},Y=\frac{y}{L},U=\frac{uL}{\alpha},V=\frac{vL}{\alpha},\theta=\frac{T-T_c}{T_h-T_c},P=\frac{pL^2}{\rho\alpha^2}$$

$$P = \frac{pL^2}{\rho\alpha^2}, \Pr = \frac{\upsilon}{\alpha}, Ra = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3 \Pr}{\upsilon^2}, \Psi = \frac{\psi}{\alpha} \tag{3.6}$$

จากสมการอนุรักษ์มวล (3.1) โดยการใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรและกฎลูกโซ่ ด้วยความสัมพันธ์ ดังสมการ (3.6) จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\alpha U}{L}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial U}{\partial X} \tag{3.7}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\alpha V}{L}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{L}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial V}{\partial Y} \tag{3.8}$$

แทนสมการ (3.7) และ (3.8) ลงในสมการ (3.1) จะได้

$$\frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{3.9}$$

หารตลอดทั้งสมการ (3.9) ด้วย $\frac{\alpha}{L^2}$ จะทำให้ได้สมการอนุรักษ์มวลที่อยู่ในรูปแบบไร้มิติ ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{3.10}$$

พิจารณาสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x (3.2)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = u\left(\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\alpha U}{L}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\alpha U}{L}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha^2}{L^3}U\frac{\partial U}{\partial X} \tag{3.11}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$v\frac{\partial u}{\partial y} = v\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\alpha V}{L}\left[\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\alpha U}{L}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{L}\right)\right]$$

$$v\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\alpha^2}{L^3}V\frac{\partial U}{\partial X} \tag{3.12}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}\right)\\&=-\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{P\rho\alpha^2}{L^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{L}\right)\right]\\&=\frac{\rho\alpha^2}{\rho L^3}\frac{\partial P}{\partial X}\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\alpha^2}{L^3}\frac{\partial P}{\partial X} \tag{3.13}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\upsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\&=\upsilon\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial X}{\partial x}\right]\\&=\upsilon\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial U}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{L}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\alpha}{L^3}\upsilon\right)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \tag{3.14}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\upsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=\upsilon\left[\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial Y}{\partial y}\right]\\&=\upsilon\left[\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial U}{\partial Y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{L}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\alpha}{L^3}\upsilon\right)\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \tag{3.15}$$

แทนค่าในสมการ (3.10) – (3.15) ลงในสมการ (3.2) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha^2}{L^3}U\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\alpha^2}{L^3}V\frac{\partial U}{\partial Y}=-\frac{\alpha^2}{L^3}\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{\alpha}{L^3}\upsilon\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) \tag{3.16}$$

หารตลอดทั้งสมการ (3.16) ด้วย $\frac{\alpha^2}{L^3}$ จะได้

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{\upsilon}{\alpha}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) \tag{3.17}$$

เนื่องจาก $\mathrm{Pr}=\frac{\upsilon}{\alpha}$ จะได้สมการกลายเป็น

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial X}+\mathrm{Pr}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) \tag{3.18}$$

สมการ (3.18) คือสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในรูปแบบของสมการไร้มิติแนวแกน X และในทำนองเดียวกันจากสมการ (3.3) จะทำให้ได้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในรูปแบบของสมการแบบไร้มิติในแนวแกน Y ดังนี้

$$U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial Y}+\mathrm{Pr}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right)+Ra\,\mathrm{Pr}\,\theta \tag{3.19}$$

พิจารณาสมการอนุรักษ์พลังงาน (3.4)

$$u\frac{\partial T}{\partial x}=u\left(\frac{\partial T}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\alpha U}{L}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\left(T_h-T_c\right)\theta+T_c\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\alpha}{L^2}U\left(T_h-T_c\right)\frac{\partial \theta}{\partial X} \tag{3.20}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$v\frac{\partial T}{\partial y}=v\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\alpha V}{L}\left[\frac{\partial}{\partial Y}\left(\left(T_h-T_c\right)\theta+T_c\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{L}\right)\right]$$

$$v\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\alpha}{L}V\left(T_h-T_c\right)\frac{\partial \theta}{\partial Y} \tag{3.21}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$=\alpha\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)\frac{\partial X}{\partial x}\right]$$

$$=\alpha\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{T_h-T_c}{L}\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\alpha}{L^2}\left(T_h-T_c\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \tag{3.22}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\alpha\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$= \alpha \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right) \frac{\partial Y}{\partial y} \right]$$

$$= \alpha \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{T_h - T_c}{L} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{L} \right) \right]$$

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\alpha}{L^2} (T_h - T_c) \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \tag{3.23}$$

แทนค่าในสมการ (3.19) – (3.23) ลงในสมการ (3.4) จะได้

$$\frac{\alpha}{L^2} U (T_h - T_c) \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{\alpha}{L^2} V (T_h - T_c) \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\alpha}{L^2} (T_h - T_c) \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\alpha}{L^2} (T_h - T_c) \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \tag{3.24}$$

หารสมการ (3.24) ด้วย $\frac{\alpha}{L^2}(T_h - T_c)$ จะได้สมการอนุรักษ์พลังงานในรูปแบบไร้มิติ ดังนี้

$$U \frac{\partial \theta}{\partial Y} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \tag{3.25}$$

หารด้วยค่า $P = -\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right)$ ลงในสมการ (3.4) และ (3.20)

โดย P คือ พารามิเตอร์เพนนอลตี้ (Penalty parameter) สมการดังกล่าว จึงกลายเป็น

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \gamma \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \Pr \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \tag{3.26}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = \gamma \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \Pr \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + Ra \Pr \theta \tag{3.27}$$

การเคลื่อนที่ของของไหลสามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันสายธาร (Stream function) ψ ดังนี้ พิจารณาจากสมการ (3.5)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (\Psi \alpha) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{L} \right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\alpha}{L} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \tag{3.28}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} (\Psi \alpha) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{L} \right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\alpha}{L} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \tag{3.29}$$

พิจารณา

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\alpha}{L}\frac{\partial \Psi}{\partial X}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \tag{3.30}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\alpha}{L}\frac{\partial \Psi}{\partial Y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{L}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \tag{3.31}$$

พิจารณา

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\alpha U}{L}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{L}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial U}{\partial Y} \tag{3.32}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\alpha V}{L}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial V}{\partial X} \tag{3.33}$$

แทนค่าสมการ (3.28) – (3.33) ลงในสมการ (3.5)

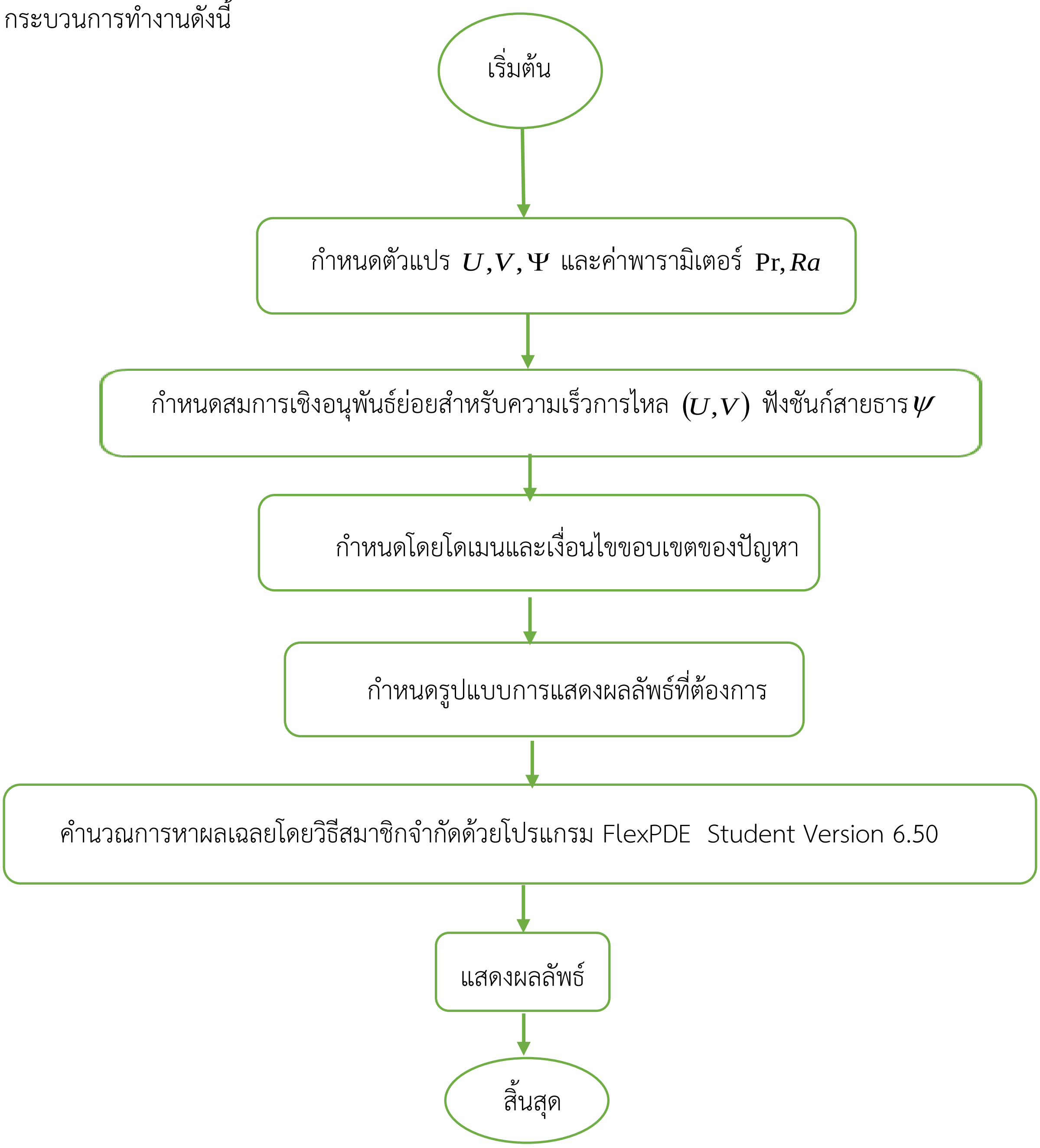
$$\frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = \frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial V}{\partial X} \tag{3.34}$$

หารสมการ (3.34) ด้วย $\frac{\alpha}{L^2}$ จะได้สมการสายธาร ดังนี้

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}=\frac{\partial U}{\partial Y}-\frac{\partial V}{\partial X} \qquad (3.35)$$

3.2. ขั้นตอนการเขียนโปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีสมาชิกจำกัดด้วยโปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D สำหรับแก้ปัญหาการไหลของเหลวแบบธรรมชาติภายใต้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งมีกระบวนการทำงานดังนี้

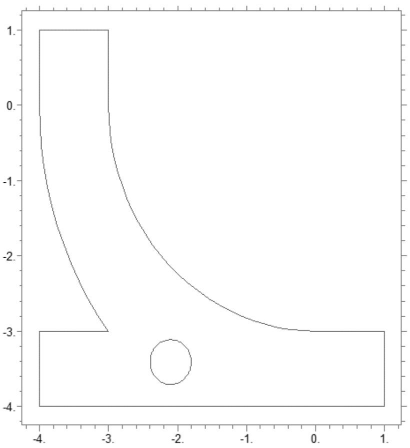


ภาพที่ 3.1 กระบวนการทำงานของโปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D สำหรับการแก้ปัญหาของไหลแบบธรรมชาติ

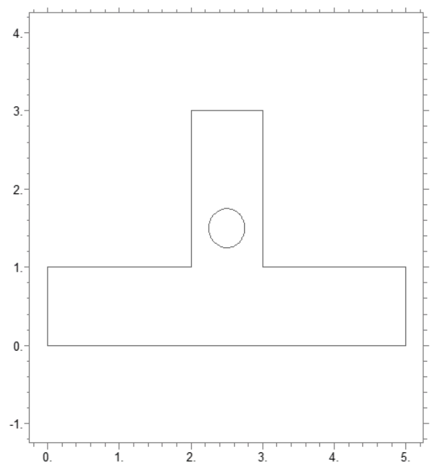
บทที่ 4

ผลการทดลอง

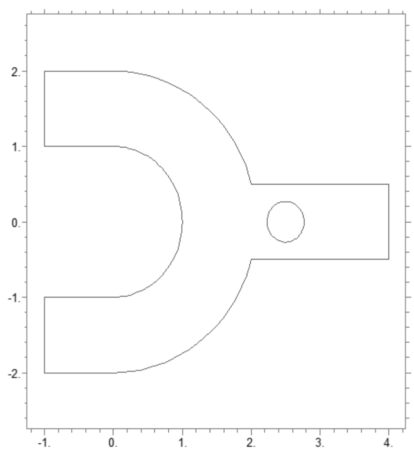
ในบทนี้จะเป็นการวิเคราะห์ผลเฉลยของปัญหาสมการนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งของไหล ไหลในโดเมนที่จำลองของไหลในท่อ โดยใช้โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D วิเคราะห์ความเร็วและการไหลแบบราบเรียบ เมื่อ Ra เป็นค่าคงที่ และค่า $\mathbf{Pr}$ เปลี่ยนไป ตัวอย่างโดเมนที่ใช้ จำลองแบบมาจากของไหลที่ไหลในท่อและมีสิ่งกีดขวาง โดยสิ่งกีดขวางนั้น ของไหลไม่สามารถดูดซึม หรือไหลผ่านได้



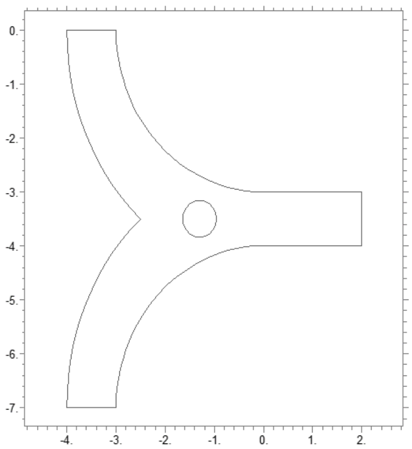
(4.1 ก)



(4.1 ข)



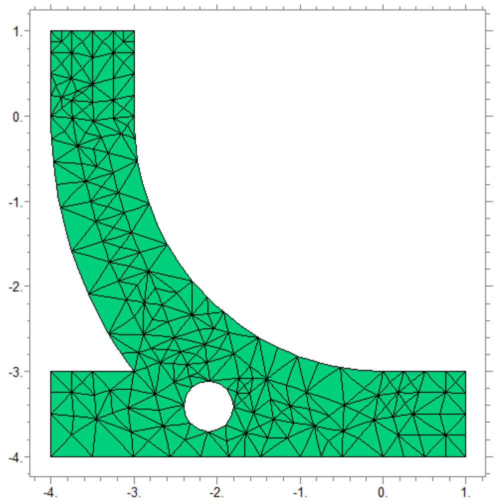
(4.1 ค)



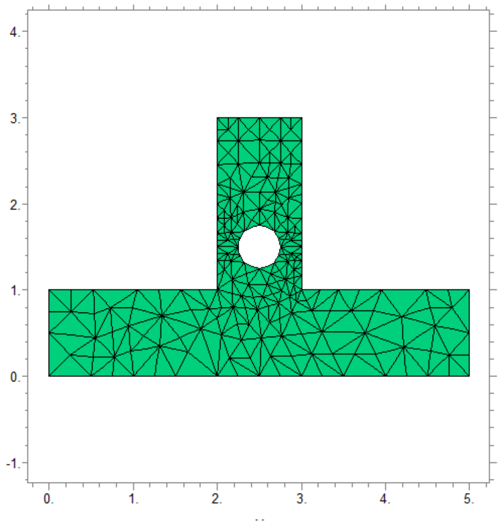
(4.1 ง)

ภาพที่ 4.1 ก – 4.1 ง แสดงโดเมนทั้ง 4 โดเมนที่ใช้ในการศึกษาในงานวิจัย

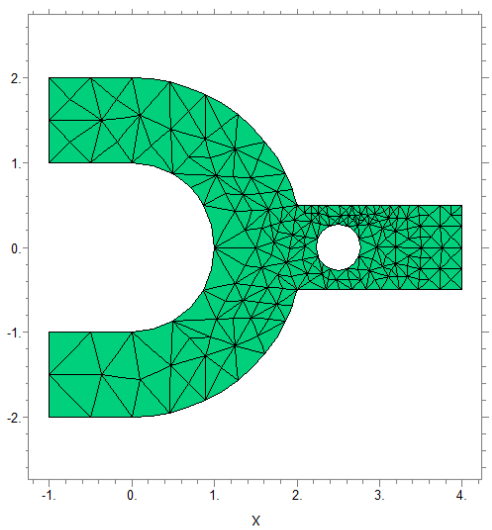
การทดลองนี้ ผู้วิจัยนำเสนอกริด (Grid construction) ของโดเมน เวกเตอร์แสดงทิศทางการไหลความเร็วของของไหลในโดเมน ลักษณะการไหลในโดเมน ภาพต่อไปนี้แสดงการ แบ่งกริดของโดเมนทั้ง 4 ที่แสดงการไหลของน้ำ (Water) , โลหะเหลว (Liquid metal) และน้ำมัน (Oils)



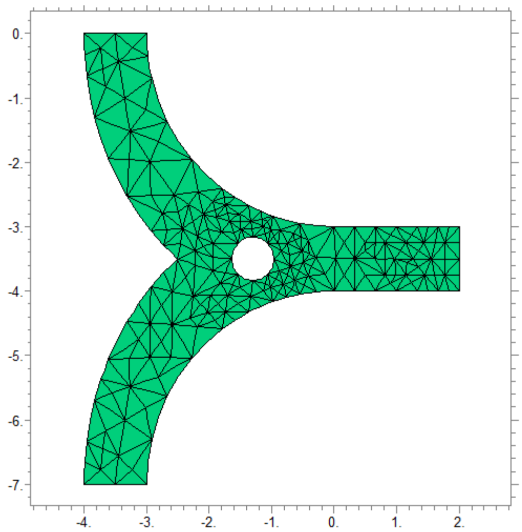
(4.2 ก)



(4.2 ข)



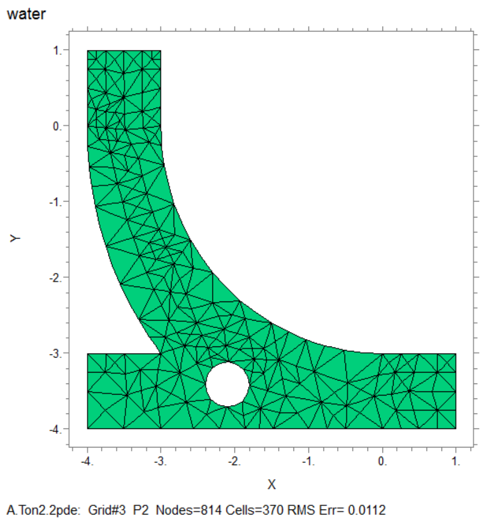
(4.2 ค)



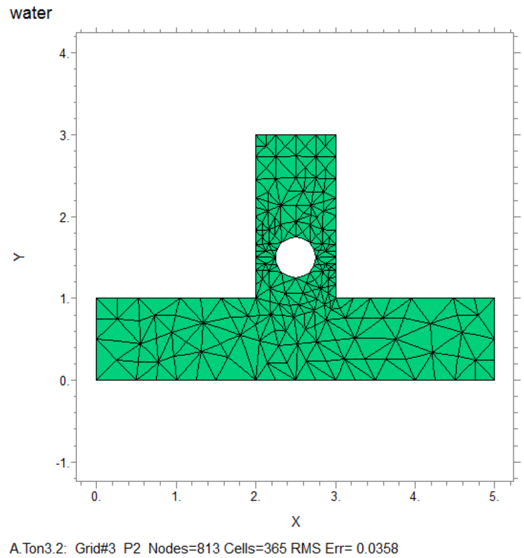
(4.2 ง)

ภาพที่ 4.2 ก - 4.2 ง แสดงการแบ่งกริดของโดเมนที่แสดงการไหลของน้ำ (Water)

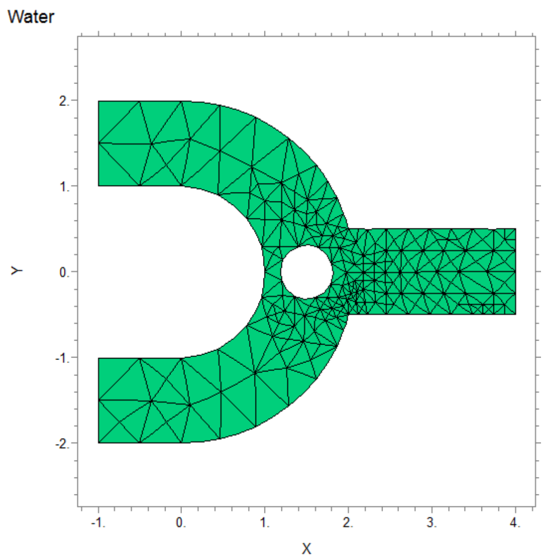
Prandtl = 10 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7}



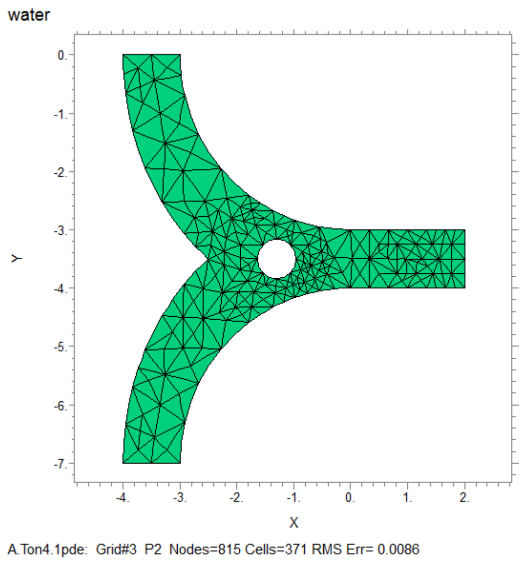
(4.3 ก)



(4.3 ข)

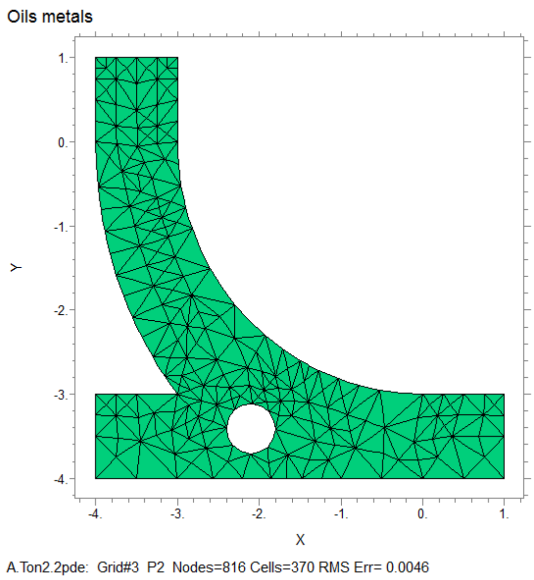


(4.3 ค)

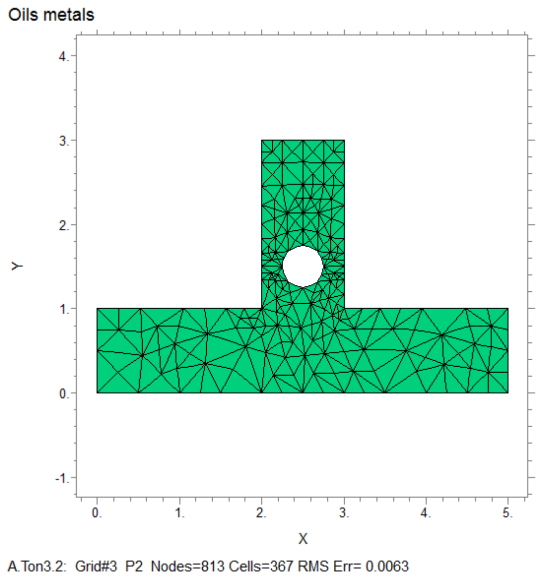


(4.3 ง)

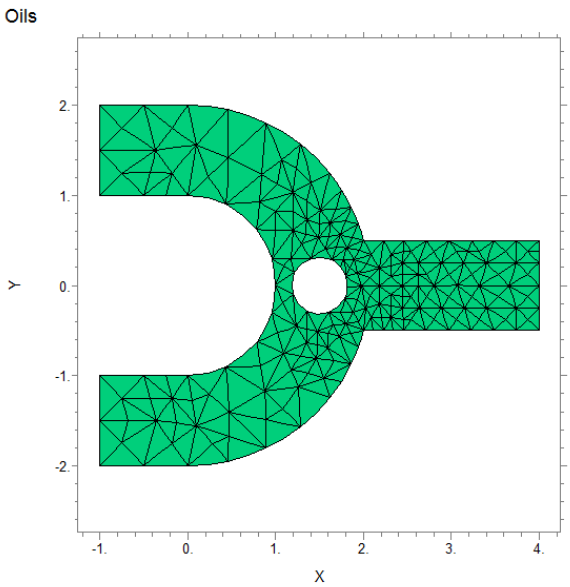
ภาพที่ 4.3 ก - 4.3 ง แสดงการแบ่งกริดของโดเมนที่แสดงการไหลของน้ำ (Water) Prandtl = 5 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7}



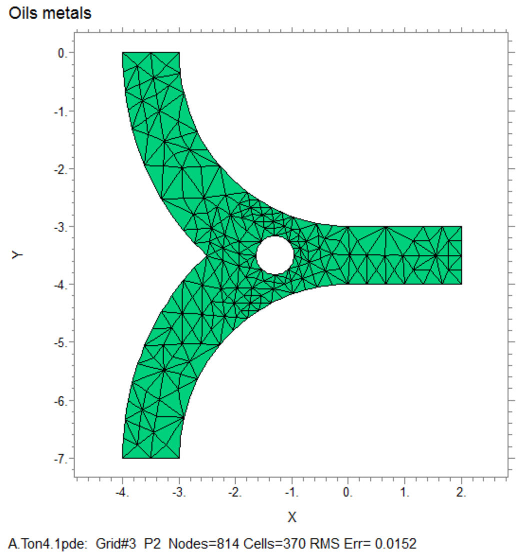
(4.4 ก)



(4.4 ข)

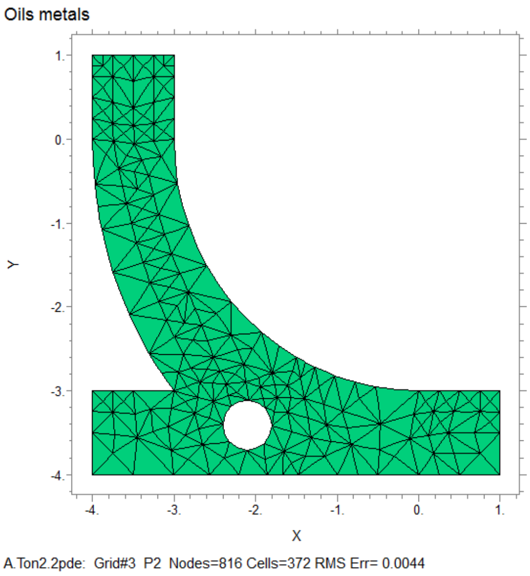


(4.4 ค)

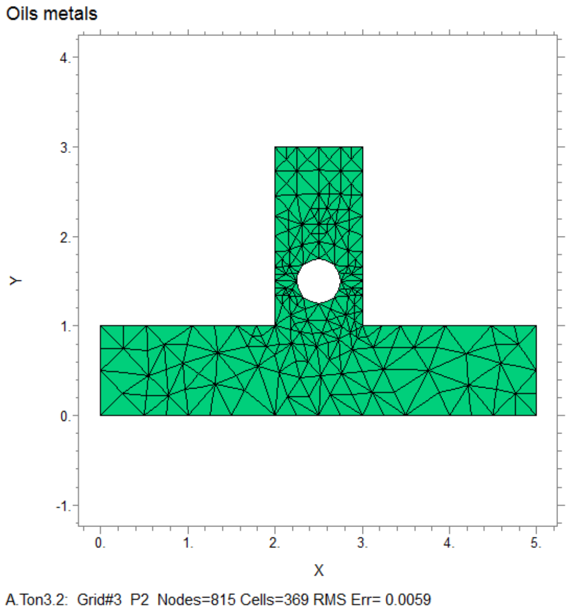


(4.4 ง)

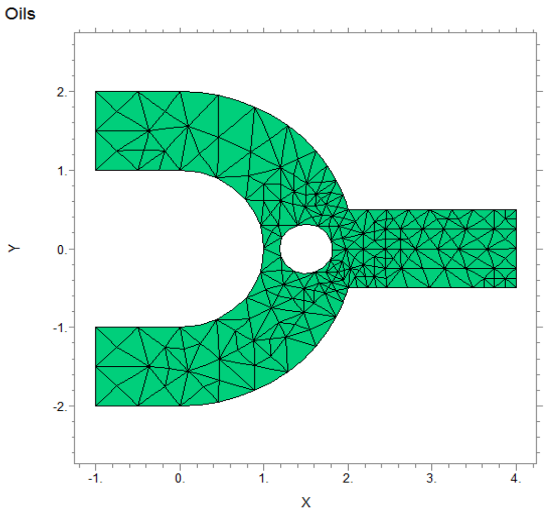
ภาพที่ 4.4 ก - 4.4 ง แสดงการแบ่งกริดของโดเมนที่แสดงการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.3 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7}



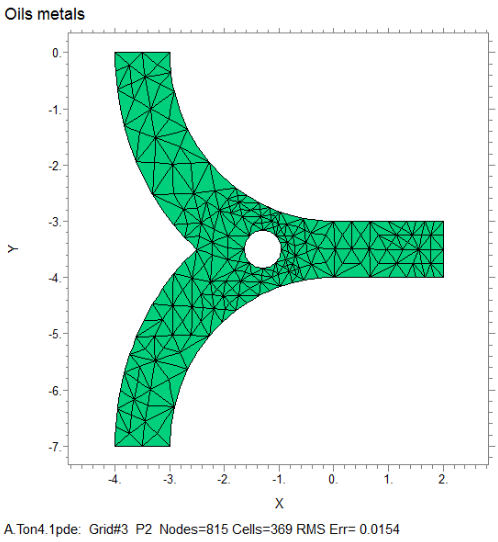
(4.5 ก)



(4.5 ข)

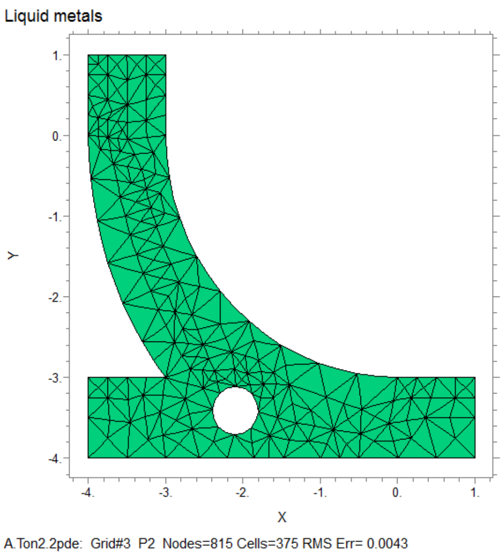


(4.5 ค)

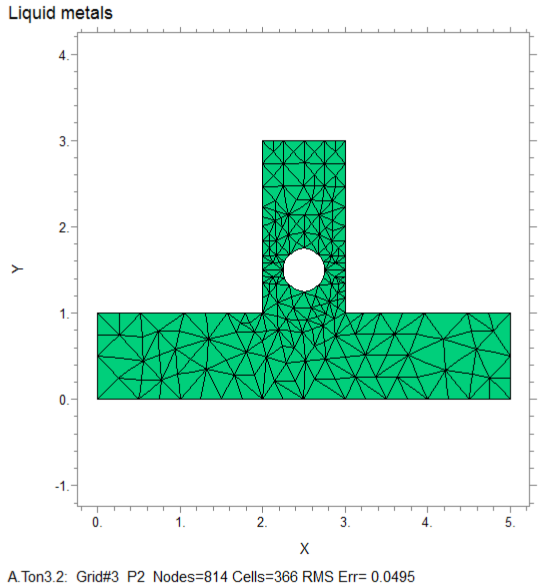


(4.5 ง)

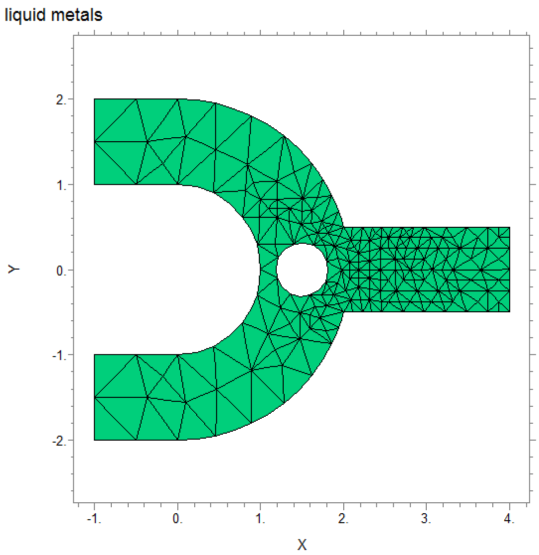
ภาพที่ 4.5 ก - 4.5 ง แสดงการแบ่งกริดของโดเมนที่แสดงการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.2 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7}



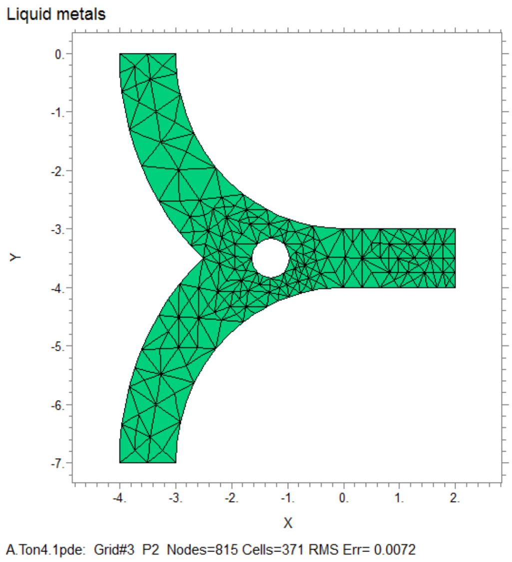
(4.6 ก)



(4.6 ข)



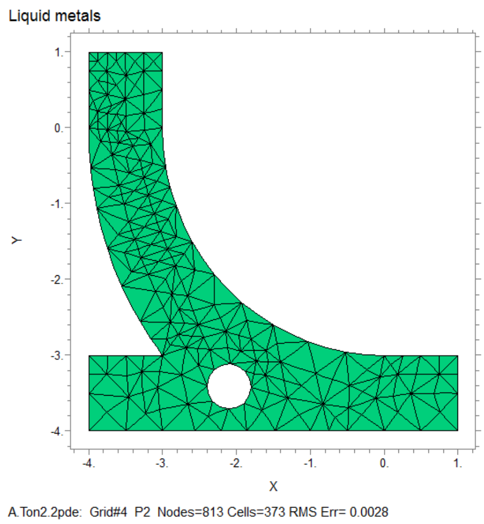
(4.6 ค)



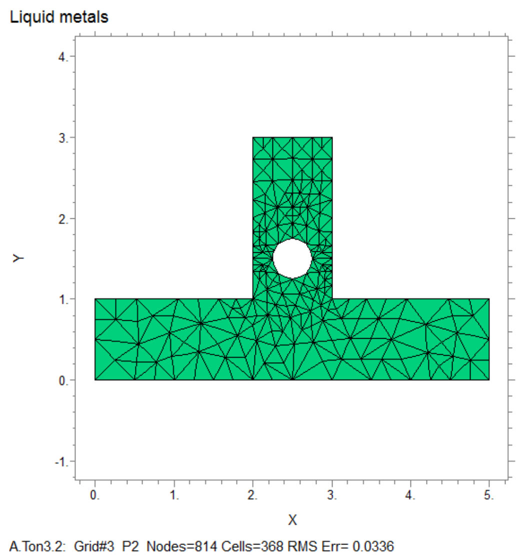
(4.6 ง)

ภาพที่ 4.6 ก - 4.6 ง แสดงการแบ่งกริดของโดเมนที่แสดงการไหลของน้ำมัน (Oils metals)

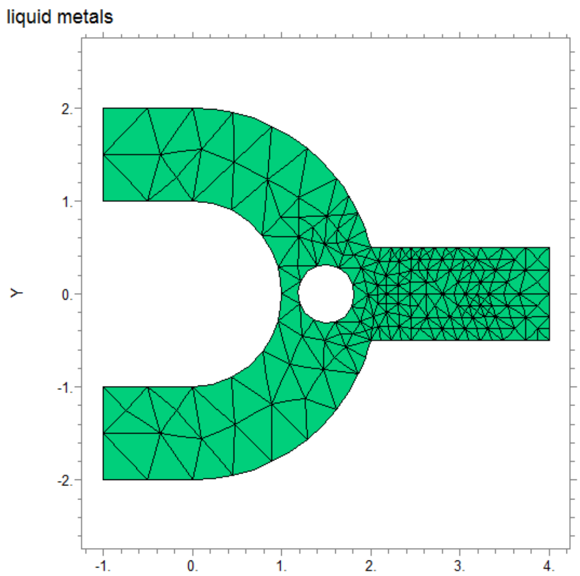
ที่มีค่า Prandtl = 300 และและ ค่า Rayleigh = 10^{-7}



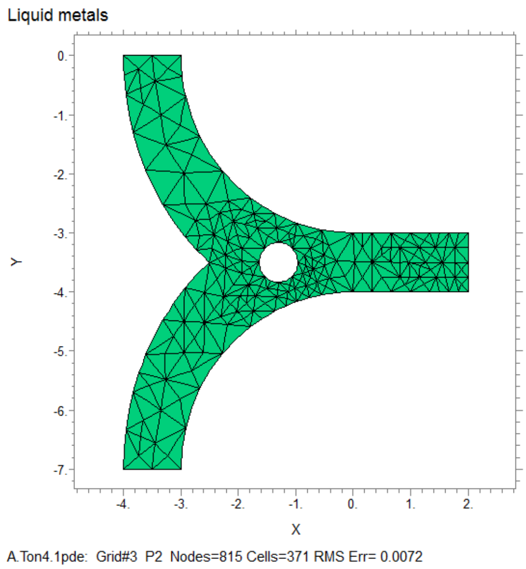
(4.7 ก)



(4.7 ข)



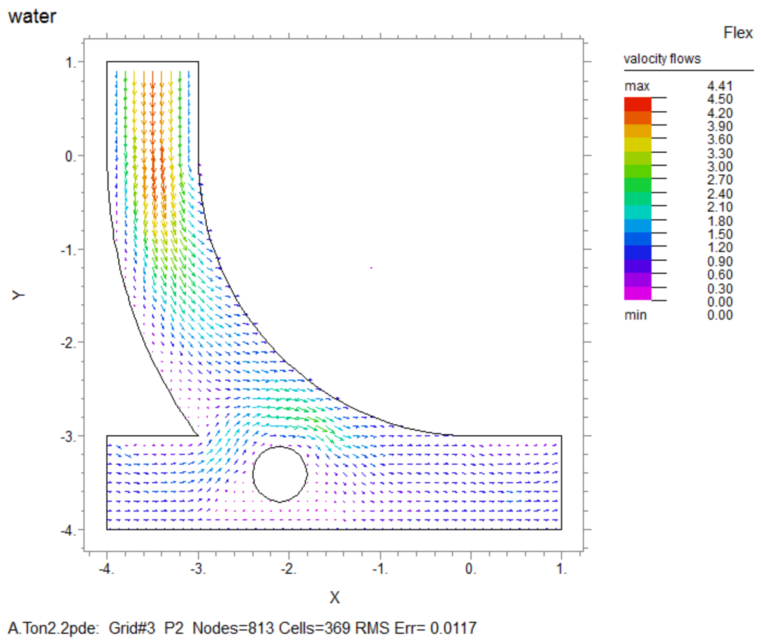
(4.7 ค)



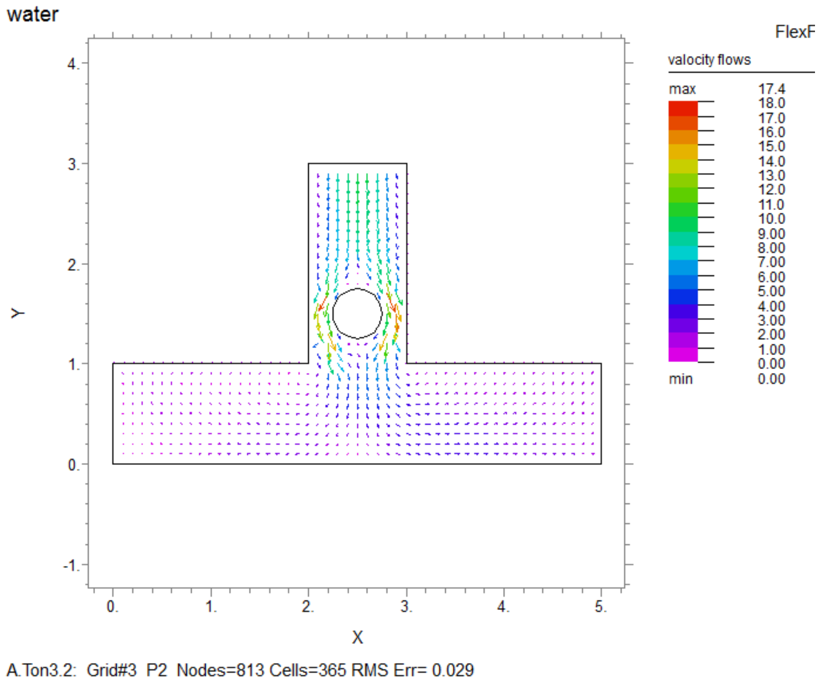
(4.7 ง)

ภาพที่ 4.7 ก - 4.7 ง แสดงการแบ่งกริดของโดเมนที่แสดงการไหลของน้ำมัน (Oils metals) ที่มีค่า Prandtl = 50 และและ ค่า Rayleigh = 10^{-7}

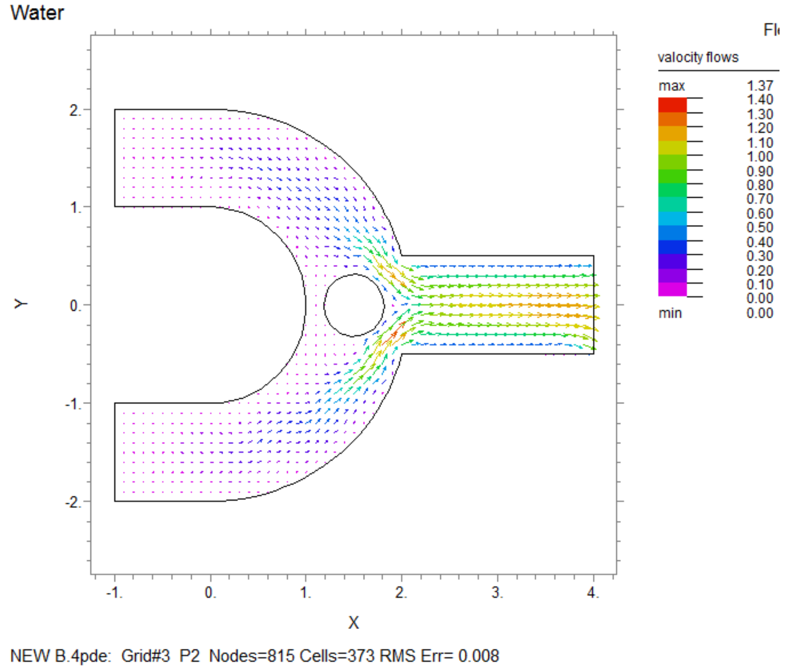
สำหรับการแบ่งกริดพบว่าการแบ่งกริดจะมีความละเอียดตรงบริเวณที่สิ่งกีดขวางในโดเมน ซึ่งภาพดังต่อไปนี้ แสดงให้เห็นลักษณะการไหลของน้ำโดยกำหนด Pr และ Ra คือแรงลอยตัวเนื่องจากอุณหภูมิส่วนด้วยความหนืด เป็นค่าที่ต้องการศึกษาและเปลี่ยนตามความเหมาะสมของแต่ละโดเมน



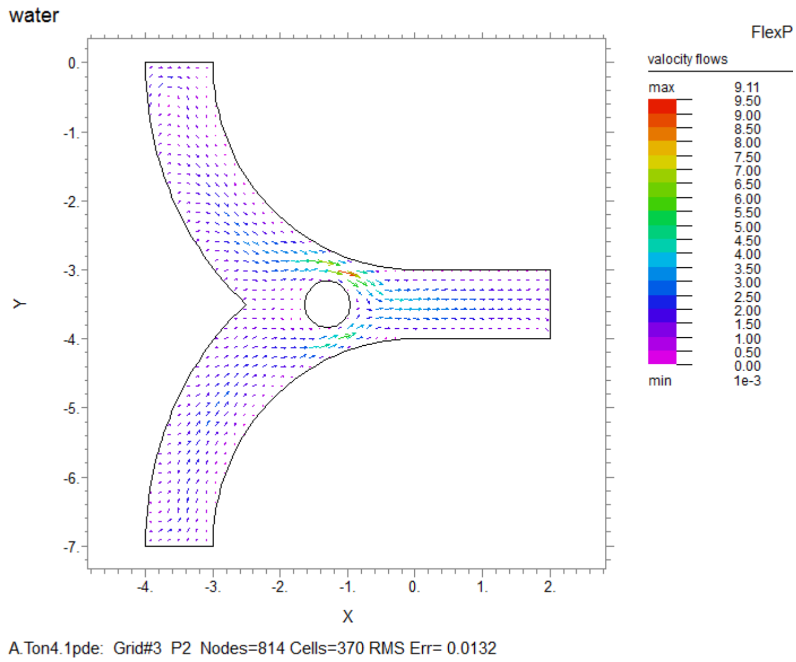
(4.8 ก)



(4.8 ข)

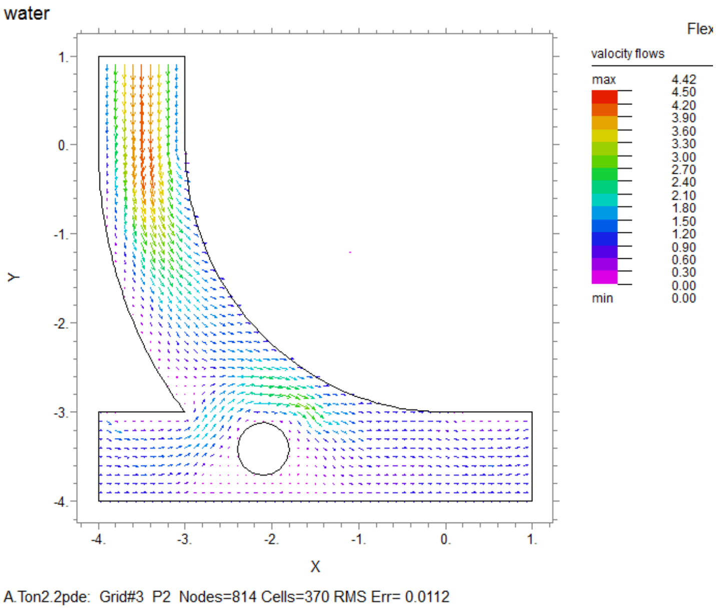


(4.8 ค)

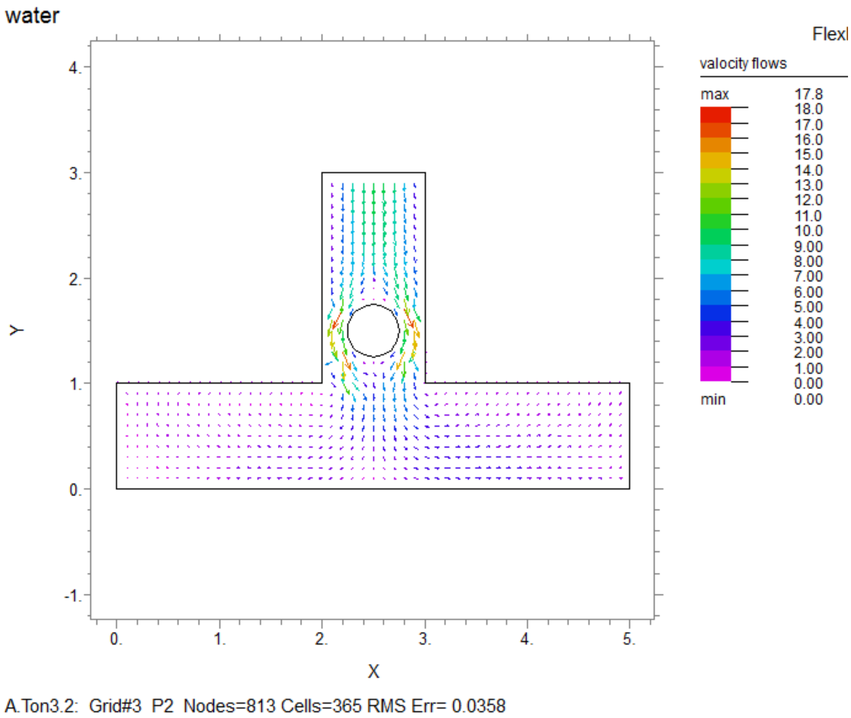


(4.8 ง)

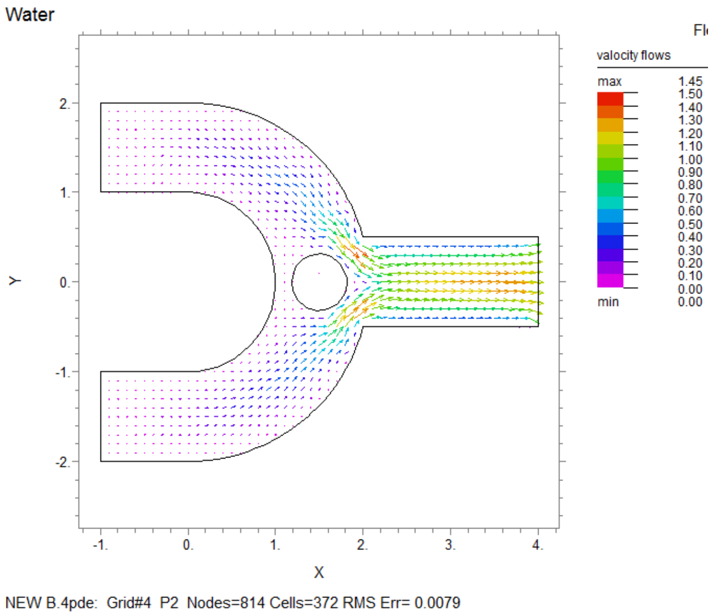
ภาพที่ 4.8 ก - 4.8 ง แสดงเวกเตอร์ทิศทางการไหลของน้ำ (Water) Prandtl = 10 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7}


water
Flex
valocity flows
max 4.42
4.50
4.20
3.90
3.60
3.30
3.00
2.70
2.40
2.10
1.80
1.50
1.20
0.90
0.60
0.30
0.00
min 0.00
Y
X
A.Ton2.2pde: Grid#3 P2 Nodes=814 Cells=370 RMS Err= 0.0112

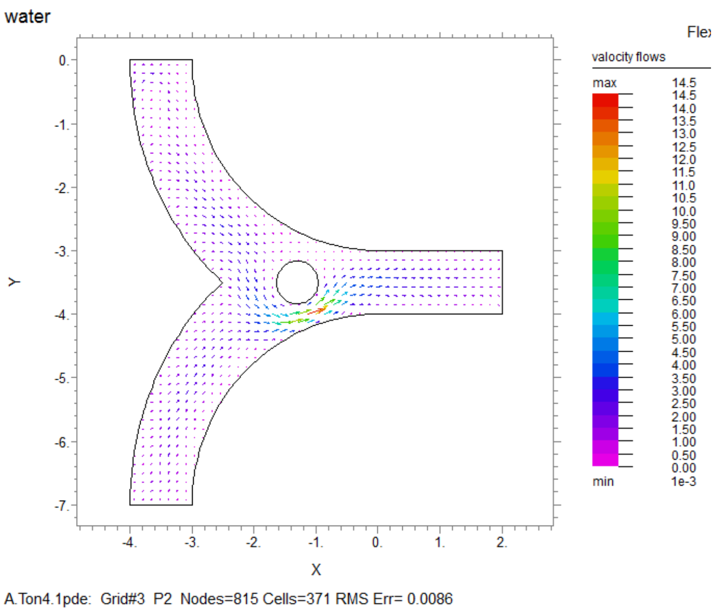
(4.9 ก)


water
Flexl
valocity flows
max 17.8
18.0
17.0
16.0
15.0
14.0
13.0
12.0
11.0
10.0
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
min 0.00
Y
X
A.Ton3.2: Grid#3 P2 Nodes=813 Cells=365 RMS Err= 0.0358

(4.9 ข)

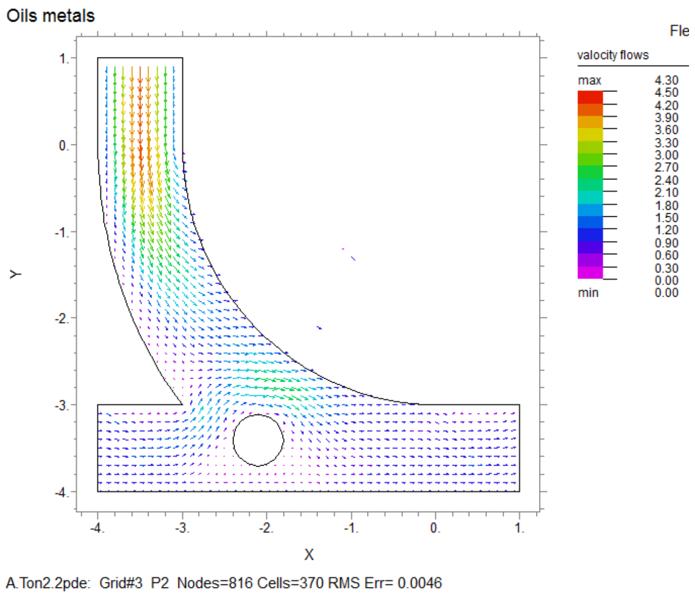


(4.9 ค)

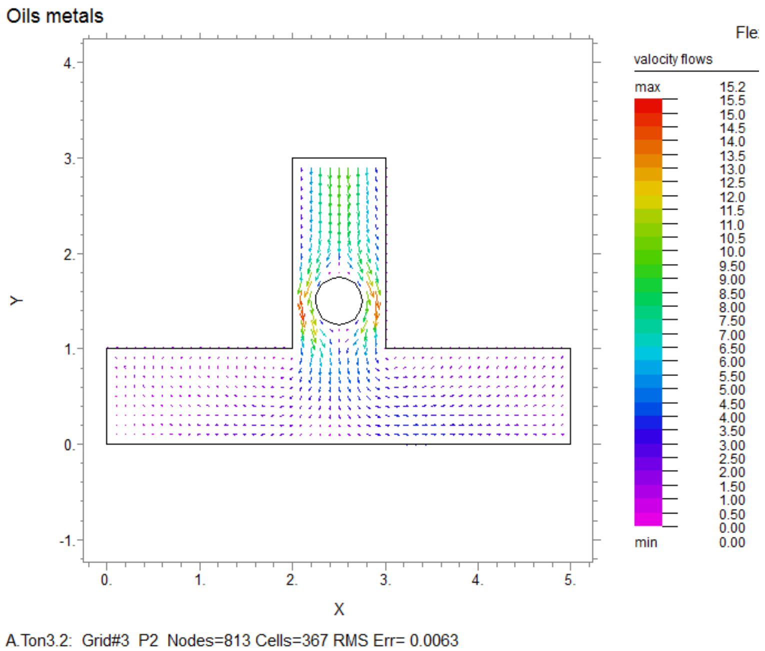


(4.9 ง)

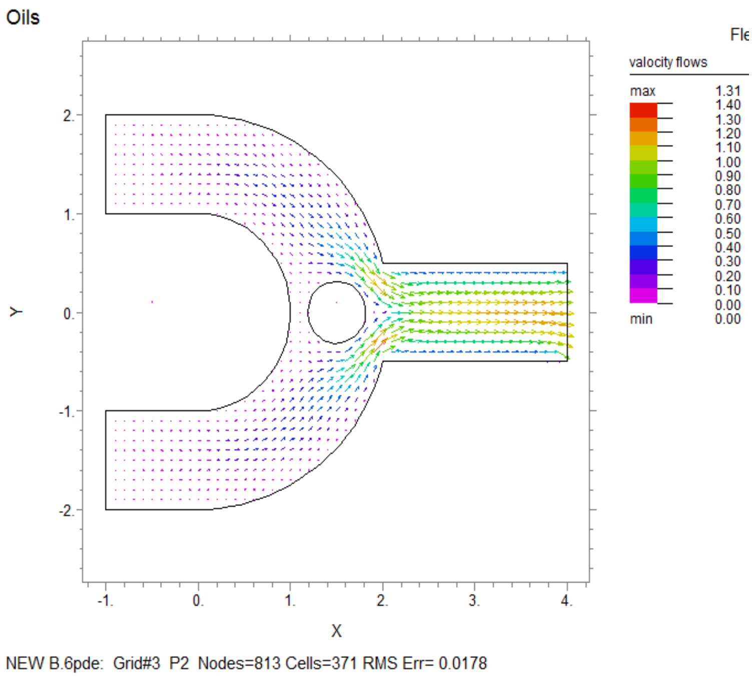
ภาพที่ 4.9 ก - 4.9 ง แสดงเวกเตอร์ทิศทางการไหลของน้ำ (Water) Prandtl = 5 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7}


Oils metals
Fle
valocity flows
max
4.30
4.50
4.20
3.90
3.60
3.30
3.00
2.70
2.40
2.10
1.80
1.50
1.20
0.90
0.60
0.30
0.00
min
0.00
Y
X
A.Ton2.2pde: Grid#3 P2 Nodes=816 Cells=370 RMS Err= 0.0046

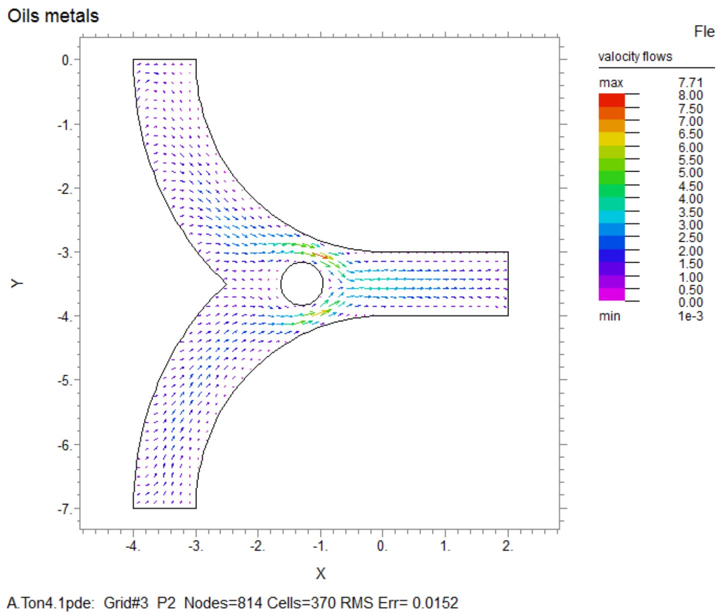
(4.10 ก)


Oils metals
Fle
valocity flows
max
15.2
15.5
15.0
14.5
14.0
13.5
13.0
12.5
12.0
11.5
11.0
10.5
10.0
9.50
9.00
8.50
8.00
7.50
7.00
6.50
6.00
5.50
5.00
4.50
4.00
3.50
3.00
2.50
2.00
1.50
1.00
0.50
0.00
min
0.00
Y
X
A.Ton3.2: Grid#3 P2 Nodes=813 Cells=367 RMS Err= 0.0063

(4.10 ข)



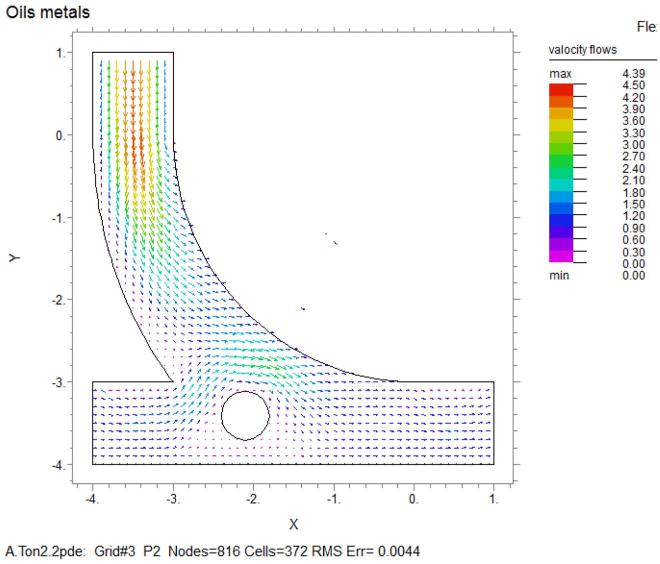
(4.10 ค)



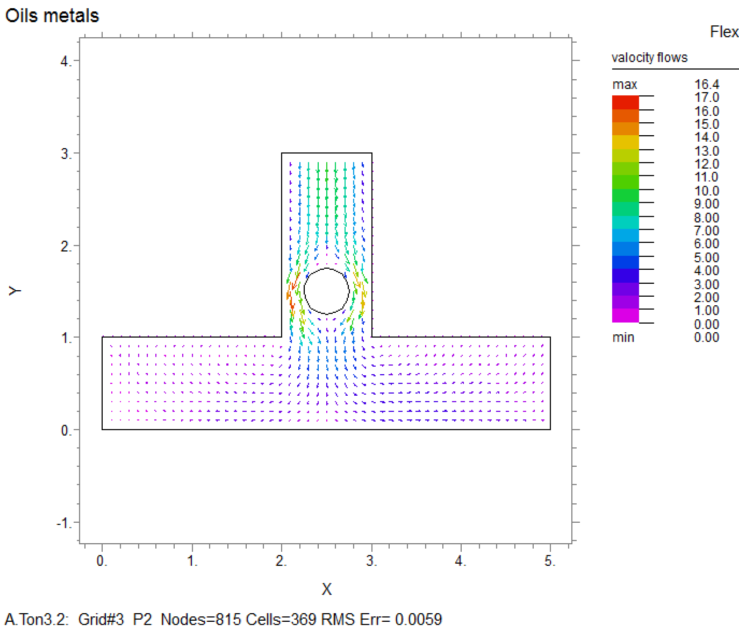
(4.10 ง)

ภาพที่ 4.10 ก - 4.10 ง แสดงการแสดงเวกเตอร์ทิศทางการไหล ของน้ำมัน (Oils metals)

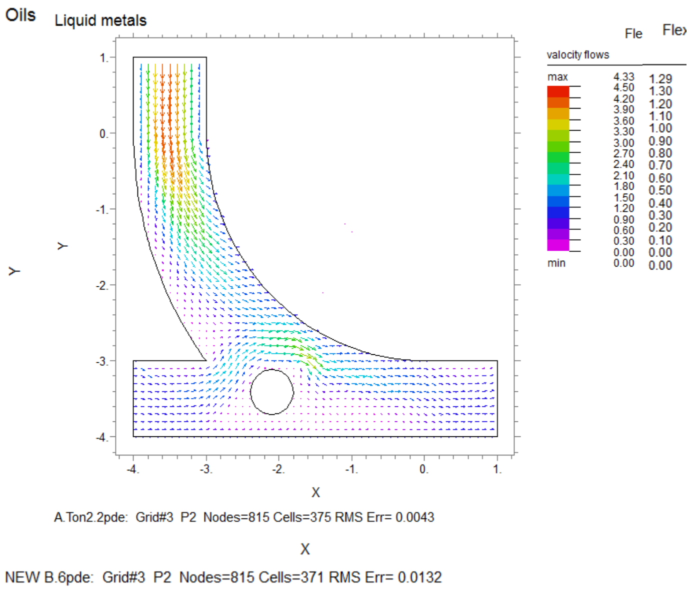
ที่มีค่า Prandtl = 300 และและ ค่า Rayleigh = $\mathbf{10^{-7}}$



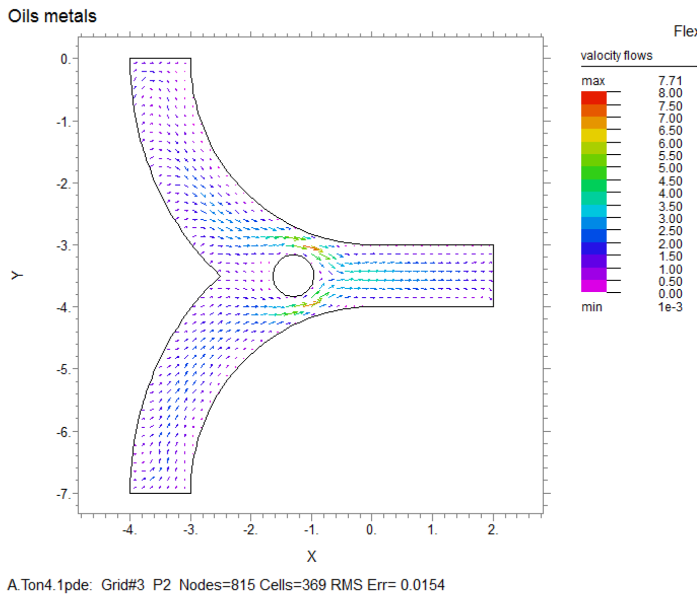
(4.11 ก)



(4.11 ข)

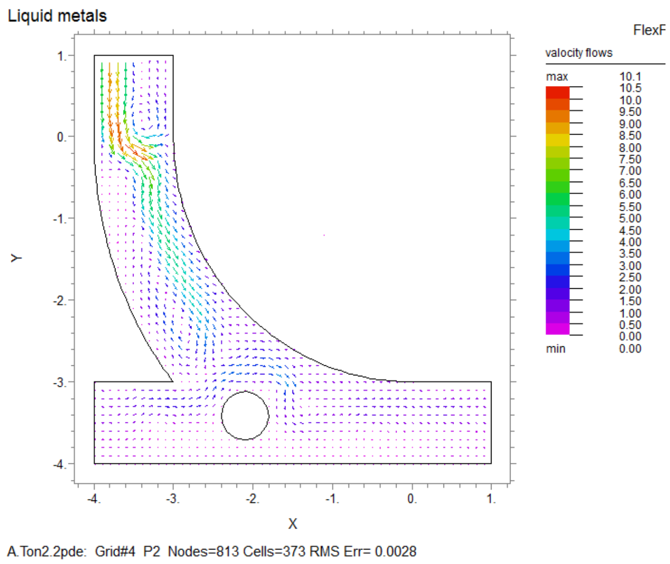


(4.11 ค)

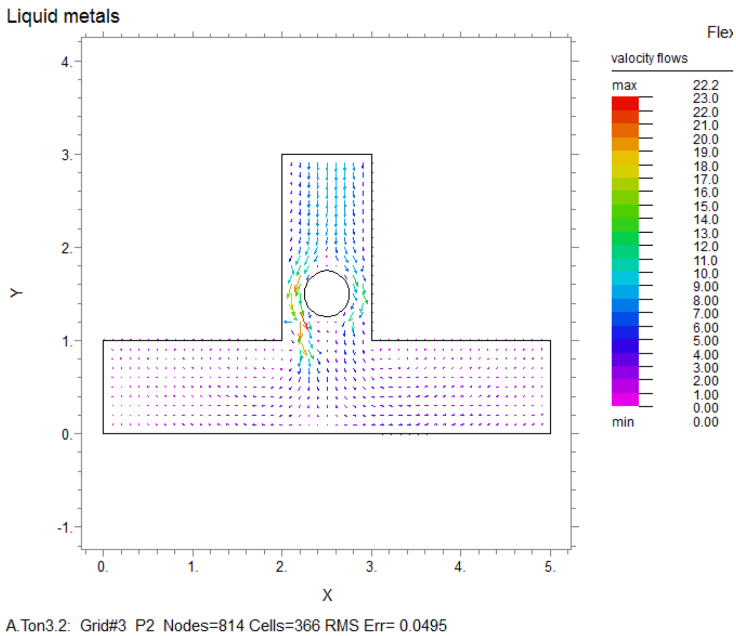


(4.11 ง)

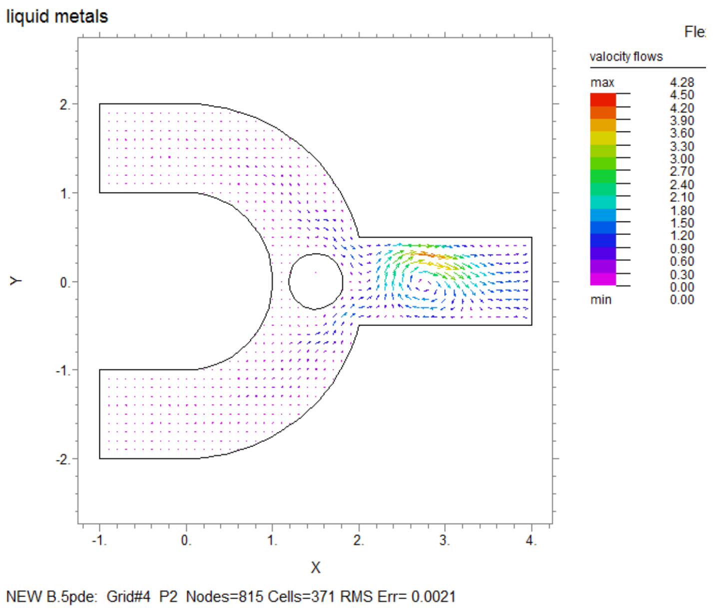
ภาพที่ 4.11 ก - 4.11 ง แสดงการแสดงเวกเตอร์ทิศทางการไหล ของน้ำมัน (Oils metals) ที่มีค่า Prandtl = 50 และและ ค่า Rayleigh = 10^{-7}


Liquid metals
FlexF
valocity flows
max
min
10.1
10.5
10.0
9.50
9.00
8.50
8.00
7.50
7.00
6.50
6.00
5.50
5.00
4.50
4.00
3.50
3.00
2.50
2.00
1.50
1.00
0.50
0.00
0.00
Y
X
A.Ton2.2pde: Grid#4 P2 Nodes=813 Cells=373 RMS Err= 0.0028

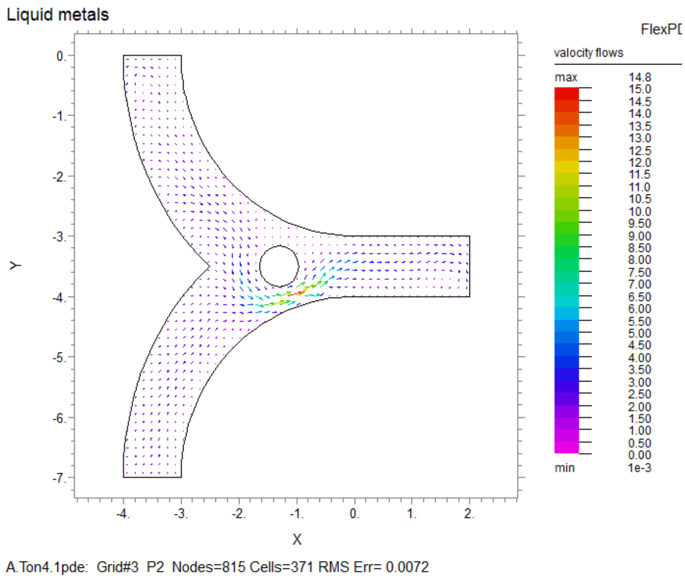
(4.12 ก)


Liquid metals
Flex
valocity flows
max
min
22.2
23.0
22.0
21.0
20.0
19.0
18.0
17.0
16.0
15.0
14.0
13.0
12.0
11.0
10.0
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
0.00
Y
X
A.Ton3.2: Grid#3 P2 Nodes=814 Cells=366 RMS Err= 0.0495

(4.12 ข)

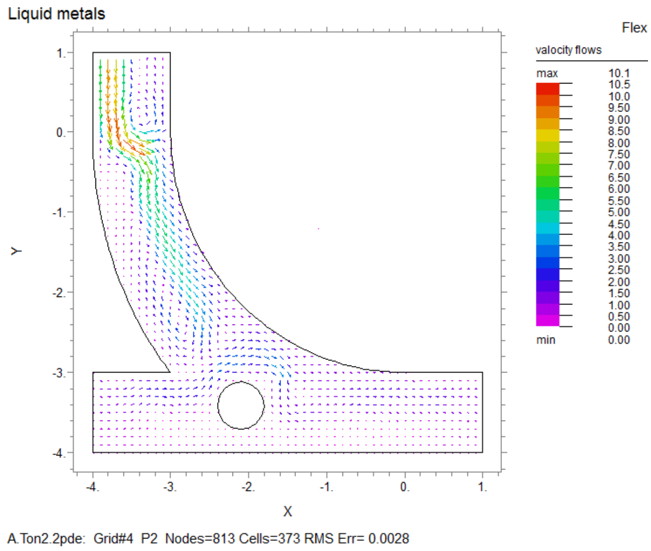


(4.12 ค)

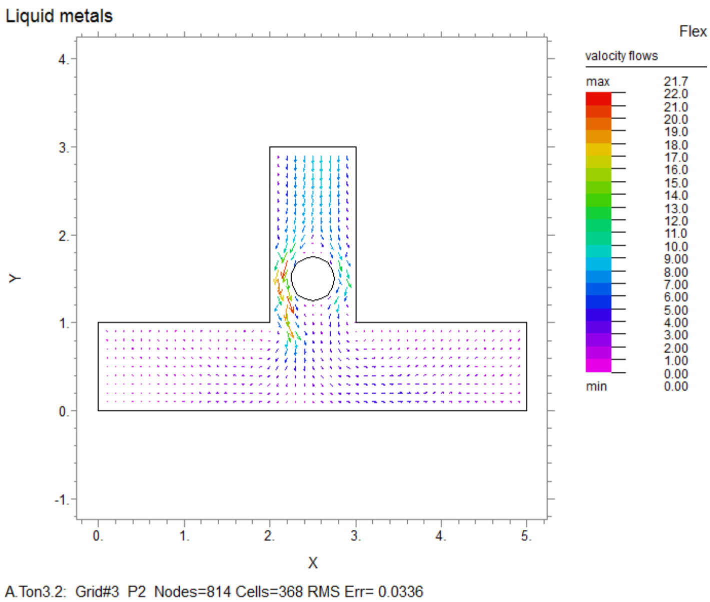


(4.12 ง)

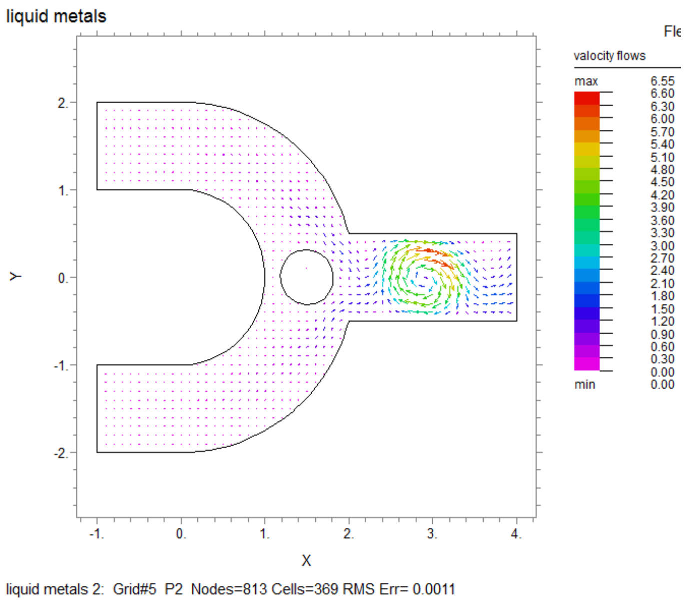
ภาพที่ 4.12 ก - 4.12 ง แสดงเวกเตอร์ทิศทางการไหลของโดเมนของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.3 และและ ค่า Rayleigh = 10^{-7}


Liquid metals
Flex
valocity flows
max
min
10.1
10.5
10.0
9.50
9.00
8.50
8.00
7.50
7.00
6.50
6.00
5.50
5.00
4.50
4.00
3.50
3.00
2.50
2.00
1.50
1.00
0.50
0.00
0.00
Y
X
1.
0.
-1.
-2.
-3.
-4.
-4.
-3.
-2.
-1.
0.
1.
A.Ton2.2pde: Grid#4 P2 Nodes=813 Cells=373 RMS Err= 0.0028

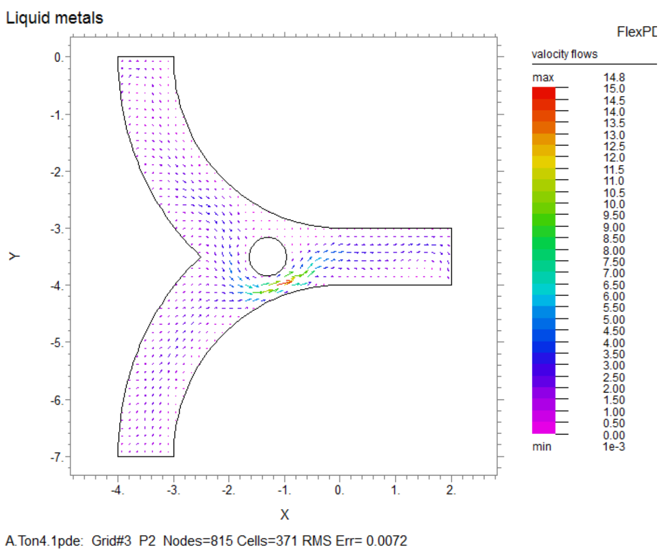
(4.13 ก)


Liquid metals
Flex
valocity flows
max
min
21.7
22.0
21.0
20.0
19.0
18.0
17.0
16.0
15.0
14.0
13.0
12.0
11.0
10.0
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
0.00
Y
X
4.
3.
2.
1.
0.
-1.
0.
1.
2.
3.
4.
5.
A.Ton3.2: Grid#3 P2 Nodes=814 Cells=368 RMS Err= 0.0336

(4.13 ข)



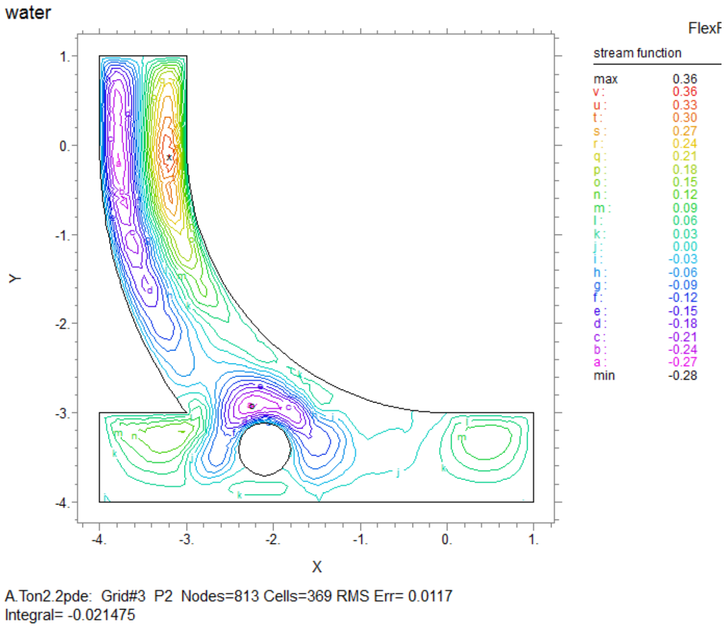
(4.13 ค)



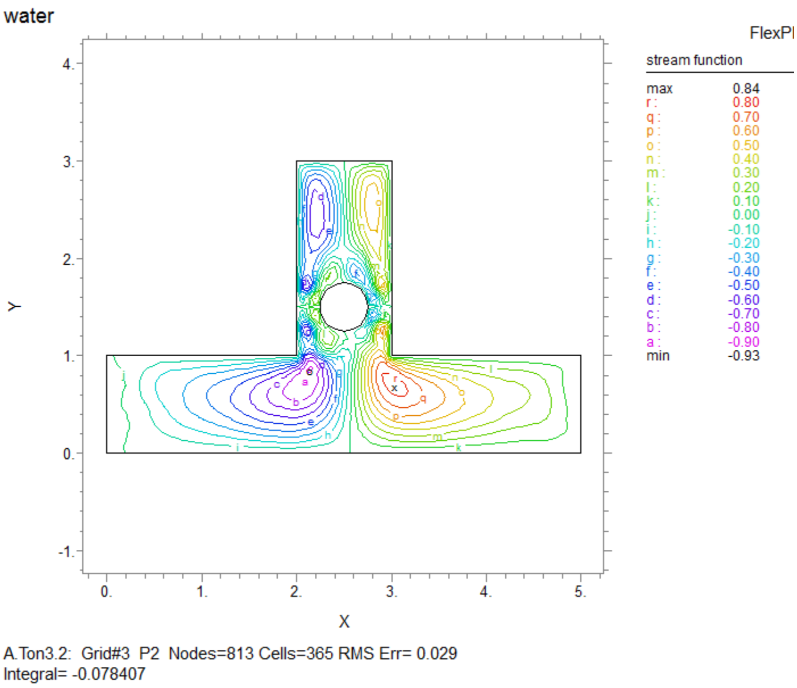
(4.13 ง)

ภาพที่ 4.13 ก - 4.13 ง แสดงเวกเตอร์ทิศทางการไหลของโดเมนของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.2 และและ ค่า Rayleigh = 10^{-7}

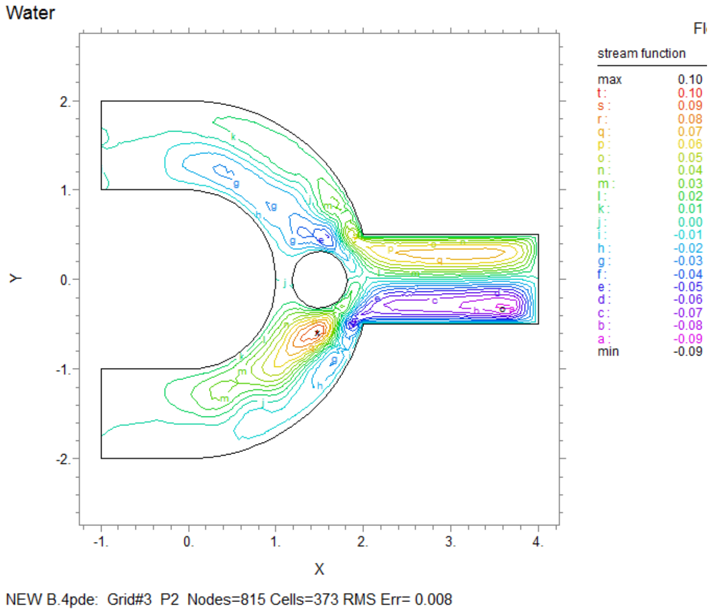
จากโดเมนทั้ง 4 โดเมน แสดงความเร็วของของไหลพบว่าของไหล และ Ra คือแรงลอยตัวด้วย ความหนืดมีความเร็วบริเวณขอบของโดเมนต่ำกว่าส่วนอื่นๆ และบริเวณทางออกจะมีความเร็ว เพิ่มขึ้นสามารถสังเกตได้จากเวกเตอร์ของความเร็วของภาพข้างต้น ต่อไปจะแสดงภาพ Stream function ของของไหล



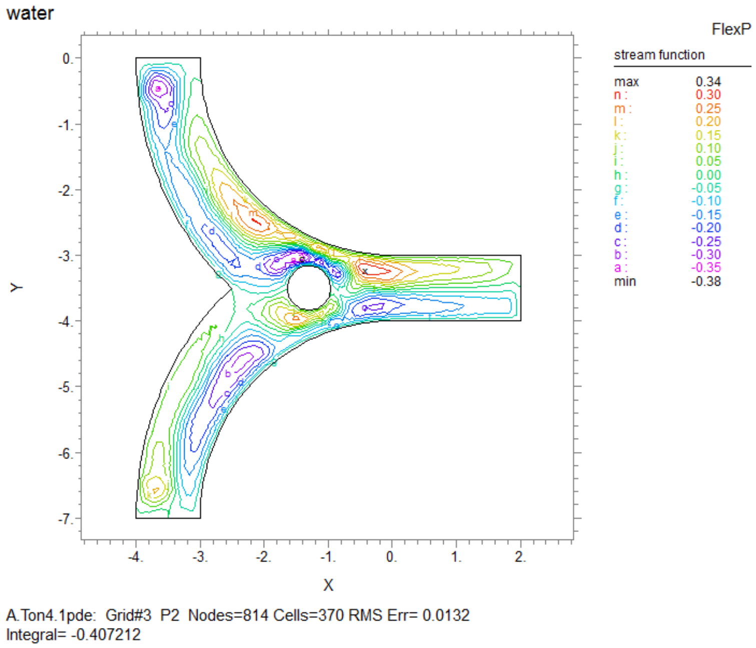
(4.14 ก)



(4.14 ข)

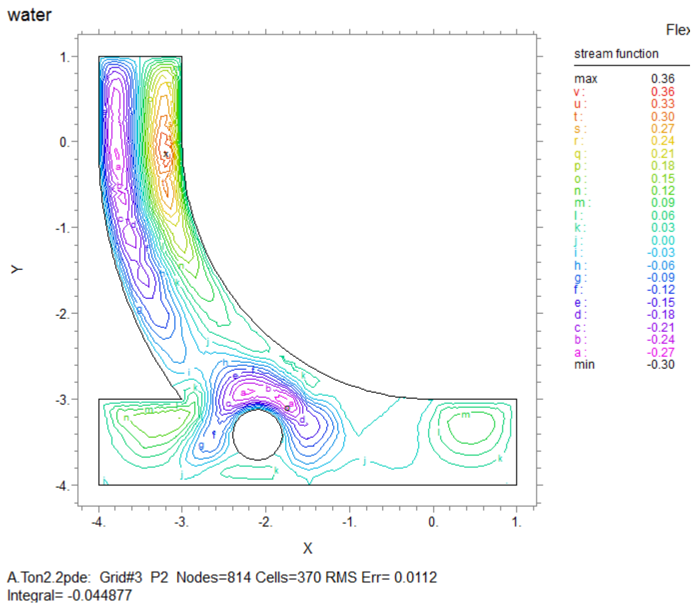


(4.14 ค)

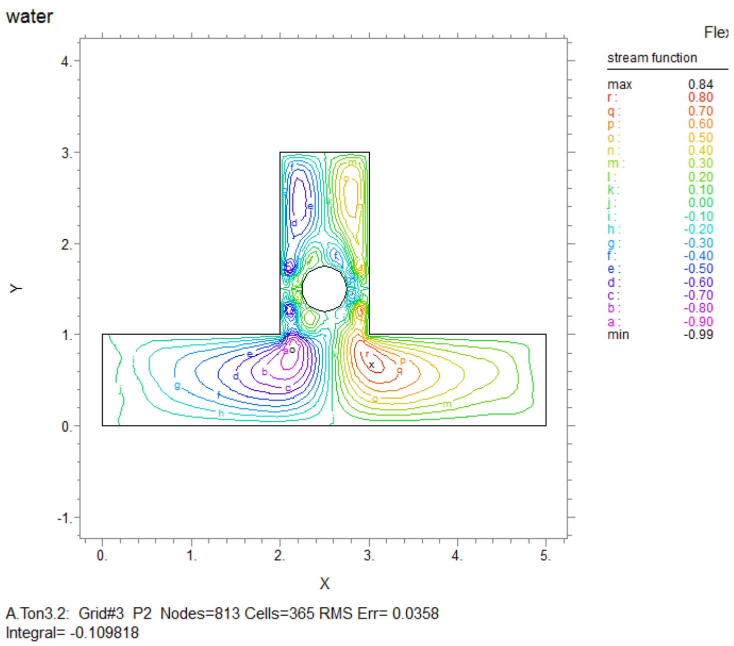


(4.14 ง)

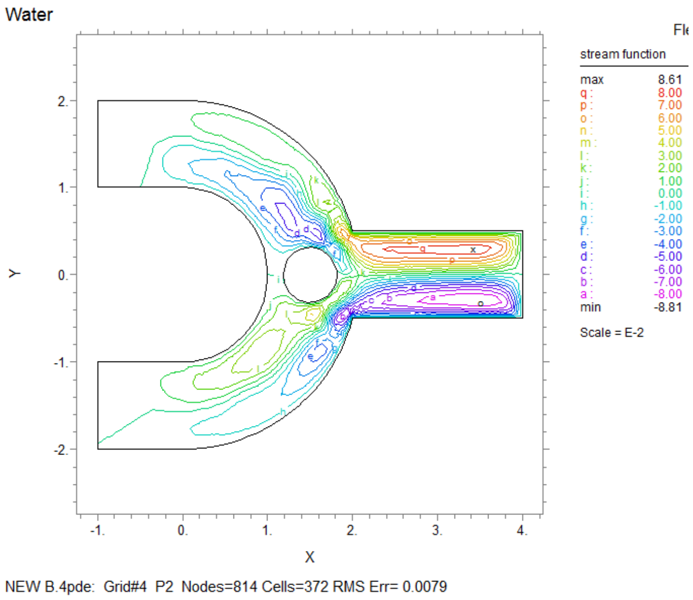
ภาพที่ 4.14 ก - 4.14 ง แสดงกระแสการไหลของน้ำ (Water) ที่มีค่า Prandtl = 10 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7}


water
Flex
stream function
max 0.36
v : 0.36
u : 0.33
t : 0.30
s : 0.27
r : 0.24
q : 0.21
p : 0.18
o : 0.15
n : 0.12
m : 0.09
l : 0.06
k : 0.03
j : 0.00
i : -0.03
h : -0.06
g : -0.09
f : -0.12
e : -0.15
d : -0.18
c : -0.21
b : -0.24
a : -0.27
min -0.30
Y
X
A.Ton2.2pde: Grid#3 P2 Nodes=814 Cells=370 RMS Err= 0.0112
Integral= -0.044877

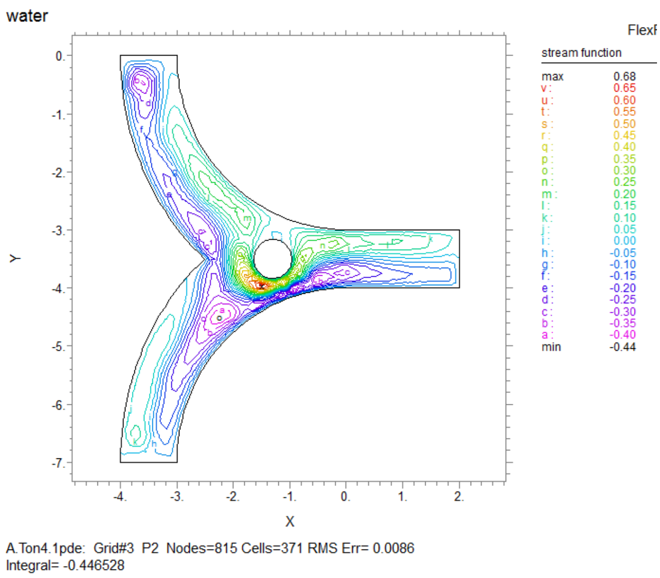
(4.15 ก)


water
Flex
stream function
max 0.84
r : 0.80
q : 0.70
p : 0.60
o : 0.50
n : 0.40
m : 0.30
l : 0.20
k : 0.10
j : 0.00
i : -0.10
h : -0.20
g : -0.30
f : -0.40
e : -0.50
d : -0.60
c : -0.70
b : -0.80
a : -0.90
min -0.99
Y
X
A.Ton3.2: Grid#3 P2 Nodes=813 Cells=365 RMS Err= 0.0358
Integral= -0.109818

(4.15 ข)

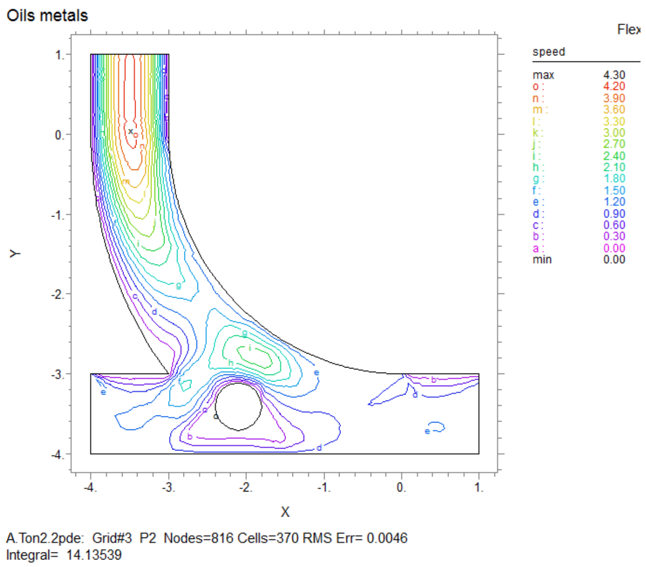


(4.15 ค)

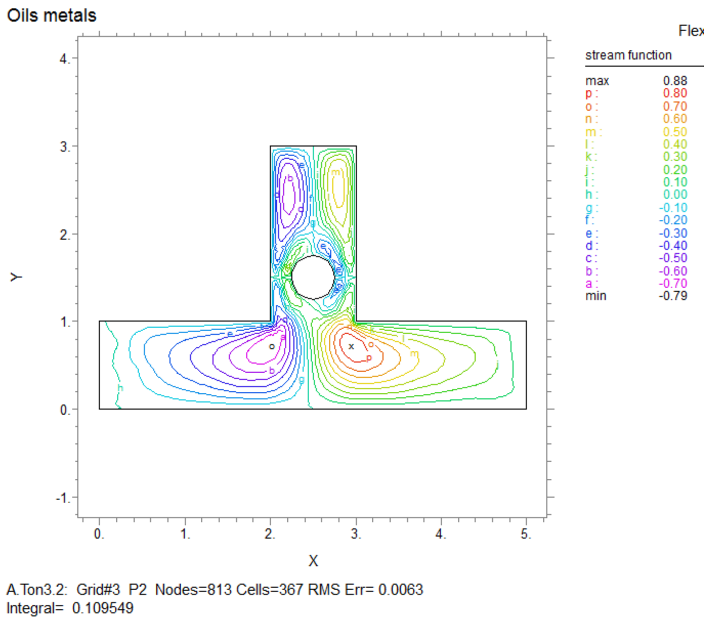


(4.15 ง)

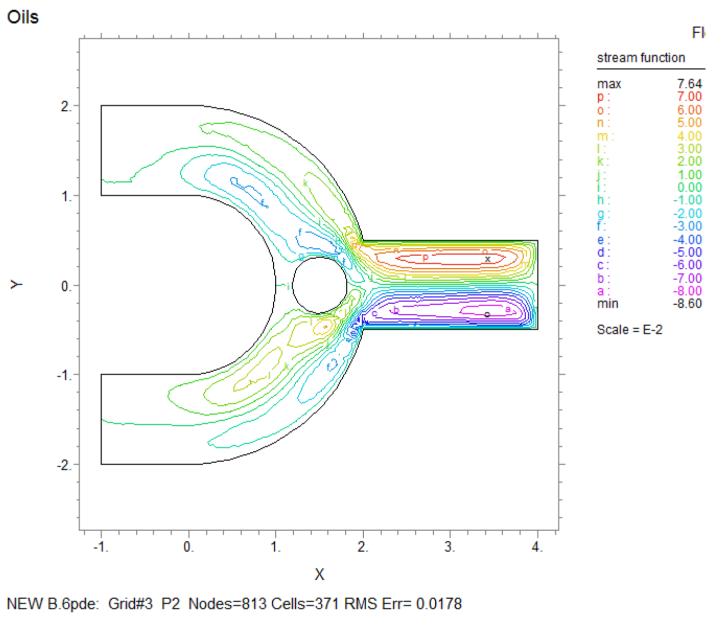
ภาพที่ 4.15 ก - 4.15 ง แสดงกระแสการไหลของน้ำ (Water) ที่มีค่า Prandtl = 5 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7}


Oils metals
Flex
speed
max 4.30
o : 4.20
n : 3.90
m : 3.60
l : 3.30
k : 3.00
j : 2.70
i : 2.40
h : 2.10
g : 1.80
f : 1.50
e : 1.20
d : 0.90
c : 0.60
b : 0.30
a : 0.00
min 0.00
Y
X
A.Ton2.2pde: Grid#3 P2 Nodes=816 Cells=370 RMS Err= 0.0046
Integral= 14.13539

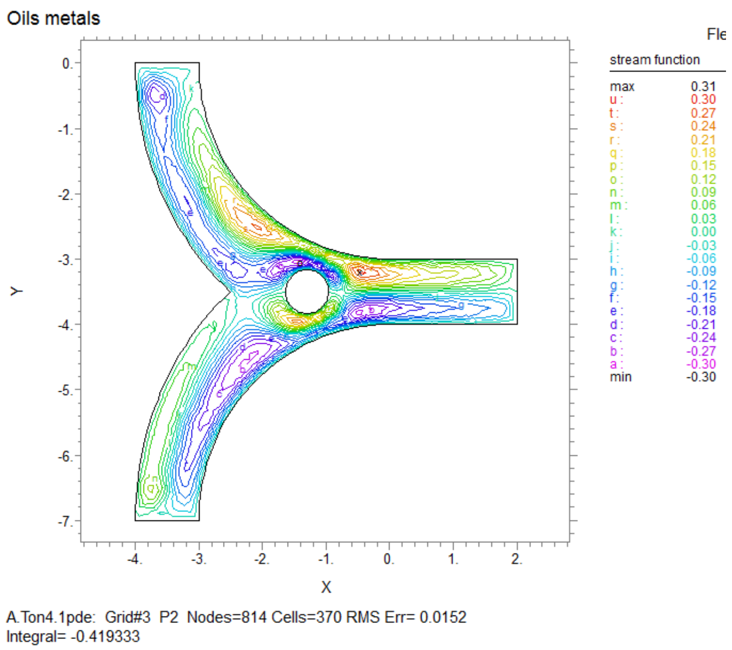
(4.16 ก)


Oils metals
Flex
stream function
max 0.88
p : 0.80
o : 0.70
n : 0.60
m : 0.50
l : 0.40
k : 0.30
j : 0.20
i : 0.10
h : 0.00
g : -0.10
f : -0.20
e : -0.30
d : -0.40
c : -0.50
b : -0.60
a : -0.70
min -0.79
Y
X
A.Ton3.2: Grid#3 P2 Nodes=813 Cells=367 RMS Err= 0.0063
Integral= 0.109549

(4.16 ข)



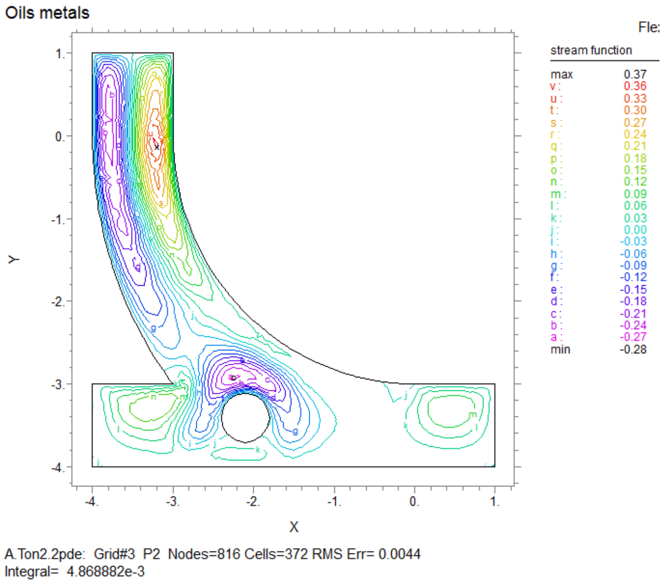
(4.16 ค)



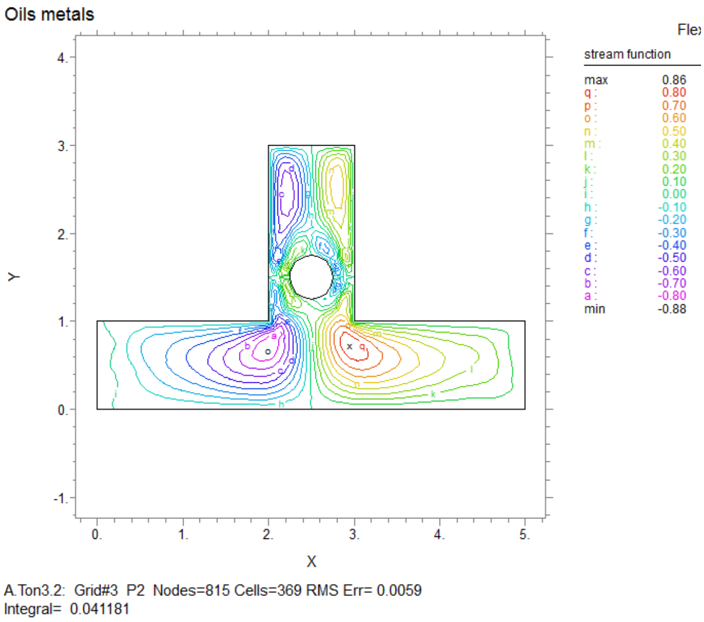
(4.16 ง)

ภาพที่ 4.16 ก - 4.16 ง แสดงกระแสการไหลของน้ำมัน (Oils metals)

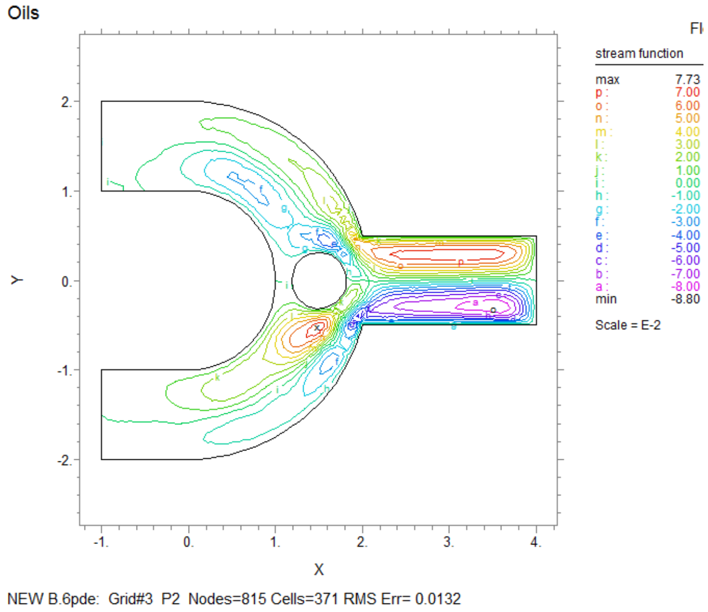
ที่มีค่า Prandtl = 300 และและ ค่า Rayleigh = 10^{-7}


Oils metals
Fle:
stream function
max 0.37
v : 0.36
u : 0.33
t : 0.30
s : 0.27
r : 0.24
q : 0.21
p : 0.18
o : 0.15
n : 0.12
m : 0.09
l : 0.06
k : 0.03
j : 0.00
i : -0.03
h : -0.06
g : -0.09
f : -0.12
e : -0.15
d : -0.18
c : -0.21
b : -0.24
a : -0.27
min -0.28
Y
X
A.Ton2.2pde: Grid#3 P2 Nodes=816 Cells=372 RMS Err= 0.0044
Integral= 4.868882e-3

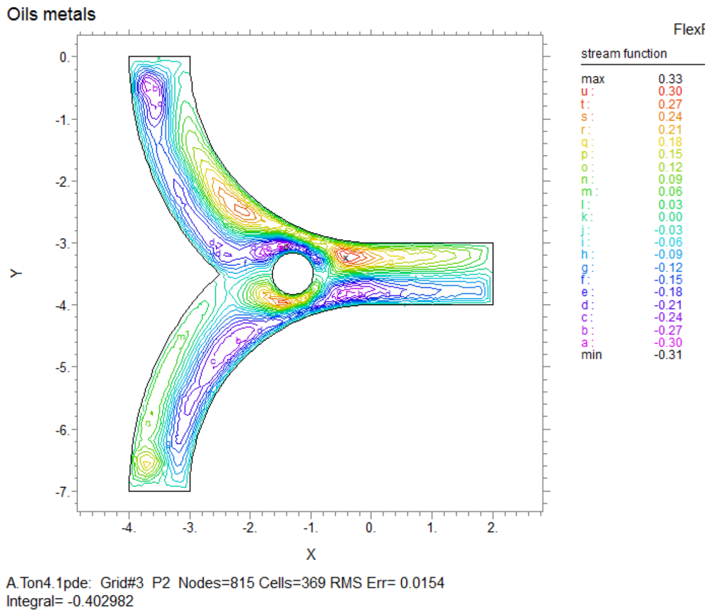
(4.17 ก)


Oils metals
Fle:
stream function
max 0.86
q : 0.80
p : 0.70
o : 0.60
n : 0.50
m : 0.40
l : 0.30
k : 0.20
j : 0.10
i : 0.00
h : -0.10
g : -0.20
f : -0.30
e : -0.40
d : -0.50
c : -0.60
b : -0.70
a : -0.80
min -0.88
Y
X
A.Ton3.2: Grid#3 P2 Nodes=815 Cells=369 RMS Err= 0.0059
Integral= 0.041181

(4.17 ข)



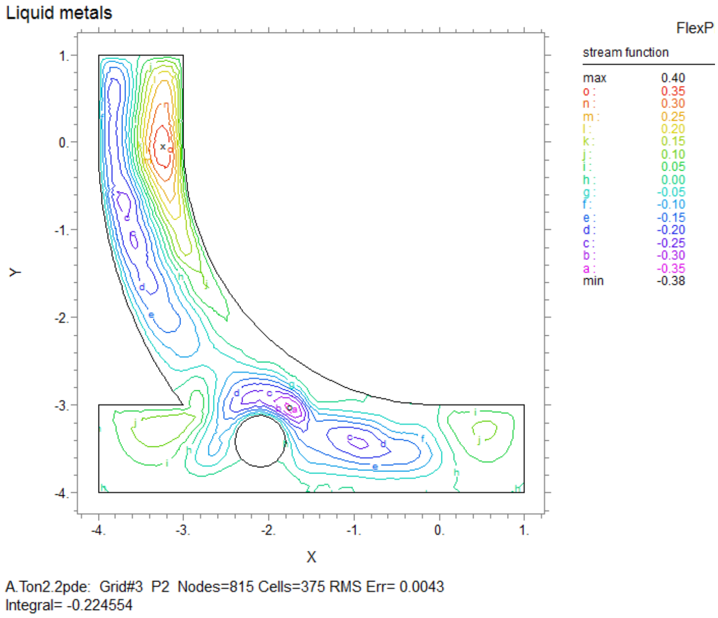
(4.17 ค)



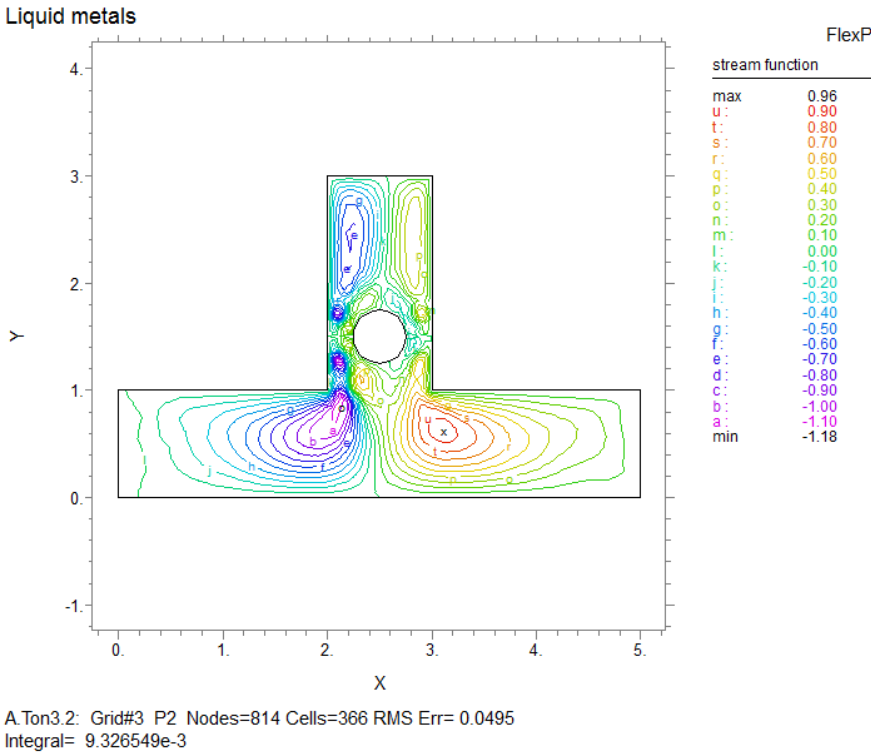
(4.17 ง)

ภาพที่ 4.17 ก - 4.17 ง แสดงกระแสการไหลของน้ำมัน (Oils metals)

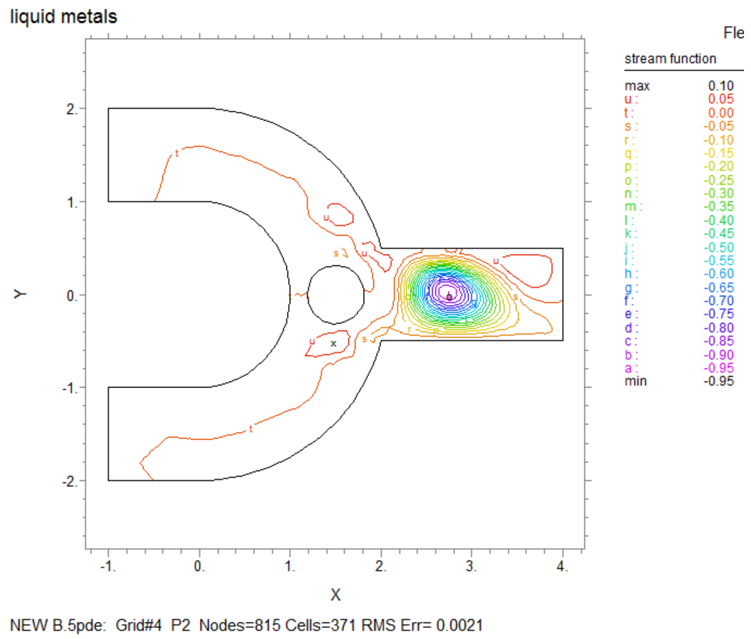
ที่มีค่า Prandtl = 50 และและ ค่า Rayleigh = 10^{-7}


Liquid metals
FlexP
stream function
max 0.40
o : 0.35
n : 0.30
m : 0.25
l : 0.20
k : 0.15
j : 0.10
i : 0.05
h : 0.00
g : -0.05
f : -0.10
e : -0.15
d : -0.20
c : -0.25
b : -0.30
a : -0.35
min -0.38
Y
X
A.Ton2.2pde: Grid#3 P2 Nodes=815 Cells=375 RMS Err= 0.0043
Integral= -0.224554

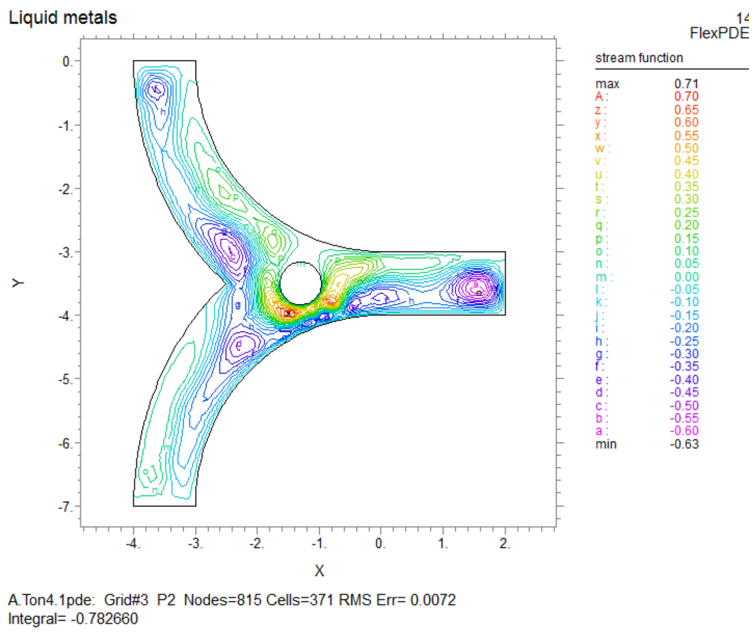
(4.18 ก)


Liquid metals
FlexP
stream function
max 0.96
u : 0.90
t : 0.80
s : 0.70
r : 0.60
q : 0.50
p : 0.40
o : 0.30
n : 0.20
m : 0.10
l : 0.00
k : -0.10
j : -0.20
i : -0.30
h : -0.40
g : -0.50
f : -0.60
e : -0.70
d : -0.80
c : -0.90
b : -1.00
a : -1.10
min -1.18
Y
X
A.Ton3.2: Grid#3 P2 Nodes=814 Cells=366 RMS Err= 0.0495
Integral= 9.326549e-3

(4.18 ข)

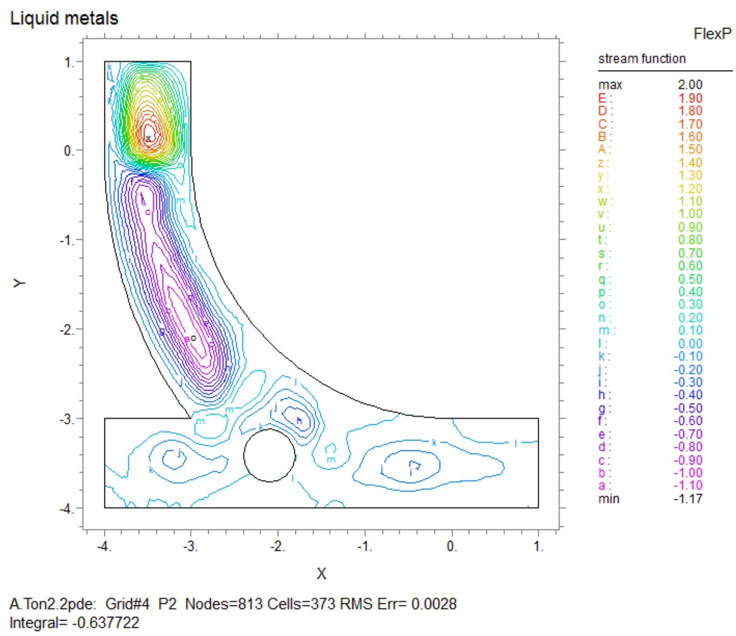


(4.18 ค)

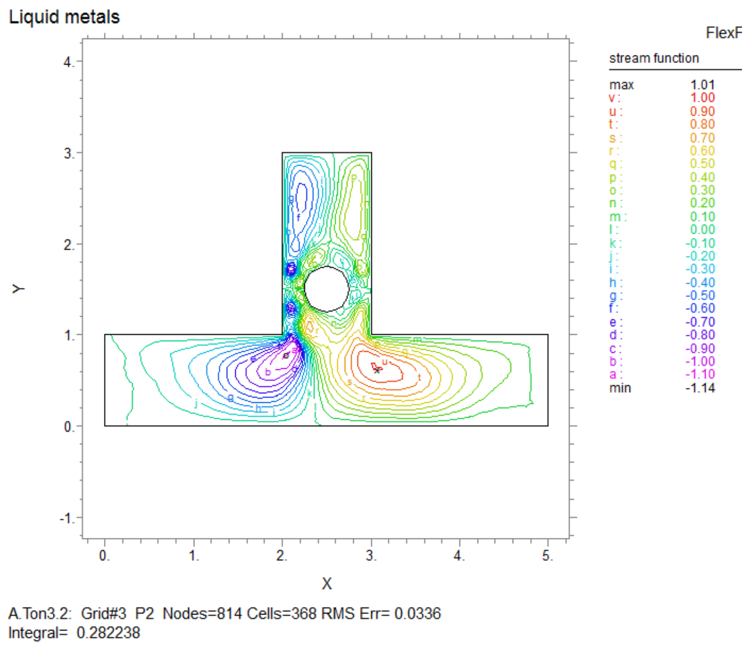


(4.18 ง)

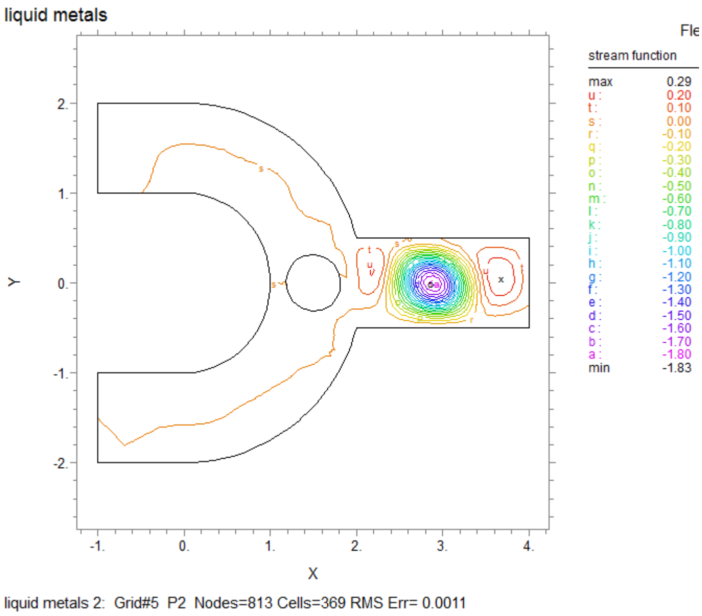
ภาพที่ 4.18 ก - 4.18 ง แสดงกระแสการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.3 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7}


Liquid metals
FlexP
stream function
max 2.00
E : 1.90
D : 1.80
C : 1.70
B : 1.60
A : 1.50
z : 1.40
y : 1.30
x : 1.20
w : 1.10
v : 1.00
u : 0.90
t : 0.80
s : 0.70
r : 0.60
q : 0.50
p : 0.40
o : 0.30
n : 0.20
m : 0.10
l : 0.00
k : -0.10
j : -0.20
i : -0.30
h : -0.40
g : -0.50
f : -0.60
e : -0.70
d : -0.80
c : -0.90
b : -1.00
a : -1.10
min -1.17
Y
X
A.Ton2.2pde: Grid#4 P2 Nodes=813 Cells=373 RMS Err= 0.0028
Integral= -0.637722

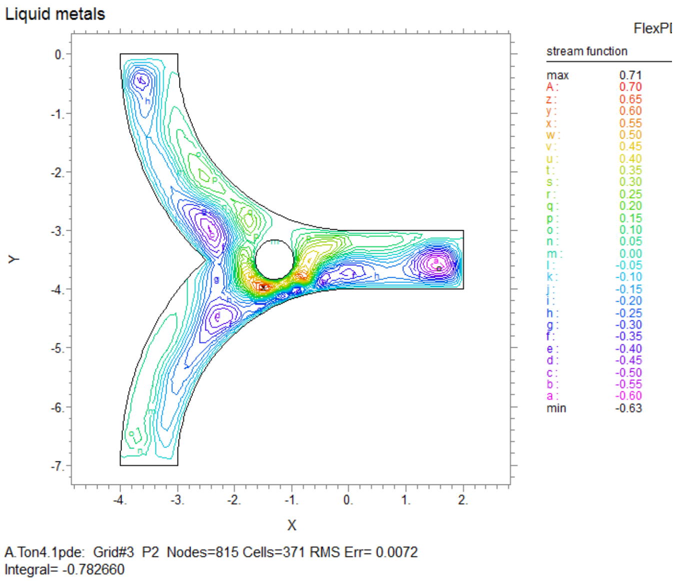
(4.19 ก)


Liquid metals
FlexF
stream function
max 1.01
v : 1.00
u : 0.90
t : 0.80
s : 0.70
r : 0.60
q : 0.50
p : 0.40
o : 0.30
n : 0.20
m : 0.10
l : 0.00
k : -0.10
j : -0.20
i : -0.30
h : -0.40
g : -0.50
f : -0.60
e : -0.70
d : -0.80
c : -0.90
b : -1.00
a : -1.10
min -1.14
Y
X
A.Ton3.2: Grid#3 P2 Nodes=814 Cells=368 RMS Err= 0.0336
Integral= 0.282238

(4.19 ข)



(4.19 ค)



(4.19 ง)

ภาพที่ 4.19 ก - 4.19 ง แสดงกระแสการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.2 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7}

จากภาพ ลักษณะการไหลของของไหลจะเพิ่มขึ้น บริเวณทางออกของโดเมนและบริเวณที่ของไหลไหลมารวมกันความเร็วบริเวณขอบโดเมนจะต่ำกว่าส่วนอื่น ๆ และความเร็วของของไหลรอบ ๆ บริเวณสิ่งกีดขวางจะมีความเร็วเพิ่มขึ้น เมื่อใช้โดเมนเดียวกันมาเปรียบเทียบ สังเกตได้จากแถบสีของความเร็ว พิจารณาได้จากภาพข้างต้น

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาการไหลของของไหลแบบมีความหนืดและอัดตัวไม่ได้ โดยใช้ระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด ด้วยโปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D โดยใช้สมการนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งประกอบด้วย สมการอนุรักษ์มวล และสมการอนุรักษ์โมเมนตัม ผลจากการศึกษาสามารถสรุปได้ดังนี้

5.1 สรุป

5.1.1 เมื่อค่า Prandtl หรือค่า Pr น้อยส่งผลให้เวกเตอร์การไหล ความเร็ว และลักษณะการไหลเกิดการไหลแบบไม่ราบเรียบ ในขณะที่เมื่อค่า Prandtl มากส่งผลให้เวกเตอร์การไหล ความเร็ว และลักษณะการไหลเกิดการไหลแบบราบเรียบขึ้น

5.1.2 จากแบบจำลองการไหลของไหลในท่อ โดยที่มีสิ่งกีดขวาง ของสถานะ โลหะเหลว น้ำ และน้ำมัน พบว่าการไหลของสถานะของน้ำมันสมมารถไหลผ่านสิ่งกีดขวางได้ราบเรียบกว่าสถานะของโลหะเหลวและน้ำ เมื่อพิจารณาจากแบบจำลองการไหล

5.1.3 ความดันของของไหลในโดเมน จะเกิดการเปลี่ยนแปลงเมื่อของไหลไหลผ่านบริเวณส่วนโค้งของโดเมน

5.1.4 บริเวณสิ่งกีดขวางในโดเมน พบว่า ความดันเกิดการเปลี่ยนแปลงมากกว่าบริเวณอื่น เมื่อสังเกตจากแถบสีความดัน

5.1.5 เมื่อค่า Prandtl หรือค่า Pr น้อยส่งผลให้เวกเตอร์การไหล ความเร็ว และลักษณะการไหลเกิดการไหลแบบไม่ราบเรียบ ในขณะที่เมื่อค่า Prandtl มากส่งผลให้เวกเตอร์การไหล ความเร็ว และลักษณะการไหลเกิดการไหลแบบราบเรียบขึ้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ศึกษาการไหลแบบมีความหนืดและอัดตัวไม่ได้ในโดเมน 2 มิติ ซึ่งความเร็วของของไหลอยู่ในสภาวะคงตัว (steady state) ดังนั้นเพื่อเป็นการขยายผลให้กว้างขึ้นควรจะมีการศึกษาระบบที่อยู่ในสภาวะไม่คงตัว (unsteady state) อุณหภูมิ (temperature) และพลังงาน (energy) ด้วย

บรรณานุกรม

บรรณานุกรมภาษาไทย

จุรี สุวรรณศรี. (2552). **วิธีสมาชิกจำกัดสำหรับปัญหาการไหลผ่านของของไหลอุดมคติที่อัดตัวไม่ได้.** วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

นิศากร นามปัญญา. (2549). **ปัญหาพิเศษ.** ขอนแก่น: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. (2550). **ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม.** พิมพ์ครั้งที่ 4 . กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ปราโมทย์ เดชะอำไพและคณะ. (2545). **การวิเคราะห์และออกแบบงานวิศวกรรมด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.** กรุงเทพฯ: ศูนย์เทคโนโลยีการผลิตและออกแบบ ศูนย์เทคโนโลยีโลหะ และวัสดุแห่งชาติ สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยีแห่งชาติ กระทรวงวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม.

พัชรี ธีระเอก. (2547). **การวิเคราะห์การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะและเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดได้.** วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิตสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกลภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วินัย ศรีอัมพร. (2546). **กลศาสตร์ของไหล**. พิมพ์ครั้งที่ 2. ขอนแก่น: ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

สมศักดิ์ ไชยะภินันท์. (2547). **กลศาสตร์ของไหล**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เพียงพบ มนต์นวลปรางค์. (2547). **ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ปัญหาการไหลผ่านของของไหลอุดมคติที่อัดตัวยากในเทอมของตัวแปรง่าย.** ปทุมธานี: มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ในพระบรมราชูปถัมภ์.

สำลี บุญสิทธิ์, **วิธีสมาชิกจำกัดสำหรับการไหลผ่านของของไหลอุดมคติที่อัดตัวไม่ได้ด้วยโปรแกรม FlexPDE**. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้แสดงการไหลของน้ำ (Water)

ที่มีค่า Prandtl = 10 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ก

****

```
TITLE ' water  '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES              {System variables}

U                      {X-components of the velocity}

V                      {Y-components of the velocity}

Theta                  {Temperature}

Psi                    {Steram function}

DEFINITIONS            {Parameter definitions}

gamma=10^(7)           {Penalty parameter}

Pr=10                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)             {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

   START(-4,1)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 0     load(v) = 0     value(theta) = 0    value(psi)=0   line to (-3,1)  {IN}

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (-3,0)

value(u) =1     value(v) = 0    value(theta)= 0      value(psi)=0   arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (1,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0      value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (1,-4)  {Out}

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta)= 0       value(psi)=0     line to (-4,-4){IN}

value(u) = 1    value(v) = 0     value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (-4,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0    line to (-3,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    line to  close

    start 'ring' (-2.30,-3.19)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0   arc(center = -2.10,-3.41)  angle
= 360

    TO CLOSE
```

```
MONITORS          {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS             {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้แสดงการไหลของน้ำ (Water)

ที่ที่มีค่า Prandtl = 5 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ก

****

```
TITLE ' water  '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=5                    {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

   START(-4,1)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 0     load(v) = 0     value(theta) = 0    value(psi)=0   line to (-3,1)  {IN}

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (-3,0)

value(u) =1     value(v) = 0    value(theta)= 0      value(psi)=0   arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (1,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0      value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (1,-4)  {Out}

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta)= 0       value(psi)=0     line to (-4,-4){IN}

value(u) = 1    value(v) = 0     value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (-4,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0    line to (-3,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    line to  close

    start 'ring' (-2.30,-3.19)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0   arc(center = -2.10,-3.41)  angle
= 360

  TO CLOSE
```

```
MONITORS          {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS             {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.3 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ก

****

```
TITLE ' liquid metals  '      {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=0.3                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

       START(-4,1)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 0     load(v) = 0     value(theta) = 0    value(psi)=0   line to (-3,1)  {IN}

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (-3,0)

value(u) =1     value(v) = 0    value(theta)= 0      value(psi)=0   arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (1,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0      value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (1,-4)  {Out}

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta)= 0       value(psi)=0     line to (-4,-4){IN}

value(u) = 1    value(v) = 0     value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (-4,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0    line to (-3,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    line to  close

    start 'ring' (-2.30,-3.19)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0   arc(center = -2.10,-3.41)  angle
= 360

 TO CLOSE
```

```
MONITORS        {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.2 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ก

****

```
TITLE ' liquid metals  '      {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=0.2                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

   START(-4,1)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 0     load(v) = 0     value(theta) = 0    value(psi)=0   line to (-3,1)  {IN}

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (-3,0)

value(u) =1     value(v) = 0    value(theta)= 0      value(psi)=0   arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (1,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0      value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (1,-4)  {Out}

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta)= 0       value(psi)=0     line to (-4,-4){IN}

value(u) = 1    value(v) = 0     value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (-4,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0    line to (-3,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    line to  close

    start 'ring' (-2.30,-3.19)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0   arc(center = -2.10,-3.41)  angle
= 360

 TO CLOSE
```

```
MONITORS          {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS             {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของน้ำมัน (Oils metals)

ที่มีค่า Prandtl = 300 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ก

****

```
TITLE ' Oils metals '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=300                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

   START(-4,1)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 0     load(v) = 0     value(theta) = 0    value(psi)=0   line to (-3,1)  {IN}

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (-3,0)

value(u) =1     value(v) = 0    value(theta)= 0      value(psi)=0   arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (1,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0      value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (1,-4)  {Out}

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta)= 0       value(psi)=0     line to (-4,-4){IN}

value(u) = 1    value(v) = 0     value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (-4,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0    line to (-3,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    line to  close

    start 'ring' (-2.30,-3.19)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0   arc(center = -2.10,-3.41)  angle
= 360

    TO CLOSE
```

```
MONITORS        {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของน้ำมัน (Oils metals)
ที่มีค่า Prandtl = 50 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ก

****

```
TITLE ' Oils metals '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES              {System variables}

U                      {X-components of the velocity}

V                      {Y-components of the velocity}

Theta                  {Temperature}

Psi                    {Steram function}

DEFINITIONS            {Parameter definitions}

gamma=10^(7)           {Penalty parameter}

Pr=50                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)             {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

   START(-4,1)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 0      load(v) = 0     value(theta) = 0    value(psi)=0   line to (-3,1)  {IN}

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (-3,0)

value(u) =1      value(v) = 0    value(theta)= 0      value(psi)=0   arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (1,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0       value(theta) = 0     value(psi)=0      line to (1,-4)  {Out}

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta)= 0       value(psi)=0     line to (-4,-4){IN}

value(u) = 1    value(v) = 0     value(theta) = 0      value(psi)=0     line to (-4,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0      value(psi)=0    line to (-3,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0        value(psi)=0    line to  close

    start 'ring' (-2.30,-3.19)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0   arc(center = -2.10,-3.41)  angle
= 360

 TO CLOSE
```

```
MONITORS          {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS             {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้แสดงการไหลของน้ำ (Water)

ที่มีค่า Prandtl = 10 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ข

****

```
TITLE ' water  '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES              {System variables}

U                      {X-components of the velocity}

V                      {Y-components of the velocity}

Theta                  {Temperature}

Psi                    {Steram function}

DEFINITIONS            {Parameter definitions}

gamma=10^(7)           {Penalty parameter}

Pr=10                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)             {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1           {For each material region}

    START(0,0)   { Walk the domain boundary }

load(u) = 0      value(v) =0      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (5,0)

value(u) = 1     value(v) = 0     value(theta) = 0         value(psi)=0   line to (5,1)   {Out}

value(u) = 0     value(v) = 1      value(theta) = 0        value(psi)=0    line to (3,1)

value(u) = 1     value(v) = 0     value(theta)= 0           value(psi)=0    line to (3,3)

value(u) =  0   load(v) = 1      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (2,3)  {IN}

value(u) = 0     value(v) = 1     value(theta) = 0    value(psi)=0         line to (2,1)

value(u) = 1     value(v) = 1     value(theta) = 0     value(psi)=0        line to (0,1)  {Out}

value(u) = 0     value(v) = 0     value(theta) = 0     value(psi)=0        line to  close

   start 'ring' (2.25,1.5)

 value(u) = 0    value(v) = 0   value(theta) = 0         value(psi)=0    arc(center = 2.5,1.5)
angle = 360 to close

MONITORS         {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)
```

```
PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้แสดงการไหลของน้ำ (Water)

ที่ที่มีค่า Prandtl = 5 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ข

****

```
TITLE ' water  '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES            {System variables}

U                    {X-components of the velocity}

V                    {Y-components of the velocity}

Theta                {Temperature}

Psi                  {Steram function}

DEFINITIONS          {Parameter definitions}

gamma=10^(7)         {Penalty parameter}

Pr=5                 {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)           {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS       {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

START(0,0)   { Walk the domain boundary }

load(u) = 0      value(v) =0      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (5,0)

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0         value(psi)=0   line to (5,1)   {Out}

value(u) = 0    value(v) = 1     value(theta) = 0        value(psi)=0    line to (3,1)

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta)= 0           value(psi)=0    line to (3,3)

value(u) =  0   load(v) = 1      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (2,3)  {IN}

value(u) = 0    value(v) = 1    value(theta) = 0    value(psi)=0         line to (2,1)

value(u) = 1    value(v) = 1    value(theta) = 0     value(psi)=0        line to (0,1)  {Out}

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0     value(psi)=0        line to  close

   start 'ring' (2.25,1.5)

 value(u) = 0    value(v) = 0   value(theta) = 0         value(psi)=0    arc(center = 2.5,1.5)
angle = 360 to close

MONITORS         {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)
```

```
PLOTS            {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.3 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ข

****

```
TITLE ' liquid metals  '      {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=0.3                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

START(0,0)   { Walk the domain boundary }

load(u) = 0      value(v) =0      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (5,0)

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0         value(psi)=0   line to (5,1)   {Out}

value(u) = 0    value(v) = 1     value(theta) = 0        value(psi)=0    line to (3,1)

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta)= 0           value(psi)=0    line to (3,3)

value(u) =  0   load(v) = 1      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (2,3)  {IN}

value(u) = 0    value(v) = 1    value(theta) = 0    value(psi)=0         line to (2,1)

value(u) = 1    value(v) = 1    value(theta) = 0     value(psi)=0        line to (0,1)  {Out}

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0     value(psi)=0        line to  close

   start 'ring' (2.25,1.5)

 value(u) = 0     value(v) = 0   value(theta) = 0         value(psi)=0    arc(center = 2.5,1.5)
angle = 360 to close

MONITORS         {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)
```

```
PLOTS            {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.2 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ข

****

```
TITLE ' liquid metals  '      {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES                {System variables}

U                        {X-components of the velocity}

V                        {Y-components of the velocity}

Theta                    {Temperature}

Psi                      {Steram function}

DEFINITIONS              {Parameter definitions}

gamma=10^(7)             {Penalty parameter}

Pr=0.2                   {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)               {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

START(0,0)   { Walk the domain boundary }

load(u) = 0      value(v) =0      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (5,0)

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0         value(psi)=0   line to (5,1)   {Out}

value(u) = 0    value(v) = 1     value(theta) = 0        value(psi)=0    line to (3,1)

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta)= 0           value(psi)=0    line to (3,3)

value(u) =  0   load(v) = 1      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (2,3)  {IN}

value(u) = 0    value(v) = 1    value(theta) = 0    value(psi)=0         line to (2,1)

value(u) = 1    value(v) = 1    value(theta) = 0     value(psi)=0        line to (0,1)  {Out}

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0     value(psi)=0        line to  close

   start 'ring' (2.25,1.5)

 value(u) = 0    value(v) = 0   value(theta) = 0         value(psi)=0    arc(center = 2.5,1.5)
angle = 360 to close

MONITORS         {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)
```

```
PLOTS            {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของน้ำมัน (Oils metals)

ที่มีค่า Prandtl = 300 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ข

****

```
TITLE ' Oils metals '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=300                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

    START(0,0)   { Walk the domain boundary }

load(u) = 0      value(v) =0      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (5,0)

value(u) = 1     value(v) = 0     value(theta) = 0         value(psi)=0   line to (5,1)   {Out}

value(u) = 0     value(v) = 1      value(theta) = 0        value(psi)=0    line to (3,1)

value(u) = 1     value(v) = 0     value(theta)= 0           value(psi)=0    line to (3,3)

value(u) =  0   load(v) = 1       value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (2,3)  {IN}

value(u) = 0     value(v) = 1     value(theta) = 0    value(psi)=0         line to (2,1)

value(u) = 1     value(v) = 1     value(theta) = 0     value(psi)=0        line to (0,1)  {Out}

value(u) = 0     value(v) = 0     value(theta) = 0     value(psi)=0        line to  close

   start 'ring' (2.25,1.5)

 value(u) = 0     value(v) = 0    value(theta) = 0         value(psi)=0    arc(center = 2.5,1.5)
angle = 360 to close

MONITORS         {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)
```

```
PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของน้ำมัน (Oils metals)

ที่มีค่า Prandtl = 50 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ข

****

```
TITLE ' Oils metals '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=50                   {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

    START(0,0)   { Walk the domain boundary }

load(u) = 0      value(v) =0      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (5,0)

value(u) = 1     value(v) = 0     value(theta) = 0         value(psi)=0   line to (5,1)   {Out}

value(u) = 0     value(v) = 1      value(theta) = 0        value(psi)=0    line to (3,1)

value(u) = 1     value(v) = 0     value(theta)= 0           value(psi)=0    line to (3,3)

value(u) =  0   load(v) = 1      value(theta) = 0         value(psi)=0    line to (2,3)  {IN}

value(u) = 0     value(v) = 1     value(theta) = 0    value(psi)=0         line to (2,1)

value(u) = 1     value(v) = 1     value(theta) = 0     value(psi)=0        line to (0,1)  {Out}

value(u) = 0     value(v) = 0     value(theta) = 0     value(psi)=0        line to  close

   start 'ring' (2.25,1.5)

 value(u) = 0     value(v) = 0    value(theta) = 0         value(psi)=0    arc(center = 2.5,1.5)
angle = 360 to close

MONITORS         {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)
```

```
PLOTS            {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้แสดงการไหลของน้ำ (Water)

ที่มีค่า Prandtl = 10 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ค

****

```
TITLE ' water  '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES            {System variables}

U                    {X-components of the velocity}

V                    {Y-components of the velocity}

Theta                {Temperature}

Psi                  {Steram function}

DEFINITIONS          {Parameter definitions}

gamma=10^(7)         {Penalty parameter}

Pr=10                {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)           {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS       {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

    START(-1,2)     {Walk the domain boundary}

value(U)=0      value(V)=0     value(Psi)=0    value(Theta)     LINE TO (0,2)

value(U)=0      value(V)=0     value(Psi)=0     value(Theta)    arc(center=0,0) TO(2,0.5)

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)     LINE TO (4,0.5)

value(U)=1      load(V)=0       value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (4,-0.5){OUT}

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)   LINE TO (2,-0.5)

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)    arc(center=0,0) TO (0,-2)

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (-1,-2)

value(U)=0      load(V)=1       value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (-1,-1){IN}

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (0,-1)

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)   arc(center=0,0) TO (1,0)

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)   arc(center=0,0) TO (0,1)

load(U)=0       value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)   LINE TO (-1,1){IN}

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)   LINE TO CLOSE

start 'ring'(1.2,-0.1)
```

```
value(U)=0  value(V)=0    value(Psi)=0      value(Theta)  arc(center=1.5,0) angle = 360 TO
CLOSE

MONITORS        {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้แสดงการไหลของน้ำ (Water)

ที่ที่มีค่า Prandtl = 5 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ค

****

```
TITLE ' water  '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES              {System variables}

U                      {X-components of the velocity}

V                      {Y-components of the velocity}

Theta                  {Temperature}

Psi                    {Steram function}

DEFINITIONS            {Parameter definitions}

gamma=10^(7)           {Penalty parameter}

Pr=5                   {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)             {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

    START(-1,2)      {Walk the domain boundary}

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0     value(Theta)    LINE TO (0,2)

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0     value(Theta)    arc(center=0,0) TO(2,0.5)

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0    value(Theta)     LINE TO (4,0.5)

value(U)=1     load(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)     LINE TO (4,-0.5){OUT}

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0    value(Theta)    LINE TO (2,-0.5)

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0    value(Theta)    arc(center=0,0) TO (0,-2)

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0    value(Theta)    LINE TO (-1,-2)

value(U)=0     load(V)=1      value(Psi)=0    value(Theta)    LINE TO (-1,-1){IN}

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0    value(Theta)    LINE TO (0,-1)

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0     value(Theta)   arc(center=0,0) TO (1,0)

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0      value(Theta)  arc(center=0,0) TO (0,1)

load(U)=0      value(V)=0     value(Psi)=0     value(Theta)   LINE TO (-1,1){IN}

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0     value(Theta)   LINE TO CLOSE

start 'ring'(1.2,-0.1)
```

```
value(U)=0  value(V)=0      value(Psi)=0         arc(center=1.5,0) angle = 360 TO CLOSE

MONITORS          {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS              {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.3 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ค

****

```
TITLE ' liquid metals  '      {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=0.3                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1         {For each material region}

    START(-1,2)     {Walk the domain boundary}

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0    value(Theta)     LINE TO (0,2)

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0   value(Theta)     arc(center=0,0) TO(2,0.5)

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)     LINE TO (4,0.5)

value(U)=1     load(V)=0       value(Psi)=0   value(Theta)     LINE TO (4,-0.5){OUT}

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)     LINE TO (2,-0.5)

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)      arc(center=0,0) TO (0,-2)

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)      LINE TO (-1,-2)

value(U)=0     load(V)=1       value(Psi)=0   value(Theta)      LINE TO (-1,-1){IN}

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)    LINE TO (0,-1)

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)    arc(center=0,0) TO (1,0)

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)    arc(center=0,0) TO (0,1)

load(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)    LINE TO (-1,1){IN}

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)    LINE TO CLOSE

start 'ring'(1.2,-0.1)
```

```
value(U)=0  value(V)=0    value(Psi)=0      value(Theta)  arc(center=1.5,0) angle = 360 TO
CLOSE

MONITORS        {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.2 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ค

****

```
TITLE ' liquid metals  '      {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES                {System variables}

U                        {X-components of the velocity}

V                        {Y-components of the velocity}

Theta                    {Temperature}

Psi                      {Steram function}

DEFINITIONS              {Parameter definitions}

gamma=10^(7)             {Penalty parameter}

Pr=0.2                   {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)               {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

    START(-1,2)     {Walk the domain boundary}

value(U)=0    value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (0,2)

value(U)=0    value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    arc(center=0,0) TO(2,0.5)

value(U)=0    value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (4,0.5)

value(U)=1    load(V)=0     value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (4,-0.5){OUT}

value(U)=0    value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (2,-0.5)

value(U)=0    value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    arc(center=0,0) TO (0,-2)

value(U)=0    value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (-1,-2)

value(U)=0    load(V)=1     value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (-1,-1){IN}

value(U)=0    value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (0,-1)

value(U)=0    value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    arc(center=0,0) TO (1,0)

value(U)=0    value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    arc(center=0,0) TO (0,1)

load(U)=0     value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (-1,1){IN}

value(U)=0    value(V)=0    value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO CLOSE

start 'ring'(1.2,-0.1)
```

```
value(U)=0  value(V)=0    value(Psi)=0     value(Theta)  arc(center=1.5,0) angle = 360 TO
CLOSE

MONITORS        {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

```
*******************************************************************************************

        โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของน้ำมัน (Oils metals)
                ที่มีค่า Prandtl = 300 และ ค่า Rayleigh = 10^-7 ของโดเมน 4.1 ค

*******************************************************************************************

TITLE ' Oils metals '      {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=300                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1         {For each material region}

    START(-1,2)     {Walk the domain boundary}

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0   value(Theta)   LINE TO (0,2)

value(U)=0     value(V)=0     value(Psi)=0   value(Theta)    arc(center=0,0) TO(2,0.5)

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)     LINE TO (4,0.5)

value(U)=1     load(V)=0       value(Psi)=0   value(Theta)     LINE TO (4,-0.5){OUT}

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)     LINE TO (2,-0.5)

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)      arc(center=0,0) TO (0,-2)

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)      LINE TO (-1,-2)

value(U)=0     load(V)=1       value(Psi)=0   value(Theta)     LINE TO (-1,-1){IN}

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (0,-1)

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)   arc(center=0,0) TO (1,0)

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)    arc(center=0,0) TO (0,1)

load(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (-1,1){IN}

value(U)=0     value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)   LINE TO CLOSE

start 'ring'(1.2,-0.1)
```

```
value(U)=0  value(V)=0     value(Psi)=0      value(Theta)  arc(center=1.5,0) angle = 360 TO
CLOSE

MONITORS         {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS            {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของน้ำมัน (Oils metals)

ที่มีค่า Prandtl = 50 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ค

****

```
TITLE ' Oils metals '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES              {System variables}

U                      {X-components of the velocity}

V                      {Y-components of the velocity}

Theta                  {Temperature}

Psi                    {Steram function}

DEFINITIONS            {Parameter definitions}

gamma=10^(7)           {Penalty parameter}

Pr=50                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)             {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

    START(-1,2)     {Walk the domain boundary}

value(U)=0      value(V)=0     value(Psi)=0    value(Theta)    LINE TO (0,2)

value(U)=0      value(V)=0     value(Psi)=0    value(Theta)    arc(center=0,0) TO(2,0.5)

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)    LINE TO (4,0.5)

value(U)=1      load(V)=0       value(Psi)=0   value(Theta)   LINE TO (4,-0.5){OUT}

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)   LINE TO (2,-0.5)

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0  value(Theta)    arc(center=0,0) TO (0,-2)

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)   LINE TO (-1,-2)

value(U)=0      load(V)=1       value(Psi)=0   value(Theta)   LINE TO (-1,-1){IN}

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)   LINE TO (0,-1)

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)  arc(center=0,0) TO (1,0)

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)   arc(center=0,0) TO (0,1)

load(U)=0       value(V)=0      value(Psi)=0   value(Theta)   LINE TO (-1,1){IN}

value(U)=0      value(V)=0      value(Psi)=0    value(Theta)  LINE TO CLOSE

start 'ring'(1.2,-0.1)
```

```
value(U)=0  value(V)=0     value(Psi)=0      value(Theta)  arc(center=1.5,0) angle = 360 TO

CLOSE

MONITORS         {show progress}

contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS            {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้แสดงการไหลของน้ำ (Water)

ที่มีค่า Prandtl = 10 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ง

****

```
TITLE ' water  '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=10                   {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1           {For each material region}

    START(-4,0)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 1     value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0           line to (-3,0)  {IN}

value(u) = 0   value(v) = 0      value(theta)= 0   value(psi)=0           arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0      value(theta) = 0  value(psi)=0           line to (2,-3)

value(u) = 1     load(v) = 0      value(theta) = 0  value(psi)=0           line to (2,-4)  {Out}

value(u) = 0    value(v) =0      value(theta) = 0   value(psi)=0           line to (0,-4)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0     arc(center=0,-7) to (-3,-7)

value(u) = 0    value(v) = 1     value(theta) = 0    value(psi)=0          line to (-4,-7) {IN}

value(u) = 1     value(v) = 0     value(theta) = 0    value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-2.5,-3.5)

value(u) = 1     value(v) =1      load(theta) = 0  value(psi)=0             arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0     value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0           line to  close

    start 'ring' (-0.96,-3.5)

 value(u) = 0   value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0 arc(center = -1.3,-3.5)

angle = 360 to close

    MONITORS         {show progress}
```

```
contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้แสดงการไหลของน้ำ (Water)

ที่ที่มีค่า Prandtl = 5 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ง

****

```
TITLE ' water  '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=5                    {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

START(-4,0)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0           line to (-3,0)  {IN}

value(u) = 0   value(v) = 0     value(theta)= 0   value(psi)=0           arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (2,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0      value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (2,-4)  {Out}

value(u) = 0    value(v) =0      value(theta) = 0   value(psi)=0         line to (0,-4)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-3,-7)

value(u) = 0    value(v) = 1    value(theta) = 0    value(psi)=0         line to (-4,-7) {IN}

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0    value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-2.5,-3.5)

value(u) = 1    value(v) =1     load(theta) = 0  value(psi)=0            arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0           line to  close

    start 'ring' (-0.96,-3.5)

 value(u) = 0   value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0 arc(center = -1.3,-3.5)

angle = 360 to close

MONITORS        {show progress}
```

```
contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.3 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ง

****

```
TITLE ' liquid metals  '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=0.3                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

START(-4,0)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (-3,0)  {IN}

value(u) = 0   value(v) = 0     value(theta)= 0   value(psi)=0          arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (2,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (2,-4)  {Out}

value(u) = 0    value(v) =0     value(theta) = 0   value(psi)=0          line to (0,-4)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-3,-7)

value(u) = 0    value(v) = 1    value(theta) = 0    value(psi)=0         line to (-4,-7) {IN}

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0    value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-2.5,-3.5)

value(u) = 1    value(v) =1     load(theta) = 0  value(psi)=0            arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0          line to  close

    start 'ring' (-0.96,-3.5)

 value(u) = 0   value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0 arc(center = -1.3,-3.5)

angle = 360 to close

MONITORS         {show progress}
```

```
contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS             {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของโลหะเหลว (Liquid metals) ที่มีค่า Prandtl = 0.2 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ง

****

```
TITLE ' liquid metals  '      {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES                {System variables}

U                        {X-components of the velocity}

V                        {Y-components of the velocity}

Theta                    {Temperature}

Psi                      {Steram function}

DEFINITIONS              {Parameter definitions}

gamma=10^(7)             {Penalty parameter}

Pr=0.2                   {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)               {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS         {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

START(-4,0)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (-3,0)  {IN}

value(u) = 0   value(v) = 0     value(theta)= 0   value(psi)=0          arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (2,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0      value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (2,-4)  {Out}

value(u) = 0    value(v) =0      value(theta) = 0   value(psi)=0         line to (0,-4)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-3,-7)

value(u) = 0    value(v) = 1     value(theta) = 0    value(psi)=0        line to (-4,-7) {IN}

value(u) = 1    value(v) = 0     value(theta) = 0    value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-2.5,-3.5)

value(u) = 1    value(v) =1      load(theta) = 0  value(psi)=0           arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0          line to  close

    start 'ring' (-0.96,-3.5)

 value(u) = 0   value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0 arc(center = -1.3,-3.5)

angle = 360 to close

MONITORS        {show progress}
```

```
contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS          {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของน้ำมัน (Oils metals)
ที่มีค่า Prandtl = 300 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ง

****

```
TITLE ' Oils metals '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=300                  {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1           {For each material region}

    START(-4,0)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (-3,0)  {IN}

value(u) = 0   value(v) = 0     value(theta)= 0   value(psi)=0          arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0         line to (2,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0      value(theta) = 0  value(psi)=0         line to (2,-4)  {Out}

value(u) = 0    value(v) =0      value(theta) = 0   value(psi)=0        line to (0,-4)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-3,-7)

value(u) = 0    value(v) = 1     value(theta) = 0    value(psi)=0       line to (-4,-7) {IN}

value(u) = 1    value(v) = 0     value(theta) = 0    value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-2.5,-3.5)

value(u) = 1    value(v) =1      load(theta) = 0  value(psi)=0          arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0         line to  close

    start 'ring' (-0.96,-3.5)

 value(u) = 0   value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0 arc(center = -1.3,-3.5)

angle = 360 to close

MONITORS         {show progress}
```

```
contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

****

โปรแกรม FlexPDE Lite version 6.50/W32 3D ที่ใช้ที่แสดงการไหลของน้ำมัน (Oils metals) ที่มีค่า Prandtl = 50 และ ค่า Rayleigh = 10^{-7} ของโดเมน 4.1 ง

****

```
TITLE ' Oils metals '     {The problem identification}

COORDINATES cartesian2  {Coordinate system, 1D,2D,3D, etc}

VARIABLES               {System variables}

U                       {X-components of the velocity}

V                       {Y-components of the velocity}

Theta                   {Temperature}

Psi                     {Steram function}

DEFINITIONS             {Parameter definitions}

gamma=10^(7)            {Penalty parameter}

Pr=50                   {Prandtl  numbers}

Ra=10^(-7)              {Rayleihg  numbers}

Speed = sqrt(U^2+V^2)

! INITIAL VALUES

EQUATIONS        {PDE's, one for each variable}

U: U*dX(U)+V*dY(U)=gamma*dX(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(U))

V: U*dX(V)+V*dY(V)=gamma*dY(dX(U)+dY(V))+Pr*div(grad(V))+Ra*Pr*Theta
```

```
Psi: div(grad(Psi))=dY(U)-dX(V)

Theta : U*dX(Theta)+V*dY(Theta) = div(Grad(Theta))

! CONSTRAINTS    {Integral constraints}

BOUNDARIES       {The domain definition}

  REGION 1          {For each material region}

START(-4,0)   { Walk the domain boundary }

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (-3,0)  {IN}

value(u) = 0   value(v) = 0     value(theta)= 0   value(psi)=0          arc(center=0,0) to (0,-3)

value(u) = 0    value(v) = 0     value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (2,-3)

value(u) = 1    load(v) = 0      value(theta) = 0  value(psi)=0          line to (2,-4)  {Out}

value(u) = 0    value(v) =0      value(theta) = 0   value(psi)=0          line to (0,-4)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-3,-7)

value(u) = 0    value(v) = 1    value(theta) = 0    value(psi)=0         line to (-4,-7) {IN}

value(u) = 1    value(v) = 0    value(theta) = 0    value(psi)=0    arc(center=0,-7) to (-2.5,-3.5)

value(u) = 1    value(v) =1      load(theta) = 0  value(psi)=0            arc(center=0,0) to (-4,0)

value(u) = 0    value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0           line to  close

    start 'ring' (-0.96,-3.5)

 value(u) = 0   value(v) = 0    value(theta) = 0  value(psi)=0 arc(center = -1.3,-3.5)

angle = 360 to close

MONITORS         {show progress}
```

```
contour(Theta)

contour(Psi)

PLOTS           {save result displays}

grid(X,Y) as "grid"

contour(Speed) painted

contour(Theta) as "Temperature"

contour(Theta) painted as "Temperature"

contour(Psi) as "stream function"

contour(Psi) painted as "stream function"

vector(U,V) as "valocity flows"

tecplot(U,V,Psi,Theta)

END
```

ประวัติผู้วิจัย

นายอัครพงศ์ วงศ์พัฒน์ เกิดวันเสาร์ ที่ 27 เดือนสิงหาคม พุทธศักราช 2526 จังหวัดมหาสารคาม

ประวัติการศึกษา

ปี พ.ศ. 2539	จบการศึกษาชั้นประถมศึกษา โรงเรียนอนุบาลมหาสารคาม
ปี พ.ศ. 2542	จบการศึกษาชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสารคามพิทยาคม จ.มหาสารคาม
ปี พ.ศ. 2545	จบการศึกษาชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนสารคามพิทยาคม จ.มหาสารคาม
ปี พ.ศ. 2549	จบการศึกษาปริญญาตรี วท.บ. เทคโนโลยีการอาหารและโภชนาการ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม จ.มหาสารคาม
ปี พ.ศ. 2552	จบการศึกษาประดับปริญญาโท วท.ม. คณิตศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยลัยขอนแก่น จ.ขอนแก่น

ประวัติการทำงาน

ปี พ.ศ. 2552	อาจารย์ประจำสาขาวิชาสถิติศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
ปี พ.ศ. 2553	อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม