บรรณานุกรม

บรรณานุกรมภาษาต่างประเทศ

Arworn, Sr., Denecke, K. 2001. Tree Transformations defined by Hypersubstitutions, General Algebra and Applications, 21, 219-227.

Burris, S., Sankappanavar, H.P. 1981. A Course in Universal Algebra, Graduate Texts in Mathematics, 78, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Changphas, Th. 2004. Monoids of Hypersubstitutions, Ph.D. Thesis, Universitat Potsdam, Potsdam, Germany.

Denecke, K., Wismath, S. L. 2002. Universal Algebra and Applications in Theoretical Computer Science, A CRC Press Company, Boca Raton-London-New York-Washington, D.C..

Denecke, K., Lau, D., Poschel, R., Schweigert, D. 1991. Hypersubstitutions, Hyperequational Classes and Clone Congruences, Contributions to General Algebra, 7: 97-118.

Leeratanavalee, S., Denecke, K. 2000. Generalized Hypersubstitutions and Strongly Solid Varieties, In General Algebra and Applications, Proc. of the “59 th Workshop on General Algebra”, “15 th Conference for Young Algebraists Potsdam 2000”, Shaker Verlag : 135-145.

Puninagool, W., Leeratanavalee, S. 2018. The Order of Generalized Hypersubstitutions of Type (2), International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2008, Article ID 263541, 8 pages, doi;10.1155/2008/263541.

Puninagool, W., Leeratanavalee, S. 2011. All Regular Elements in HypG(2), Kyungpook Mathematical Journal, 51(2) : 139-143.

Puninagool, W., Leeratanavalee, S. 2010. Complexity of term, superpositions, and generalized hypersubstitutions, Computers and Mathematics with Applications, 59. 1038-1045.doi:1016/j.camwa.2009.06.033.

Sudsanit, S., Leeratanavalee, S., Puninagool, W. 2014. Left-Right Regular Elements in HypG(2), International Journal of Pure and Applied Mathematics, 92(3) : 433-441.

Taylor, W. 1981. Hyperidentities and hypervarieties, Aequationes Math. 23 : 30–49.

Wongpinit, W., Leeratanavalee, S. 2014. The Relationship Between Some Regular Subsemigroups of HypG(2), Journal of Mathematics, Article ID 181397 : 1-3.

Wongpinit, W., Leeratanavalee, S. 2015. All Maximal Idempotent Submonoids of HypG(2), Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica, 7(1) : 106-113.

Wongpinit, W., Leeratanavalee, S. 2015. All Maximal Idempotent Submonoids of HypG(n), Surveys in Mathematics and its Applications, 10 : 41-48.

ประวัติผู้วิจัย

1. ข้อมูลเบื้องต้น

ชื่อ (ไทย) นายวีรพงษ์ วงศ์พินิจ

ชื่อ (อังกฤษ) Mr. Weerapong Wongpinit

เกิดวันที่ 21 เดือน กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2531 สัญชาติ ไทย ศาสนา พุทธ

ที่อยู่ปัจจุบัน 54/1หมู่ที่ 2 บ. ใหม่ ต. สะเดาใหญ่ อ. ขุขันธ์ จ. ศรีสะเกษ 33140

ตำแหน่งปัจจุบัน อาจารย์ สังกัด/หน่วยงาน สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม 80 ถนนนครสวรรค์ ต.ตลาด อ.เมือง จ.มหาสารคาม 44000

2. ประวัติการศึกษา

วุฒิการศึกษา	สาขา	มหาวิทยาลัย	ปีที่จบการศึกษา
วิทยาศาสตรบัณฑิต (วท.บ.)	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ	2553
วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (วท.ม.)	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่	2555
ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต (ปร.ด.)	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่	2558

3. ประวัติการทำงาน

ช่วงปีที่ทำงาน	ตำแหน่ง	หน่วยงาน
2558- ปัจจุบัน	อาจารย์	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

4. ความเชี่ยวชาญ

1 พีชคณิตเอกภพ (Universal Algebra)

2 ทฤษฎีกราฟเชิงพีชคณิต (Algebraic Graph Theory)

3 การวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (Functional Analysis)

4 รากฐานคณิตศาสตร์ (Foundation of Mathematics)

5. ผลงานวิจัย

Year	Publications	impact factor
2012	W. Wongpinit, S. Leeratanavalee, Natural Partial Order on $Hyp_G(2)$, East-West Journal of Mathematics, Vol. 14(1), 2012, pp 54-66.	-
2014	W. Wongpinit, S. Leeratanavalee, The Relationship Between Some Regular Subsemigroups of $Hyp_G(2)$, Journal of Mathematics, Article ID 181397, 2014, pp 1-3.	-
2015	W. Wongpinit, S. Leeratanavalee, All Maximal Idempotent Submonoids of $Hyp_G(2)$, Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica, Vol. 7(1), 2015, pp 106-113.	-
2015	W. Wongpinit, S. Leeratanavalee, All Maximal Idempotent Submonoids of $Hyp_G(n)$, Surveys in Mathematics and its Applications, Vol. 10, 2015, pp 41-48.	-
2016	W. Wongpinit, S. Leeratanavalee, Semisimple Elements in $Hyp_G(2)$, East-West Journal of Mathematics, Vol. 17(2), 2015, pp 166-173.	-
2018	J. Meksawang, W. Wongpinit, Isomorphism Conditions for Cayley Digraph of Brandt Semigroups, Journal of Information and Optimization Sciences, 39:2, 481-493, DOI: 10.1080/02522667.2017.1392088.	-
2018	W. Wongpinit, All Maximal Submonoid of Special Regular Clases of $Hyp_G(2)$, Thai Journal of Mathematics, Special	-

	Issue: AMM 2017, pp109-115.	

6. รางวัล

- ทุนโครงการพัฒนากำลังคนด้านวิทยาศาสตร์ (ทุนเรียนดีวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย ประจำปีการศึกษา 2553-2557

- ผลการศึกษายอดเยี่ยมขั้นวิทยาศาสตรมหาบัณฑิตของมูลนิธิศาสตราจารย์ ดร.แถบ นีละนิธิประจำปี 2555
- ทุนมูลนิธิพระบรมราชานุสรณ์พระบาทสมเด็จพระปกเกล้าเจ้าอยู่หัวและสมเด็จพระนางเจ้ารำไพพรรณี ปี 2558

7. งานวิจัยที่กำลังดำเนินการ

1. W. Wongpinit, S. Leeratanavalee, All Quasi-Regular Elements in $Hyp_G(2)$, Submitted 2017.

2. W. Wongpinit, The Relationship Between Special Generalization Regular Classes Subsemigroup of $Hyp_G(2)$, Preprint 2018.

8. **บทความที่กำลังดำเนินการ**

- W. Wongpinit, J. Meksawang, Modern of Mathematics (in Thai), Submitted 2017.

- W. Wongpinit, The Structure of Mathematics (in Thai), Preprint 2018.

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญ

ทฤษฎีออโตมาตาและภาษา (Theory of Automata and Language) เป็นสาขาที่มีบทบาทสำคัญเป็นอย่างมากในวิทยาการคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีประโยชน์มากมายต่อการพัฒนาด้านเทคโนโลยีสมัยใหม่ ทฤษฎีออโตมาตาเป็นการศึกษาการทำงานของเครื่องจักรแต่ละเครื่องในรูปแบบที่เป็นนามธรรม (abstract machine) คือพิจารณาจากตารางสถานะหรือแผนภาพสถานะนั่นเอง ซึ่งแต่ละเครื่องจักรนามธรรมเหล่านี้ เราเรียกว่า ออโตมาตา หรืออาจกล่าวอีกอย่างได้ว่า ทฤษฎีออโตมาตาเป็นการศึกษาคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์ (mathematical properties) ของเครื่องจักรนามธรรมเพื่อรองรับการนำไปใช้ประโยชน์ได้จริงในเชิงรูปธรรม(concrete) นั่นเอง ทฤษฎีออโตมาตายังมีความใกล้เคียงกับทฤษฎีภาษาซึ่งในทางคอมพิวเตอร์จะใช้ทฤษฎีภาษาสำหรับการกำหนดนิยามหรือคำจำกัดความสำหรับการเขียนภาษาโปรแกรมต่าง ๆ นอกจากนี้ยังมีประโยชน์มากในการนำไปประยุกต์ใช้กับคอมพิวเตอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการออกแบบออโตมาตาให้ทำหน้าที่เป็นเครื่องจำรูปแบบ (pattern recognizer) หรือแม้แต่การออกแบบโปรแกรมควบคุมระบบการทำงานของเครื่อง เช่น โปรแกรมแปลภาษาเครื่อง (compiler) โปรแกรมสร้างหรือแก้ไขเอกสาร (text editor) เป็นต้น ภาษา (language) คือกลุ่มของคำต่าง ๆ ในทางคณิตศาสตร์จะแทนภาษาด้วยเซตของคำ (word) ต่าง ๆ แล้ว“คำ” คืออะไร? เราจะเริ่มด้วยการ ให้ $X_n := \{x_1, x_2, ..., x_n\}, X := \{x_1, x_2, x_3...\}$ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ใด ๆ X_n เป็นอักขระ (alphabet) หรือเซตของตัวอักษร (letter) ที่มีสมาชิก n ตัว ดังนั้น คำที่เกิดจากอักขระ X_n ก็คือ ตัวอักษรหรือสตริงที่จำกัดตัวอักษรใด ๆ เราสามารถเขียนคำจำกัดความหรือให้นิยามของ “คำ” ได้ดังต่อไปนี้ :

(1) แต่ละ $x_i \in X_n$ เป็น คำที่เกิดจากอักขระ X_n

(2) ถ้า t เป็นคำที่เกิดจากอักขระ X_n และ $x_j \in X_n$ แล้วทั้ง $x_j t$ และ tx_j ก็เป็นคำที่เกิดจากอักขระ X_n

เราสามารถให้นิยามโดยทั่วไปของคำในทางคณิตศาสตร์ได้ จากนั้นได้นำไปใช้ประโยชน์ในการศึกษาทรีทรานสดิวเซอร์ (Tree transducer) ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไป (generalization) ของออโตมาตา เรายังได้อีกว่าทรีทรานสฟอร์เมชัน (tree transformation) ที่นิยามขึ้นมาจาก ฟังก์ชันไฮเพอร์สับสติตูชัน

(hypersubstitution) นั้น เราก็สามารถศึกษาได้ด้วยทรีทรานสดิวเซอร์ การประกอบกันของฟังก์ชันทรีทรานสฟอร์เมชันได้ถูกนำมาใช้ในวิทยาการคอมพิวเตอร์เพื่อแปลภาษารูปนัย (formal language) จากภาษาหนึ่งไปสู่อีกภาษาหนึ่งได้อย่างเป็นขั้นเป็นตอน ดังนั้นความรู้เรื่องสมาชิกนิจพล (idempotent) ของไฮเพอร์สับสติตูชันได้กลายมาเป็นประโยชน์อย่างมากสำหรับทรีทรานสฟอร์เมชัน

ในงานวิจัยนี้เราจะแนะนำแนวคิดของกึ่งกรุปปรกติ (regular semigroup) ซึ่งถือว่ามีบทบาทสำคัญอย่างมากในทฤษฎีพีชคณิตของของกึ่งกรุป (algebraic theory of semigroups) และยังเป็นการวางนัยทั่วไปของกึ่งกรุปนิจพล (idempotent semigroup) ดังนั้นการศึกษาสมบัติทางพีชคณิตของเซตไฮเพอร์สับสติตูชันเรื่องนี้ เป็นการศึกษาโมนอยด์หรือกึ่งกรุปย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของบรรดาคลาสปรกติชนิดพิเศษของเซตเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันชนิด $\tau=(2)$ ซึ่งองค์ความรู้ใหม่ที่คาดว่าจะได้รับ คือ ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ ซึ่งองค์ความรู้ใหม่ที่ได้ข้างต้นนั้นจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญยิ่งเพื่อรองรับการพัฒนาวิชาการในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้องตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งในสาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์ อันจะเป็นรากฐานสำคัญยิ่งในการพัฒนาองค์ความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีของประเทศให้เจริญก้าวหน้า ซึ่งนับว่าเป็นสิ่งสำคัญอย่างมาก

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เป้าหมายหลักของโครงการอยู่ที่การสร้างองค์ความรู้ใหม่และการขยายขอบเขตองค์ความรู้เดิมให้กว้างขวางยิ่งขึ้นกว่าเดิมตามรายละเอียดดังนี้

1. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างบรรดาคลาสปรกติชนิดพิเศษบางชนิด
2. เพื่อหาโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติชนิดพิเศษของเซตเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันชนิด $\tau=(2)$

ขอบเขตการวิจัย

การวิจัยนี้ผู้วิจัยจะศึกษาเฉพาะบนเซตของเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันชนิด $\tau=(2)$ เท่านั้น

สมมติฐานการวิจัย

โมนอยด์ย่อยนิจพลใหญ่สุดของ $Hyp_G(2)$ ทั้งหมด จะเป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติชนิดพิเศษบางชนิดของเซตเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันชนิด $\tau=(2)$

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยพื้นฐาน ซึ่งเป็นการสร้างองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับทฤษฎีในทางพีชคณิตจักรวาล ผลจากการวิจัยจะมีประโยชน์ในด้านวิชาการ และเป็นความรู้พื้นฐานในการพัฒนาต่อยอดองค์ความรู้ทางด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์อย่างดี หน่วยงานที่นำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์มากที่สุด คือ กลุ่มนักวิจัยทางพีชคณิตจักรวาล ทางคณิตศาสตร์ประยุกต์ ทางสาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์ เราสามารถสรุปประโยชน์จากงานวิจัยนี้ได้ดังนี้

1. ได้องค์ความรู้ใหม่ทางด้านคณิตศาสตร์คือได้ความสัมพันธ์ระหว่างบรรดาคลาสปรกติชนิดพิเศษบางชนิดและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง
2. ได้ทราบโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติชนิดพิเศษของเซตเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันชนิด (2)
3. ใช้เป็นสื่อประกอบการเรียนการสอนในรายวิชาพีชคณิตนามธรรมและวิชาโครงงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
4. เพื่อให้นักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์และผู้สนใจทำงานวิจัยในทางคณิตศาสตร์ได้มองเห็นถึงแนวคิดและวิธีการคิดงานวิจัย
5. เพื่อใช้เป็นองค์ความรู้พื้นฐานสำหรับผู้ที่สนใจในงานวิจัยในด้านนี้ให้สามารถนำไปใช้และประยุกต์กับงานวิจัยอื่น ๆ เช่น ในด้าน วิทยาการคอมพิวเตอร์ ฟิสิกส์ เคมี วิศวกรรมเป็นต้น

บทที่ 2
แนวคิด ทฤษฎี เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 พีชคณิต (Algebras)

ให้ A เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และให้ $n \in N \cup \{0\}$ เมื่อ N เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ (natural number) เรานิยาม $A^0 = \{\varnothing\}$ และ $A^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1, ..., a_n \in A\}$ จะเรียกฟังก์ชัน $f^n : A^n \to A$ ว่า ***การดำเนินการลำดับ*** n ***ที่นิยามบน*** A (n-ary operation define on A) และจะเรียกฟังก์ชันดังกล่าวว่ามี ***อาริตี้*** n ให้ $(f_i)_{i\in I}$ เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ n_i (n_i- ary operation symbol) เมื่อ I เป็นเซตดรรชนี (indexed set) จะเรียกลำดับ $\tau = (n_i)_{i\in I}$ ว่า ***ชนิด (type)*** ของอาริตี้ของ f_i

เรานิยาม ***พีชคณิตชนิด*** τ (algebra of type τ) คือคู่อันดับ $\mathrm{A} := \left(A, (f_i^{\ A})_{i\in I}\right)$ เมื่อ A เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่เป็นเซตว่างและ $(f_i^{\ A})_{i\in I}$ เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ n_i โดยทั่วไปจะเขียน A แทน $\left(A, (f_i^{\ A})_{i\in I}\right)$ กำหนดให้ $\mathrm{Alg}_f(\tau)$ แทนคลาสของพีชคณิตชนิด τ ทั้งหมดและให้ $\mathrm{Alg}_f(\tau)$ แทนคลาสของพีชคณิตจำกัดชนิด τ ทั้งหมด

2.2 กึ่งกรุปปรกติ (Regular Semigroups)

นิยาม 2.3.1 ให้เซต $S \neq \varnothing$ เรียก $(S,\cdot)$ **ว่า *กรุปปอยด์ (Groupoid)*** ถ้า $\cdot$ **เป็น*การดำเนินการทวิภาค (Binary operation)* บน** S **และจะเรียกกรุปปอยด์** $(S,\cdot)$ **ว่า *กึ่งกรุป (Semigroup)*** ถ้า $\cdot$ มี ***สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (Associative)*** นั่นคือ สำหรับทุกๆ $a, b, c \in S$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

<u>**หมายเหตุ**</u> เพื่อความสะดวกและไม่ให้เกิดความสับสนเราจะเขียน S แทน $(S,\cdot)$ และจะใช้ ab **แทน** $a \cdot b$

นิยาม 2.3.2 จะเรียกสมาชิก $e \in S$ **ว่า *สมาชิกเอกลักษณ์ (Identity)* ของ** S ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $a \in S, ae = a = ea$

นิยาม 2.3.3 กึ่งกรุปที่มีสมาชิกเอกลักษณ์จะเรียกว่า ***โมนอยด์ (Monoid)*** และจะเรียกโมนอยด์ S ว่า ***กรุป(Group)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ มี $b \in S$ ที่ทำให้ $ab = e = ba$

นิยาม 2.3.4 ให้ S เป็นกึ่งกรุปใด ๆ เรียกสมาชิก $a \in S$ ว่าเป็น ***ปรกติ (regular)*** ถ้ามี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = aba$ เรียกกึ่งกรุป S ว่า ***ปรกติ*** ถ้าสมาชิกทุกตัวของ S เป็นปรกติ

นิยาม 2.3.5 ให้ S เป็นกึ่งกรุปใด ๆ เราจะเรียกสมาชิก $a \in S$ ว่าเป็น ***นิจพล (idempotent)*** ถ้า $aa = a$ เราเขียนแทนเซตของสมาชิกนิจพลทั้งหมดของกึ่งกรุป S ด้วย $E(S)$

นิยาม 2.3.6 เรียกกึ่งกรุป S ว่าเป็น ***โคปรกติ (coregular)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ จะมี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = aba = bab$

นิยาม 2.3.7 เรียกกึ่งกรุป S ว่าเป็น ***ปฏิปรกติ (anti-regular)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ จะมี $b \in S$ ที่ทำให้ $b = aba$ และ $a = bab$

นิยาม 2.3.8 เรียกกึ่งกรุป S ว่าเป็น ***ปรกติบริบูรณ์ (completely-regular)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ จะมี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = aba$ และ $ab = ba$

นิยาม 2.3.9 เรียกกึ่งกรุป S ว่าเป็น ***ปรกติทางขวา (right regular)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ จะมี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = a^2b$ และ S เป็น ***กึ่งกรูปปรกติทางซ้าย (left regular)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ จะมี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = ba^2$

นิยาม 2.3.10 และจะเรียกกึ่งกรุป S ว่าเป็น ***ปรกติอินทรา (intra- regular)*** ถ้า $a \in Sa^2S$ สำหรับแต่ละ $a \in S$

2.3 เทอมและเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน (Terms and Generalized Hypersubstitutions)

เราสามารถขยายแนวคิดของ “คำ” ให้อยู่ในรูปแบบอย่างทั่ว ๆ ไป (general) ได้ดังต่อไปนี้ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $X_n := \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นเซตของตัวแปร (variables) ที่มีสมาชิก n ตัว $X := \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ และ $\{ f_i \mid i \in I\}$ เป็นเซตของสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ n_i (n_i- ary operation symbol) และ I เป็นเซตดรรชนี และให้ $\tau = (n_i)_{i \in I}$ เป็น ชนิด (type) ของ อาริตี ของ f_i (the arity of f_i) และนิยามเทอมลำดับ n ชนิด $\tau = (n_i)_{i \in I}$ โดยวิธีอุปนัยดังนี้ :

(1) สำหรับทุก $x_i \in X_n$ เป็นเทอมลำดับ n ชนิด τ

(2) ถ้า $t_1, t_2, ..., t_{n_i}$ เป็นเทอมลำดับ n ชนิด τ แล้ว $f_i(t_1, t_2, ..., t_{n_i})$ เป็นเทอมลำดับ n ชนิด τ ด้วย โดยเราใช้สัญลักษณ์ $W_\tau(X_n)$ แทนเซตที่เล็กที่สุดของเทอมอันดับ n ชนิด τ ที่มี $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นสมาชิกและที่มีสมบัติปิดภายใต้การกระทำในข้อ (2) จำนวนจำกัดครั้ง และให้ $W_\tau(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_\tau(X_n)$ เป็นเซตของเทอมชนิด τ ทั้งหมดโดยใช้ขั้นตอนที่ (2) ในนิยามของเทอมลำดับ ทำให้เราได้พีชคณิตเทอม $F_\tau(X) := (A, (\bar{f}_i)_{i \in I})$ ชนิด τ และจะเรียกพีชคณิตเทอมนี้ว่า

absolutely free algebra เมื่อ $W_\tau(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}W_\tau(X_n)$ เป็นเซตของเทอมชนิด τ ทั้งหมดและ $(\bar{f}_i)_{i\in I}$ เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ n_i บน $W_\tau(X)$ นิยามโดย $\bar{f}_i(t_1,...t_{n_i}):=f_i(t_1,...t_{n_i})$ สำหรับทุก ๆ $i\in I$ ซึ่ง f_i เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ n_i และ $t_1,...t_{n_i}\in W_\tau(X)$

ในปี ค.ศ. 1991 K. Denecke, D. Lau, R. Poschel และ D. Schweigert ได้นิยามแนวคิดเกี่ยวกับไฮเพอร์สับสติตูชัน นั่นคือ ไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด τ คือ ฟังก์ชัน $\sigma:\{f_i \mid i\in I\}\to W_\tau(X)$ ซึ่ง $\sigma(f_i)\in W_\tau(X_{n_i})$ และแต่ละไฮเพอร์สับสติตูชัน σ จะกำหนดการดำเนินการ $\hat{\sigma}:W_\tau(X)\to W_\tau(X)$ โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้:

(1) $\hat{\sigma}[x]:=x$ ทุก $x\in X$

(2) $\hat{\sigma}[f_i(t_1,t_2,...,t_{n_i})]:=\sigma(f_i)\left(\hat{\sigma}[t_1],\hat{\sigma}[t_2],...,\hat{\sigma}[t_{n_i}]\right)$ โดยที่ $\hat{\sigma}[t_j]$ กำหนดค่าแล้วทุก $1\le j\le n_i$

ให้ $Hyp(\tau)$ แทนเซตของไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด τ ทั้งหมดและกำหนดการดำเนินการทวิภาค o_h บน $Hyp(\tau)$ ดังนี้ สำหรับ $\sigma_1,\sigma_2\in Hyp(\tau)$

$$\sigma_1 o_h \sigma_2 := \hat{\sigma}_1 \, o \, \sigma_2$$ โดยที่ o เป็นการประกอบของฟังก์ชันปกติ

ให้ σ_{id} เป็นไฮเพอร์สับสติตูชันที่กำหนดโดย สำหรับแต่ละ $i\in I$

$$\sigma_{id}(f_i)=f_i(x_1,x_2,...,x_{n_i})$$

ทำให้เราได้ว่า $(Hyp(\tau);o_h,\sigma_{id})$ เป็นโมนอยด์ (monoid) ที่มี σ_{id} เป็นสมาชิกเอกลักษณ์

ในปี ค.ศ. 2000 S. Leeratanavalee และ K. Denecke ได้วางนัยทั่วไปของแนวคิดของไฮเพอร์สับสติตูชัน ไปเป็น เจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน นั่นคือ เจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด τ คือ ฟังก์ชัน $\sigma:\{f_i \mid i\in I\}\to W_\tau(X)$ โดยที่ $\sigma(f_i)\in W_\tau(X)$ เราแทนเซตของเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด τ ทั้งหมดด้วย $Hyp_G(\tau)$ ซึ่งในการนิยามการดำเนินการทวิภาคบน $Hyp_G(\tau)$ เราจะนิยามแนวคิดของ เจเนอรัลไลซ์ซุปเปอร์โพสิชันของเทอม $S^m:W_\tau(X)^{m+1}\to W_\tau(X)$ ดังนี้

(1) ถ้า $t=x_j, 1\le j\le m$ แล้ว $S^m(x_j,t_1,t_2,...,t_m):=t_j$

(2) ถ้า $t=x_j, m<j$ แล้ว $S^m(x_j,t_1,t_2,...,t_m):=x_j$

(3) ถ้า $t=f_i(s_1,s_2,...,s_{n_i})$ แล้ว

$$S^m\left(t, t_1, t_2, \ldots, t_m\right) := f_i\left(S^m\left(s_1, t_1, t_2, \ldots, t_m\right), \ldots, S^m\left(s_{n_i}, t_1, t_2, \ldots, t_m\right)\right)$$

ซึ่งเราจะขยาย เจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน σ ไปเป็นฟังก์ชัน $\hat{\sigma} : W_\tau(X) \to W_\tau(X)$ โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้:

(1) $\hat{\sigma}[x] := x$ ทุก $x \in X$

(2) $\hat{\sigma}[f_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n_i})] := S^{n_i}\left(\sigma(f_i), \hat{\sigma}[t_1], \hat{\sigma}[t_2], \ldots, \hat{\sigma}[t_{n_i}]\right)$ โดยที่ $\hat{\sigma}[t_j]$ กำหนดค่าแล้วทุก $1 \le j \le n_i$

กำหนดการดำเนินการทวิภาค o_G บน $Hyp_G(\tau)$ ดังนี้ สำหรับ $\sigma_1, \sigma_2 \in Hyp_G(\tau)$

$\sigma_1 o_G \sigma_2 := \hat{\sigma}_1 \, o \, \sigma_2$ โดยที่ o เป็นการประกอบของฟังก์ชันปกติ ให้ σ_{id} เป็นเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันที่กำหนดโดย สำหรับแต่ละ $i \in I$

$$\sigma_{id}(f_i) = f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}\right)$$

ซึ่งเราได้ว่า $\left(Hyp_G(\tau); o_G, \sigma_{id}\right)$ เป็นโมนอยด์ที่มี σ_{id} เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ และเรายังได้อีกว่า เซตของไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด τ ทั้งหมด เป็นโมนอยด์ย่อยของ $\left(Hyp_G(\tau); o_G, \sigma_{id}\right)$

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 วิธีการดำเนินการวิจัย

1. ทำการรวบรวมเอกสารที่มีอยู่ที่เกี่ยวข้องกับโครงการวิจัย และจัดหาเอกสารที่จำเป็นเพิ่มเติมโดยการสืบค้นจากฐานข้อมูลต่างๆ ทั้งในและต่างประเทศ
2. ศึกษาแนวคิดและความรู้พื้นฐานทั้งหมดที่เกี่ยวข้องด้านพีชคณิตเอกภพ
3. เข้าร่วมประชุมสัมมนาเกี่ยวกับพีชคณิตเอกภพในการประชุมวิชาการคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 12 ณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน วิทยาเขตขอนแก่น โดยวิทยากร Prof.Dr. Klaus Denecke จาก Postsdam University ประเทศเยอรมัน
4. ลงมือทำงานวิจัยและสรุปผลการศึกษาวิจัย
5. เข้าร่วมและเสนอผลงานวิจัยในการประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ ประจำปี 2560 (AMM 2017) ณ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ และได้นำงานวิจัยไปตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ Thai Journal of Mathematics เพื่อเผยแผ่องค์ความรู้ให้เกิดประโยชน์ต่อประเทศชาติต่อไป

3.2. ระยะเวลาการวิจัย

ระยะเวลาโครงการ 1 ปี
วันที่เริ่มต้น 1 ตุลาคม 2560 วันที่สิ้นสุด 30 กันยายน 2561

3.3 สถานที่ทำการวิจัย

ในประเทศ/ต่างประเทศ	จังหวัด	พื้นที่ที่ทำวิจัย	ชื่อสถานที่
ไทย	มหาสารคาม	มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม	สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ไทย	เชียงใหม่	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่	ภาควิชาคณิตศาสตร์

3.4 แผนการดำเนินงานวิจัย

กิจกรรมที่ทำ	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.
1. รวบรวมเอกสาร งานวิจัยและกำหนดปัญหา	⟷	⟷										
2. ทำความเข้าใจพื้นฐาน โดยศึกษาจากเอกสารอ้างอิง		⟷	⟷									
3. หาโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติชนิดพิเศษของเซต $Hyp_G(2)$				⟷	⟷	⟷						
4. ลงมือพิมพ์งานวิจัย							⟷					
5. ทำการตรวจสอบ แก้ไขและ ส่งงานวิจัยตีพิมพ์ในวารสาร								⟷	⟷	⟷	⟷	
6. สรุปและทำรายงายผลการทำวิจัย												⟷

3.5 ปัจจัยที่เอื้อต่อการวิจัย (อุปกรณ์การวิจัย โครงสร้างพื้นฐาน อื่น ๆ) ระบุเฉพาะปัจจัยที่ต้องการเพิ่มเติม

3.5.1 ระบุเฉพาะปัจจัยที่ต้องการเพิ่มเติม

1. เอกสาร ตำรา วารสาร
2. วัสดุเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์ที่จำเป็น

บทที่ 4
ผลการวิจัย

ตลอดการดำเนินงานวิจัยนี้ เราให้ f เป็นสัญลักษณ์แทนการดำเนินการทวิภาค ชนิด $\tau = (2)$ โดย σ_t แทนเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันซึ่งส่ง f ไปที่ $t \in W_{(2)}(X)$

4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างกึ่งกรูปย่อยของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ (Relationship Between Subsemigroup of Special Regular Classes of $Hyp_G(2)$)

สำหรับ $t \in W_{(2)}(X)$ เราจะแนะนำบรรดานิยามแนวคิดของสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

1. $leftmost\ (t) :=$ ตัวแปรแรกที่เกิดขึ้น (จากทางซ้าย) ใน t
2. $rightmost\ (t) :=$ ตัวแปรสุดท้ายที่เกิดขึ้น ใน t
3. $\mathrm{var}(t) :=$ เซตของตัวแปรทั้งหมดที่เกิดขึ้นใน t

ให้ $\sigma_t \in Hyp_G(2)$ เราจะแทน

$R_1 := \{\sigma_t \in Hyp_G(2) \mid t = f(x_1, t')$ โดยที่ $t' \in W_{(2)}(X)$ และ $x_2 \notin \mathrm{var}(t)\}$

$R_2 := \{\sigma_t \in Hyp_G(2) \mid t = f(t', x_2)$ โดยที่ $t' \in W_{(2)}(X)$ และ $x_1 \notin \mathrm{var}(t)\}$

$R_3 := \{\sigma_t \mid t \in \{x_1, x_2, f(x_1, x_2)\}\}$ และ

$R_4 := \{\sigma_t \mid \mathrm{var}(t) \cap \{x_1, x_2\} = \varnothing\}$

ใน ปี ค.ศ. 2010 W. Puninagool และ S. Leeratanavalee แสดงได้ว่า $E(Hyp_G(2)) = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$

ให้ $\sigma_t \in Hyp_G(2)$ เราจะแทน

$R_1' := \{\sigma_t \in Hyp_G(2) \mid t = f(x_1, t')$ โดยที่ $t' \in W_{(2)}(X)$, $x_2 \notin \mathrm{var}(t')$ และ $rightmost\,(t') \neq x_1\}$

$R_2' := \{\sigma_t \in Hyp_G(2) \mid t = f(t', x_2)$ โดยที่ $t' \in W_{(2)}(X)$, $x_1 \notin \mathrm{var}(t')$ และ $leftmost\,(t') \neq x_2\}$

และแทน

$$(MI)_{Hyp_G(2)} = R'_1 \cup R'_2 \cup R_3 \cup R_4$$
$$(MI_1)_{Hyp_G(2)} = R_1 \cup R_3 \cup R_4$$
$$(MI_2)_{Hyp_G(2)} = R_2 \cup R_3 \cup R_4 \text{ และ}$$
$$(MSR)_{Hyp_G(2)} = \{\sigma_{f(x_1,x_1)}, \sigma_{f(x_2,x_2)}, \sigma_{f(x_2,x_1)}\} \cup R_3 \cup R_4$$

ใน ปี ค.ศ. 2014 W. Wongpinit และ S. Leeratanavalee ได้หาว่า $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ เป็นเซตนิจพลย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของ $Hyp_G(2)$

และในปีเดียวกันนั้นเอง W. Wongpinit และ S. Leeratanavalee ยังได้แสดงได้ด้วยว่า $E(Hyp_G(2)) \cup \{\sigma_{f(x_2,x_1)}\}$ เป็นเซตของสมาชิกโคปรกติ ปฏิปรกติ ปรกติบริบูรณ์ ปรกติทางซ้าย ปรกติทางขวา และปรกติอินทรา ทั้งหมดของ $Hyp_G(2)$

นิยาม 4.1.1 ให้ S เป็นกึ่งกรุปใด ๆ เราเรียก $\varnothing \neq T \subseteq S$ ว่าเป็น *กึ่งกรุปย่อย (subsemigroup)* ของ S ถ้า $T^2 \subseteq T$

นิยาม 4.1.2 เราเรียกกึ่งกรุปย่อย T **ของ** S ว่าเป็น *กึ่งกรุปย่อยปรกติ (regular subsemigroup)* ของ S ถ้าแต่ละ $a \in T$ **มี** $b \in T$ ที่ทำให้ $a = aba$

ทำให้เราได้บทตั้งที่สำคัญมากต่อไปนี้

บทตั้ง 4.1.3 ให้ R เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $Hyp_G(2)$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. R เป็นโคปรกติ
2. R เป็นปฏิปรกติ
3. R เป็นปรกติบริบูรณ์
4. R เป็นปรกติทางขวา
5. R เป็นปรกติทางซ้าย
6. R เป็นปรกติทางซ้าย

โดยใช้ข้อเท็จจริงดังกล่าวในบทตั้งและเพื่อความสะดวก คลาสของโคปรกติ ปฏิปรกติ ปรกติบริบูรณ์ ปรกติทางขวา ปรกติทางซ้าย และปรกติอินทรา เราจะตกลงเรียกร่วมกันว่าเป็น *คลาสปรกติพิเศษ* (special regular classes) ของ $Hyp_G(2)$

4.2 โมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ (All Maximal Subsemigroup of Special Regular Classes of $Hyp_G(2)$)

เราสามารถพิสูจน์พรอพโพสิชันได้ดังต่อไปนี้

พรอพโพสิชัน 4.2.1 เราได้ว่า $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของบรรดาคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยนิจพลใหญ่สุดของ $Hyp_G(2)$ เราจะได้ว่า $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ เราจะแสดงว่า $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของบรรดาคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

กรณีที่ $(MI)_{Hyp_G(2)}$ **:** เราให้ K เป็นโมนอยด์ย่อยแท้ใด ๆ ของ $Hyp_G(2)$ โดยที่ $(MI)_{Hyp_G(2)} \subseteq K \subset Hyp_G(2)$ ให้ $\sigma_t \in K$ เราสมมติว่า $f(x_2, x_1) \in K$ เราเลือก $t = f(x_1, t')$ โดยที่ $t' \in W_{(2)}(X)$, $x_1, x_2 \notin \text{var}(t')$ พิจารณา

$$\begin{aligned}(\sigma_t \circ_G \sigma_{f(x_2,x_1)})(f) &= \hat{\sigma}_t[f(x_2, x_1)] \\ &= S^2(f(x_1, t'), x_2, x_1) \\ &= f(x_2, t')\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sigma_t \circ_G \sigma_{f(x_2,x_1)} \notin K$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่ K เป็นโมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ ดังนั้น $f(x_2, x_1) \notin K$ นั่นคือ $(MI)_{Hyp_G(2)} = K$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

กรณีที่ $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ **:** เราให้ K เป็นโมนอยด์ย่อยแท้ใด ๆ ของ $Hyp_G(2)$ โดยที่ $(MI)_{Hyp_G(2)} \subseteq K \subset Hyp_G(2)$ ให้ $\sigma_t \in K$ เราสมมติว่า $f(x_2, x_1) \in K$ เราเลือก $t = f(x_1, t')$ โดยที่ $t' \in W_{(2)}(X)$, $x_1, x_2 \notin \text{var}(t')$ พิจารณา

$$\begin{aligned}(\sigma_t \circ_G \sigma_{f(x_2,x_1)})(f) &= \hat{\sigma}_t[f(x_2, x_1)] \\ &= S^2(f(x_1, t'), x_2, x_1) \\ &= f(x_2, t')\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sigma_t \circ_G \sigma_{f(x_2,x_1)} \notin K$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่ K เป็นโมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ ดังนั้น $f(x_2, x_1) \notin K$ นั่นคือ $(MI)_{Hyp_G(2)} = K$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

กรณีที่ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ สามารถพิสูจน์คล้ายกับกรณี $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$

บทแทรก 4.2.2 ทุก ๆ นิจพลย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของ $Hyp_G(2)$ จะเป็นกึ่งกรูปย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

พิสูจน์ เห็นได้ชัดเจนโดยตรงจาก **พรอพโพสิชัน 4.2.1**

พรอพโพสิชันที่จะกล่าวต่อไปนี้ เราจะแสดงว่าบทกลับของ **บทแทรก 4.2.2** ไม่เป็นความจริงในกรณีทั่ว ๆ ไป

พรอพโพสิชัน 4.2.3 เราได้ว่า $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

พิสูจน์ เราจะแสดงว่าเซต $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ โดยพิจารณาจาก $\sigma_{id} \in (MSR)_{Hyp_G(2)}$ และ $\{\sigma_{f(x_1,x_1)}, \sigma_{f(x_2,x_2)}, \sigma_{f(x_2,x_1)}\}(MSR)_{Hyp_G(2)} \subseteq (MSR)_{Hyp_G(2)}$ และ

$(R_3 \cup R_4)(MSR)_{Hyp_G(2)} \subseteq (MSR)_{Hyp_G(2)}$ เราจะได้ว่า $(MSR)^2{}_{Hyp_G(2)} \subseteq (MSR)_{Hyp_G(2)}$ ดังนั้น $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ โมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ **เรา**ให้ K เป็นโมนอยด์ย่อยแท้ของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ โดยที่ $(MSR)_{Hyp_G(2)} \subseteq K \subset Hyp_G(2)$ ให้ $\sigma_t \in K$ ถ้า $\sigma_t \in R_2$ โดยที่

$t = f(t', x_2) \neq f(x_2, x_2)$ โดยที่ $x_1 \notin \mathrm{var}(t')$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t)(f) &= \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[f(t', x_2)] \\
&= S^2\left(f(x_2, x_1), \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'], x_2 \right) \\
&= f\left(x_2, \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'] \right) \\
&\neq f(x_2, x_2)
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t$ ไม่มีสมบัติปิดซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่ K เป็นโมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ ดังนั้น $t = f(x_2, x_2)$

ถ้า $\sigma_t \in R_1$ โดยที่

$t = f(x_1, t') \neq f(x_1, x_1)$ โดยที่ $x_2 \notin \mathrm{var}(t')$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t)(f) &= \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[f(x_1, t')] \\
&= S^2\left(f(x_2, x_1), x_1, \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'] \right) \\
&= f\left(\hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'], x_1 \right) \\
&\neq f(x_1, x_1)
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t$ ไม่มีสมบัติปิดซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่ K เป็นโมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ ดังนั้น $t = f(x_1, x_1)$ นั่นคือ $(MSR)_{Hyp_G(2)} = K$

ทฤษฎีบท 4.2.4 เราได้ว่าเซต $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

พิสูจน์ เราให้ M เป็นเป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดใด ๆ ของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ เราจะแบ่งพิจารณาออกเป็นสองกรณี

กรณีที่ 1 : ถ้า $f(x_2, x_1) \notin M$ เราจะได้ว่า M เป็นโมนอยด์ย่อยนิจพลใหญ่สุดของ $Hyp_G(2)$ โดยการใช้ **บทแทรก 4.2.2** เราได้ว่า $M \in \{(MI)_{Hyp_G(2)}, (MI_1)_{Hyp_G(2)}, (MI_2)_{Hyp_G(2)}\}$

กรณีที่ 2 : ถ้า $f(x_2, x_1) \in M$ เราพิจารณา $\sigma_t \in M \setminus (\{\sigma_{f(x_2,x_1)}\} \cup R_3 \cup R_4)$

ถ้า $\sigma_t \in R_2$ โดยที่

$t = f(t', x_2)$ โดยที่ $x_1 \notin \mathrm{var}(t')$ พิจารณา

$$(\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t)(f) = \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[f(t', x_2)]$$
$$= S^2\left(f(x_2, x_1), \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'], x_2\right)$$
$$= f\left(x_2, \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t']\right) \in M$$

ดังนั้น $t = f(x_2, x_2)$

ถ้า $\sigma_t \in R_1$ โดยที่

$t = f(x_1, t')$ โดยที่ $x_2 \notin \mathrm{var}(t')$ พิจารณา

$$(\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t)(f) = \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[f(x_1, t')]$$
$$= S^2\left(f(x_2, x_1), x_1, \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t']\right)$$
$$= f\left(\hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'], x_1\right) \in M$$

ดังนั้น $t = f(x_1, x_1)$

จะได้ว่า $\sigma_t \in (MSR)_{Hyp_G(2)}$ นั่นคือ $M \subseteq (MSR)_{Hyp_G(2)}$

เนื่องจาก M เป็นเป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดใด ๆ ของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ เราได้ว่า $M = (MSR)_{Hyp_G(2)}$ จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 เราจึงสรุปได้ว่า

$(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย

จากผลการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ทำให้เราได้ทราบลักษณะของโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดบน $Hyp_G(2)$ โดยมีทฤษฎีบทที่ได้พิสูจน์ไว้ดังต่อไปนี้

1. **พรอพโพสิชัน 4.2.1** เราได้ว่า $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของบรรดาคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

2. **บทแทรก 4.2.2** ทุก ๆ นิจพลย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของ $Hyp_G(2)$ จะเป็นกึ่งกรูปย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

3. พรอพโพสิชัน 4.2.3 เราได้ว่า $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

4. **ทฤษฎีบท 4.2.4** เราได้ว่าเซต $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

อภิปรายผล

จากการศึกษาค้นคว้าวิจัยในครั้งนี้ สรุปผลได้ว่าเป็นไปตามสมมติฐานที่เราได้คาดการณ์ไว้ตั้งแต่เริ่มต้น ทั้งนี้ยังได้บทแทรกที่มีความครอบคลุมงานวิจัยเดิมที่ผู้วิจัยได้เคยศึกษามาก่อนอีกด้วยซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการอ้างอิงในงานวิจัยครั้งต่อๆ ไปเพิ่มมาอีกด้วย

ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

การทำงานวิจัยในครั้งนี้เป็นการสร้างองค์ความรู้ใหม่เพื่อเป็นพื้นฐานในการพัฒนาองค์ความรู้ทางวิทยาศาสตร์โดยเฉพาะนักคณิตศาสตร์รุ่นใหม่และทางคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีความสำคัญทำให้เห็นถึงลักษณะโครงสร้างทางคณิตศาสตร์และเกิดแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้กว้างขวางและลึกซึ้งยิ่งขึ้น ทั้งยัง

ทำให้เกิดองค์ความรู้ใหม่ขึ้นในสาขาวิชาพีชคณิตเอกภพ ซึ่งได้มีนักคณิตศาสตร์มากมายให้ความสนใจศึกษาและวิจัยในสาขาดังกล่าวกันอย่างต่อเนื่อง เพราะในการคิดค้นทฤษฎีเพื่อหาองค์ความรู้ใหม่ ๆ นั้นนับว่ามีประโยชน์เป็นอย่างมากต่อทางวิชาการและการพัฒนาประเทศ ซึ่งเป็นที่ยอมรับว่าทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ ๆ ที่เกิดจากการวิจัยนั้น นอกจากจะมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการในสาขาและแขนงต่างๆ แล้วยังสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาอื่น ๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการรองรับการพัฒนาทางวิทยาศาสตร์พื้นฐาน (Basic science) อีกด้วย อันถือเป็นรากฐานสำคัญในการพัฒนาองค์ความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีของประเทศให้เจริญก้าวหน้า ซึ่งนับว่าเป็นสิ่งสำคัญยิ่ง

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

การทำงานวิจัยนี้ เป็นการศึกษาที่บรรดาคลาสปรกติชนิดพิเศษของ $Hyp_G(2)$ และได้องค์ความรู้ตามที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เราสามารถใช้แนวคิดนี้ไปประยุกต์กับการศึกษาบนกึ่งกรูปปรกติของ $Hyp_G(2)$ ได้อีก

สารบัญ

รายงานการวิจัย

เรื่อง

โมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติพิเศษบางชนิดของ $Hyp_G(2)$

All Maximal Submonoids of Some Special Regular Classes of $Hyp_G(2)$

วีรพงษ์ วงศ์พินิจ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

2561

(งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ปีงบประมาณ 2560)

รายงานการวิจัย

เรื่อง

โมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติพิเศษบางชนิดของ $Hyp_G(2)$

All Maximal Submonoids of Some Special Regular Classes of $Hyp_G(2)$

วีรพงษ์ วงศ์พินิจ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

2561

(งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ปีงบประมาณ 2560)

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยเล่มนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก อาจาย์อัฐชัย ชฎา ซึ่งท่านได้ให้คำแนะนำและให้ข้อคิดเห็นต่าง ๆ เพิ่มเติมจนเสร็จสมบูรณ์ยิ่งขึ้น งานวิจัยเล่มนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ซึ่งให้การสนับสนุนค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ในการดำเนินงานวิจัยเล่มนี้จนทำให้งานวิจัยเล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ที่ลืมไม่ได้เลยขอขอบคุณอาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคามทุกท่านที่มีส่วนช่วยเหลือให้คำปรึกษาและเป็นกำลังใจให้ในขณะที่ทำงานวิจัยเรื่องนี้

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ครูและอาจารย์ทุกท่านที่คอยอบรมสั่งสอนและให้การสนับสนุนด้วยดีเสมอมาจนทำให้งานวิจัยเล่มนี้สำเร็จไปด้วยดี

วีรพงษ์ วงศ์พินิจ

2561

หัวข้อวิจัย	โมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติพิเศษบางชนิดของ $Hyp_G(2)$
ผู้ดำเนินการวิจัย	นายวีรพงษ์ วงศ์พินิจ
ที่ปรึกษา	-
หน่วยงาน	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
ปี พ.ศ.	2561

บทคัดย่อ

ในการวิจัยครั้งนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาหาโครงสร้างของโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษบางชนิดทั้งหมดของโมนอยด์ $Hyp_G(2)$ ซึ่งเป็นเซตของเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันชนิด $\tau=(2)$ ทั้งหมด ผลการศึกษาทำให้เราได้ลักษณะทั้งหมดของโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษบางชนิดของ $Hyp_G(2)$

Research Title	All Maximal Submonoids of Some Special Regular Classes of $Hyp_G(2)$
Researcher	Mr. Weerapong Wongpinit
Research Consultants	-
Organization	Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology Rajabhat Maha Sarakham University
Year	2018

ABSTRACT

The purpose of this research, we characterize maximal submonoids of some special regular classes of the monoid $Hyp_G(2)$ of all generalized hypersubstitutions of type $\tau = (2)$. In this study, we also have characterized the all maximal submonoids of some special regular classes of $Hyp_G(2)$.