บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ และเป็นวิชาที่ช่วยก่อให้เกิดความเจริญก้าวหน้าทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเพราะการคิดค้นทางวิทยาศาสตร์ต้องอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (กระทรวงศึกษาธิการ, 2552 : 1) ซึ่งสอดคล้องกับสิริพร ทิพย์คง (2545 : 1) ที่กล่าวไว้ว่าคณิตศาสตร์ช่วยพัฒนาให้แต่ละบุคคลเป็นคนที่สมบูรณ์ เป็นพลเมืองดี เพราะคณิตศาสตร์ช่วยเสริมสร้างความมีเหตุผล ความเป็นคนช่างคิด ช่างริเริ่มสร้างสรรค์ มีระบบระเบียบในการคิด การวางแผนการทำงาน มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย ตลอดจนมีลักษณะความเป็นผู้นำในสังคม จากความสำคัญที่กล่าวมาข้างต้น เรขาคณิตเป็นสาระการเรียนรู้หนึ่งในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่มีความเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของมนุษย์อย่างมาก เราใช้เรขาคณิตในการทำความเข้าใจและอธิบายสิ่งต่าง ๆ รอบตัว เรขาคณิตเป็นเนื้อหาที่มีความเป็นรูปธรรม เช่น รูปเรขาคณิตต่าง ๆ และมีความเป็นนามธรรม เช่น การให้เหตุผล การพิสูจน์ การแก้ปัญหา (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2546ก: 2-3)

เรขาคณิต เป็นศาสตร์ที่เรียนรู้โดยผ่านการมองเห็น (Visual subject) เป็นสิ่งท้าทายความคิดที่เพาะความสามารถในการคิดวิเคราะห์ ส่งเสริมความคิดสร้างสรรค์ ปลูกฝังความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (spatial ability) และพัฒนาแบบความคิดทางคณิตศาสตร์ (mathematical cast of mind) โดยทั่วไปแล้ว พัฒนาการในการยอมรับสิ่งต่าง ๆ ของมนุษย์เริ่มจากการใช้ การหยั่งรู้ (intuition) แล้วไปสิ้นสุดที่การอ้างเหตุผล การพิสูจน์จึงมีบทบาทอันสำคัญยิ่งต่อการใช้เหตุผลแทนการเดา ลองผิดลองถูก หรือตัดสินจากอคติของตน เรขาคณิตจัดว่าเป็นตัวช่วยวางรากฐานในการพิสูจน์อย่างมีความหมาย เพราะในเรขาคณิตเองได้บรรจุไว้

ด้วยโครงสร้างที่สมเหตุสมผล (logical structure) การศึกษาระบบสัจพจน์ทางเรขาคณิต เป็นเสมือนสิ่งที่ช่วยสร้าง “ กติกา ” ซึ่งชี้ให้เห็นว่า กติกาปรับปรุง เปลี่ยนแปลงได้ และทำให้เกิดความแตกต่างขึ้น การพิสูจน์จะมาช่วยชี้แนะ ทำให้ยอมรับในความแตกต่างนั้นเป็นการยอมรับด้วยเหตุผลที่มีความชัดเจน จากลักษณะสำคัญและความเป็นมาที่น่าสนใจของเรขาคณิต ทำให้เรามองเห็นประโยชน์ที่จะได้จากการเรียนรู้เรขาคณิต ในด้านต่างๆ อันได้แก่ ในการดำเนินชีวิต เช่น การออกแบบคีมล็อก จากการปรับโครงรูปสามเหลี่ยมช่วยยึดเสากับโครงร่างของสิ่งก่อสร้างที่ยังไม่สำเร็จ การเข้าใจสิ่งแวดล้อมตัวเรา เพราะสิ่งที่พบเห็นไม่ว่าจะเกิดจากธรรมชาติ หรือผลงานของมนุษย์ล้วนปรากฏในรูปแบบทางเรขาคณิตเป็นพื้นฐานในลักษณะสามมิติหรืออาศัยหลักการของเรขาคณิตในการสร้างสรรค์งานเหล่านั้น เด็กคุ้นเคย ชินตา และให้ความสนในสิ่งที่ปรากฏในธรรมชาติอยู่แล้ว เพียงแต่ขาดการชี้นำที่ดี ทำให้พัฒนาการด้านเรขาคณิตไม่ถึงขีดสุดในวิชาชีพต่าง ๆ เช่น วิศวกร สถาปนิก จิตรกรหรือวิชาชีพที่ต้องอาศัยความประณีตและหลักการเฉพาะเช่น ช่างไม้ ช่างกล ช่างก่อสร้าง ช่างประปา ล้วนจำเป็นจะต้องมีความรู้ความเข้าใจศาสตร์ทางเรขาคณิตทั้งสิ้น นอกจากนั้นสิ่งที่จะได้จากการเรียนเรขาคณิต ที่นับว่ามีคุณค่าอย่างยิ่งในการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ก็คือ การรังสรรค์สติปัญญามนุษย์ให้เป็นผู้ที่มีเหตุผล เพราะการพิสูจน์ในเรขาคณิตจะกระทำบนข้อมูลนักเรียนจะต้องจำแนกได้ว่า อะไรเป็นเหตุ อะไรเป็นผล ส่วนใดนำมาอ้างอิงได้ ดังนั้นวิธีการนี้สามารถพัฒนาคนให้เป็นผู้มีเหตุผลมากกว่าจะเชื่อโชคลาง (สมทรง สุวพานิช. 2553 : 1) สอดคล้องกับ ปานทอง กุลนาถสิริ (2541 : 3) ได้กล่าวถึงความสำคัญของเรขาคณิตที่มีต่อการเรียนคณิตศาสตร์ว่า หลักสูตรคณิตศาสตร์ไม่ว่ายุคใด จะมีการพัฒนาปรับปรุงอย่างไร เรขาคณิตจะต้องเป็นวิชาที่ผู้พัฒนาเห็นสมควรให้บรรจุลงในหลักสูตร ธรรมชาติของวิชาเรขาคณิตเป็นวิชาที่เอื้อที่จะสอนให้ผู้เรียนเป็นผู้มีวิจารณญาณ ช่างสังเกต ช่างสำรวจ มีเหตุผล และเมื่อพิจารณาเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับเรขาคณิตตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 พบว่าหลักสูตรดังกล่าวได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ไว้ในสาระที่ 3 : เรขาคณิต ดังนี้ มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติและมาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหา อย่างไรก็ตามเนื้อหาที่เกี่ยวกับเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาเป็นเนื้อหาที่ค่อนข้างยากแก่การทำความเข้าใจและจดจำทั้งที่ทุกคนตระหนักดีว่าความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน

ที่สำคัญในการคิดเชิงเรขาคณิตและเป็นทักษะที่สำคัญที่จะนำไปใช้ในชีวิตจริงและในอนาคตของผู้เรียน (Pegg, 1995 : 100)

รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติมีความสัมพันธ์กับชีวิตประจำวันของมนุษย์ ดังเช่น สิ่งของทั่วทุกมุมโลก ไม่ว่าจะเป็นสิ่งที่มีชีวิตหรือไม่มีชีวิต ล้วนอธิบาย รูปร่าง ลักษณะต่าง ๆ ได้ด้วยเรขาคณิต ซึ่งเป็นเนื้อหาที่มีเป็นรูปธรรม สามารถเข้าใจได้ด้วยการมองเห็น การนึกภาพ การสัมผัส ดังที่ อัมพร ม้าคนอง (2557 : 64-65) ได้กล่าวถึงกรอบเนื้อหาของรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ว่าเป็นรูปที่ประกอบด้วยจุด เส้นตรง เส้นโค้ง ระนาบ ฯลฯ อย่างน้อยหนึ่งอย่าง ตัวอย่างของรูปเรขาคณิต ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ปริซึม และทรงกระบอก การสร้างมโนทัศน์ที่ถูกต้องเกี่ยวกับเนื้อหารูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิตินั้นมีความสำคัญและจำเป็นในการนึกภาพ การใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิตในการแก้ปัญหา โดยครูจะต้องตระหนักถึงความสำคัญและจำเป็นในการสร้างหรือพัฒนาเกี่ยวกับพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เพื่อเป็นพื้นฐานในการสร้างมโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่ถูกต้องและเป็นพื้นฐานการศึกษาทางเรขาคณิตในระดับชั้นที่สูงขึ้น

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Understanding) ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นปัจจัยสำคัญที่มุ่งเน้นให้เกิดขึ้นกับนักเรียน เพราะความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นการสร้าง การพิสูจน์ การค้นพบ ที่เป็นพื้นฐานในการสร้างองค์ความรู้และการเชื่อมโยงในการเรียนหรือทักษะกระบวนการในระดับสูงขึ้นไป จะทำให้นักเรียนสามารถมีความคิดที่ลึกซึ้ง มีการสื่อสาร คิดอย่างสร้างสรรค์ นำไปแก้สถานการณ์ปัญหาที่ซับซ้อนโดยใช้ยุทธวิธีที่หลากหลายและตัดสินใจได้อย่างมีเหตุผล ซึ่งสอดคล้องกับ อัมพร ม้าคนอง (2547 : 29) ได้กล่าวถึงความสำคัญของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และนักเรียนสามารถนำความรู้ที่มีอยู่นั้นไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์หรือปัญหาที่ซับซ้อนได้ และไพทูล นารคร (2549 : 93-102) กล่าวว่า เป็นการพัฒนาให้นักเรียนเกิดความรู้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์นั้นทำให้นักเรียนสามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์โดยใช้ยุทธวิธีหรือประยุกต์ความเข้าใจนั้นไปใช้ในการแก้ปัญหาและตัดสินใจกับสิ่งต่าง ๆ ได้อย่างมีเหตุผล โดยความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จะตรงกันข้ามกับการท่องจำ (Rote Learning) การเรียนรู้เพื่อให้สามารถนำไปใช้ได้นั้น จำเป็นต้องรู้กระบวนการที่เกิดขึ้นในตัวเองของผู้เรียนที่เน้นวิธีการเรียนรู้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยให้ผู้เรียนสามารถคิดไตร่ตรองได้อย่างสร้างสรรค์ ช่วยพัฒนาสังคมและสิ่งแวดล้อม และนำความรู้ที่

ได้รับไปบูรณาการในการดำรงชีวิตได้อย่างมีความสุข ตามหลักการของทฤษฎีนี้ผู้เรียนเป็นผู้สร้างความรู้จากความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่พบเห็นกับความรู้ความเข้าใจเดิมที่มีมาก่อน นำความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเหตุการณ์ และปรากฏการณ์ที่พบเห็นมาสร้างเป็นโครงสร้างใหม่ทางสติปัญญา (Hiebert and Catpente. 1992 : 1)

พัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ดังที่ Pirie and Kieren (1994 : 65-67) ได้เสนอกรอบทฤษฎีพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งเป็นกรอบทฤษฎีที่ใช้สำหรับวิเคราะห์ระดับพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยพิจารณาพัฒนาการความเข้าใจในรูปแบบองค์รวมและกระบวนการที่เป็นไปในลักษณะที่ไม่หยุดนิ่ง มีความต่อเนื่องเป็นไปตามระดับ แต่กระบวนการของพัฒนาการความเข้าใจจะไม่เป็นลักษณะในแนวตรง เมื่อนักเรียนเจอปัญหาในระดับพัฒนาการความเข้าใจที่สูงกว่าและไม่สามารถแก้ปัญหาได้ในทันที จะต้องย้อนกลับไปทำความเข้าใจในระดับความเข้าใจที่ต่ำกว่าเพื่อขยายความเข้าใจที่มีอยู่ให้เพียงพอหรือปรับเปลี่ยนให้ถูกต้อง เพื่อสร้างความเข้าใจในระดับที่สูงกว่านั้นได้ นอกจากนี้แต่ละระดับของพัฒนาการความเข้าใจประกอบด้วยการเชื่อมโยงระหว่างการกระทำของการอธิบายเพื่อให้แต่ละระดับสมบูรณ์ยิ่งขึ้น จะเห็นว่าทฤษฎีพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์นั้นไม่ได้เป็นปรากฏการณ์ที่เป็นเชิงเส้นหรือในแนวตรง แต่มีการย้อนกลับไปกลับมาเพื่อกลับไปจดจำและสร้างความเข้าใจใหม่ให้ชัดเจนยิ่งขึ้น และทฤษฎีพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นการแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจที่เกิดจากการจัดการโครงสร้างความรู้ของบุคคลที่มีความต่อเนื่องและสอดคล้องกัน เป็นกระบวนการที่ไม่หยุดนิ่งและเป็นทฤษฎีที่ช่วยให้สามารถศึกษาหรืออธิบายเกี่ยวกับระดับพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาต่างๆ ของนักเรียน ซึ่งผู้วิจัยได้พัฒนากรอบแนวคิดของ Pirie and Kieren มาเป็น 5 ระดับ คือ ระดับที่ 1 ความรู้พื้นฐาน (Primitive knowing) ระดับที่ 2 การสร้างมโนภาพ (Image making) ระดับที่ 3 การมีมโนภาพ (Image having) ระดับที่ 4 สังเกตคุณสมบัติ (Property noticing) และระดับที่ 5 การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) เพื่อใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เนื่องจากเนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย มีข้อจำกัดในการหาข้อสรุปเชิงนามธรรมหรือสรุปในกรณีทั่วไปได้

จากรายงานการทดสอบระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-Net) โดยสถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ (องค์การมหาชน) หรือ สทศ. กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2557 ของโรงเรียนเทศบาลหนองหญ้าม้า สังกัดเทศบาลเมืองร้อยเอ็ด พบว่า ค่าคะแนนเฉลี่ย

ของระดับโรงเรียนเท่ากับ 25.24 ซึ่งต่ำกว่าค่าเฉลี่ยของระดับประเทศ ระดับภาค และระดับจังหวัด ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 29.65 , 28.03 และ 29.94 ตามลำดับ จากการวิเคราะห์มาตรฐานที่เกี่ยวกับเนื้อหารูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ สอดคล้องกับมาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ พบว่าคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 20.92 ซึ่งอยู่ในระดับต่ำ นอกจากนี้ การสร้างมโนทัศน์ที่ถูกต้องเกี่ยวกับเนื้อหารูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติมีความสำคัญและจำเป็น ดังที่ อัมพร ม้าคนอง (2557 : 64-65) กล่าวว่ารูปเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กับชีวิตประจำวันของมนุษย์ สิ่งของทั่วทุกมุมโลกล้วนอธิบายลักษณะได้ด้วยเรขาคณิต ซึ่งเป็นเนื้อหาที่เป็นรูปธรรม สามารถเข้าใจได้ด้วยการมองเห็น การนึกภาพ และ การสัมผัส ที่จะต้องสร้างพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในการเรียนรู้ให้กับนักเรียนตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เพื่อเป็นข้อสนเทศและเป็นแนวทางในการพัฒนา ยกระดับผลสัมฤทธิ์ในการทดสอบระดับชาติขั้นพื้นฐาน

จากเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เพื่อจะได้เป็นข้อสนเทศที่เป็นแนวทางในการศึกษาพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนและทำให้ครูทราบว่านักเรียน มีการทำความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 รวมทั้งเป็นข้อสนเทศที่ทำให้ครูตระหนักถึงความสำคัญของพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมากขึ้น และเป็นแนวทางในการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติของนักเรียนได้อย่างเต็มตามศักยภาพและมีประสิทธิภาพต่อไป

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อศึกษาระดับพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

ขอบเขตการวิจัย

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนเทศบาลหนองหญ้าม้า สังกัดเทศบาลเมืองร้อยเอ็ด ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 จำนวน 83 คน จาก 3 ห้องเรียน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนเทศบาลหนองหญ้าม้า สังกัดเทศบาลเมืองร้อยเอ็ด ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 จำนวน 26 คน จาก 1 ห้องเรียน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม (Cluster Random Sampling) เนื่องจากทางโรงเรียนได้จัดห้องเรียนแบบคละความสามารถของนักเรียน เพื่อศึกษาพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

2. ตัวแปรที่ใช้ในการวิจัย

ตัวแปรที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ พัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

3. ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558

4. เนื้อหาที่ใช้ในงานวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในงานวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

นิยามศัพท์เฉพาะ

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Understanding) หมายถึง การเชื่อมโยงระหว่างความคิด ความจริง กระบวนการทางคณิตศาสตร์ หรือความสามารถในการนำความรู้เดิมมาสัมพันธ์กับความรู้ใหม่แล้วสามารถแก้สถานการณ์ปัญหานั้น ๆ โดยมีการแปลความของตนเอง ตีความจากเรื่องราวต่าง ๆ สรุปความหรือการขยายความคิดโดยอาศัยความสัมพันธ์

เกี่ยวกับสถานการณ์ต่าง ๆ หรือนำไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ปัญหาที่ซับซ้อนได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล

พัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Understanding Development) หมายถึง การนำความรู้เดิมมาสัมพันธ์กับความรู้ใหม่แล้วสามารถแก้ปัญหานั้น ๆ เพื่อพิจารณาองค์ความรู้และเป็นกระบวนการที่เป็นไปในลักษณะที่ไม่หยุดนิ่ง มีความต่อเนื่องเป็นไปตามระดับ แต่กระบวนการของพัฒนาการความเข้าใจจะไม่เป็นลักษณะในแนวตรง เมื่อนักเรียนเจอปัญหาในระดับพัฒนาการความเข้าใจที่สูงกว่าหรือไม่สามารถแก้ปัญหาได้ในทันที จะย้อนกลับไปทำความเข้าใจในระดับความเข้าใจที่ต่ำกว่าเพื่อขยายความเข้าใจที่มีอยู่ให้เพียงพอหรือปรับเปลี่ยนให้ถูกต้อง เพื่อสร้างความเข้าใจในระดับที่สูงกว่านั้นได้ ซึ่งกรอบแนวคิดเกี่ยวกับพัฒนาการความเข้าใจตามแนวคิดของ Pirie and Kieren (1994 : 65-67) ผู้วิจัยได้พัฒนากรอบแนวคิดมาเป็น 5 ระดับ ดังต่อไปนี้ คือ ระดับที่ 1 ความรู้พื้นฐาน (Primitive knowing) ระดับที่ 2 การสร้างมโนภาพ (Image making) ระดับที่ 3 การมีมโนภาพ (Image having) ระดับที่ 4 สังเกตคุณสมบัติ (Property noticing) ระดับที่ 5 การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) โดยมีรายละเอียดดังนี้

ระดับที่ 1 ความรู้พื้นฐาน (Primitive knowing) เป็นความรู้เดิมที่ใช้ เป็นพื้นฐานในการสร้างความรู้ใหม่ ระดับความเข้าใจในระดับนี้จะเป็นจุดเริ่มต้นในการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยการที่นักเรียนนำเอาความรู้นี้มาใช้ในการสร้างความหมายเกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนกำลังจัดกระทำอยู่ เช่น ความรู้เกี่ยวกับลักษณะหรือความหมายของเส้นตรง เส้นโค้ง จุด ซึ่งจะเป็นความรู้พื้นฐานในการที่จะสร้างมโนมติเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต

ระดับที่ 2 การสร้างมโนภาพ (Image making) เป็นความเข้าใจที่เกิดจากการที่นักเรียนใช้ความรู้พื้นฐานมาสร้างความหมายจากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ เช่น นักเรียนนำจุดสองจุดมาเพื่อสร้างเส้นตรง หรือนำจุดหลายจุดมาเพื่อสร้างเส้นโค้ง หรือการลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด 3 จุด เพื่อเป็นรูปสามเหลี่ยม

ระดับที่ 3 การมีมโนภาพ (Image having) ความเข้าใจในระดับนี้เป็น ความเข้าใจที่พัฒนาจากการที่นักเรียนจัดกระทำกับสื่อหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์จนกระทั่งสามารถที่จะสร้างภาพที่คิดในใจได้ ทั้งสามารถอธิบาย สะท้อน หรือคิดย้อนกลับกระบวนการสร้างนั้นโดยไม่จำเป็นต้องแสดงการจัดกระทำดังเช่นในระดับการสร้างมโนภาพ เช่น นักเรียนสามารถบอกลักษณะของรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม หรือรูปหลายเหลี่ยม โดยไม่จำเป็น ต้องอาศัยการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรม

ระดับที่ 4 สังเกตคุณสมบัติ (Property noticing) ความเข้าใจในระดับนี้เกิดจากการที่นักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนภาพที่มีโดยการจัดกระทำหรือรวมมโนภาพนั้นเพื่อสร้างบริบทที่เกี่ยวกับคุณสมบัติ เช่น นักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนภาพที่เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสามมิติกับความรู้เดิมที่เกี่ยวกับรูปสองมิติ ซึ่งนักเรียนสามารถอธิบายความสัมพันธ์โดยใช้สื่อรูปธรรมในการประกอบการอธิบาย

ระดับที่ 5 การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) ความเข้าใจในระดับนี้เกิดจากการที่นักเรียนสามารถหาข้อสรุปในเชิงนามธรรม (นิยามหรือสูตร) หรือข้อสรุปกรณีทั่วไปได้ เช่น นักเรียนสามารถหาข้อสรุป ความสัมพันธ์ระหว่างรูปสองมิติและรูปสามมิติ

แบบทดสอบพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ชุดของข้อคำถามเงื่อนไข ปัญหา สถานการณ์ เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยผู้ถูกทดสอบจะได้แสดงความรู้ความเข้าใจในเนื้อหา ซึ่งเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการประเมิน เปรียบเทียบ วัดผลเกี่ยวกับพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ และมีกฎเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนนอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งแบบทดสอบทดสอบที่ใช้ในงานวิจัยครั้งนี้เป็นแบบทดสอบอัตนัยแบบกำหนดขอบเขตของคำตอบและมีเกณฑ์การให้คะแนนโดยวิธีวิเคราะห์ย่อย จำนวน 10 ข้อ

แบบสัมภาษณ์พัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การค้นหาข้อเท็จจริงหรือการศึกษาความคิดเห็น หลักการ ในแต่ละระดับของพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยมีวิธีเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยวิธีการ สนทนา พูดคุย ซักถาม เพื่อวิเคราะห์เหตุผล แนวคิด วิธีการในการแก้สถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยมีการวางแผนการสัมภาษณ์ก่อนการสัมภาษณ์นักเรียน ซึ่งในงานวิจัยครั้งนี้เป็นการสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้าง

ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

ผลการวิจัยจะเป็นข้อสนเทศในการศึกษาพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนและทำให้ครูทราบว่านักเรียนมีพัฒนาการเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติอย่างไร รวมทั้งเป็นข้อสนเทศที่จะทำให้ครูตระหนักถึงความสำคัญเกี่ยวกับพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมากขึ้น และเป็นแนวทางในการพัฒนาความ

เข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ได้อย่างเต็มตามศักยภาพและมีประสิทธิภาพต่อไป