บทที่ 4
ผลการวิจัย

ตลอดการดำเนินงานวิจัยนี้ เราให้ f เป็นสัญลักษณ์แทนการดำเนินการทวิภาค ชนิด $\tau=(2)$ โดย σ_t แทนเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันซึ่งส่ง f ไปที่ $t\in W_{(2)}(X)$

4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างกึ่งกรูปย่อยของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ (Relationship Between Subsemigroup of Special Regular Classes of $Hyp_G(2)$)

สำหรับ $t\in W_{(2)}(X)$ เราจะแนะนำบรรดานิยามแนวคิดของสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

1. $leftmost\ (t):=$ ตัวแปรแรกที่เกิดขึ้น (จากทางซ้าย) ใน t
2. $rightmost\ (t):=$ ตัวแปรสุดท้ายที่เกิดขึ้น ใน t
3. $\operatorname{var}(t):=$ เซตของตัวแปรทั้งหมดที่เกิดขึ้นใน t

ให้ $\sigma_t\in Hyp_G(2)$ เราจะแทน

$R_1:=\{\sigma_t\in Hyp_G(2) \mid t=f(x_1,t')$ โดยที่ $t'\in W_{(2)}(X)$และ $x_2\notin\operatorname{var}(t)\}$

$R_2:=\{\sigma_t\in Hyp_G(2) \mid t=f(t',x_2)$ โดยที่ $t'\in W_{(2)}(X)$และ $x_1\notin\operatorname{var}(t)\}$

$R_3:=\{\sigma_t \mid t\in\{x_1,x_2,f(x_1,x_2)\}\}$ และ

$R_4:=\{\sigma_t \mid \operatorname{var}(t)\cap\{x_1,x_2\}=\varnothing\}$

ใน ปี ค.ศ. 2010 W. Puninagool และ S. Leeratanavalee แสดงได้ว่า $E(Hyp_G(2))=R_1\cup R_2\cup R_3\cup R_4$

ให้ $\sigma_t\in Hyp_G(2)$ เราจะแทน

$R_1':=\{\sigma_t\in Hyp_G(2) \mid t=f(x_1,t')$ โดยที่ $t'\in W_{(2)}(X)$, $x_2\notin\operatorname{var}(t')$ และ $rightmost\,(t')\neq x_1\}$

$R_2':=\{\sigma_t\in Hyp_G(2) \mid t=f(t',x_2)$ โดยที่ $t'\in W_{(2)}(X)$, $x_1\notin\operatorname{var}(t')$ และ $leftmost\,(t')\neq x_2\}$

และแทน

$$(MI)_{Hyp_G(2)}=R'_1\cup R'_2\cup R_3\cup R_4$$

$$(MI_1)_{Hyp_G(2)}=R_1\cup R_3\cup R_4$$

$$(MI_2)_{Hyp_G(2)}=R_2\cup R_3\cup R_4 \text{ และ}$$

$$(MSR)_{Hyp_G(2)}=\{\sigma_{f(x_1,x_1)},\sigma_{f(x_2,x_2)},\sigma_{f(x_2,x_1)}\}\cup R_3\cup R_4$$

ใน ปี ค.ศ. 2014 W. Wongpinit และ S. Leeratanavalee ได้หาว่า $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$เป็นเซตนิจพลย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของ $Hyp_G(2)$

และในปีเดียวกันนั้นเอง W. Wongpinit และ S. Leeratanavalee ยังได้แสดงได้ด้วยว่า $E(Hyp_G(2)) \cup \{\sigma_{f(x_2,x_1)}\}$ เป็นเซตของสมาชิกโคปรกติ ปฏิปรกติ ปรกติบริบูรณ์ ปรกติทางซ้าย ปรกติทางขวา และปรกติอินทรา ทั้งหมดของ $Hyp_G(2)$

นิยาม 4.1.1 ให้ S เป็นกึ่งกรุปใด ๆ เราเรียก $\varnothing \neq T \subseteq S$ ว่าเป็น *กึ่งกรุปย่อย (subsemigroup)* ของ S ถ้า $T^2 \subseteq T$

นิยาม 4.1.2 เราเรียกกึ่งกรุปย่อย T **ของ** S ว่าเป็น *กึ่งกรุปย่อยปรกติ (regular subsemigroup)* ของ S ถ้าแต่ละ $a \in T$ **มี** $b \in T$ ที่ทำให้ $a = aba$

ทำให้เราได้บทตั้งที่สำคัญมากต่อไปนี้

บทตั้ง 4.1.3 ให้ R เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $Hyp_G(2)$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. R เป็นโคปรกติ
2. R เป็นปฏิปรกติ
3. R เป็นปรกติบริบูรณ์
4. R เป็นปรกติทางขวา
5. R เป็นปรกติทางซ้าย
6. R เป็นปรกติทางซ้าย

โดยใช้ข้อเท็จจริงดังกล่าวในบทตั้งและเพื่อความสะดวก คลาสของโคปรกติ ปฏิปรกติ ปรกติบริบูรณ์ ปรกติทางขวา ปรกติทางซ้าย และปรกติอินทรา เราจะตกลงเรียกร่วมกันว่าเป็น *คลาสปรกติพิเศษ* (special regular classes) ของ $Hyp_G(2)$

4.2 โมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ (All Maximal Subsemigroup of Special Regular Classes of $Hyp_G(2)$)

เราสามารถพิสูจน์พรอพโพสิชันได้ดังต่อไปนี้

พรอพโพสิชัน 4.2.1 เราได้ว่า $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของบรรดาคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยนิจพลใหญ่สุดของ $Hyp_G(2)$ เราจะได้ว่า $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ เราจะแสดงว่า $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของบรรดาคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

กรณีที่ $(MI)_{Hyp_G(2)}$ **:** เราให้ K เป็นโมนอยด์ย่อยแท้ใด ๆ ของ $Hyp_G(2)$ โดยที่ $(MI)_{Hyp_G(2)} \subseteq K \subset Hyp_G(2)$ ให้ $\sigma_t \in K$ เราสมมติว่า $f(x_2, x_1) \in K$ เราเลือก $t = f(x_1, t')$ โดยที่ $t' \in W_{(2)}(X),\ x_1, x_2 \notin \mathrm{var}(t')$ พิจารณา

$$\begin{aligned}(\sigma_t \circ_G \sigma_{f(x_2,x_1)})(f) &= \hat{\sigma}_t[f(x_2, x_1)]\\ &= S^2(f(x_1, t'), x_2, x_1)\\ &= f(x_2, t')\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sigma_t \circ_G \sigma_{f(x_2,x_1)} \notin K$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่ K เป็นโมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ ดังนั้น $f(x_2, x_1) \notin K$ นั่นคือ $(MI)_{Hyp_G(2)} = K$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

กรณีที่ $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$ **:** เราให้ K เป็นโมนอยด์ย่อยแท้ใด ๆ ของ $Hyp_G(2)$ โดยที่ $(MI)_{Hyp_G(2)} \subseteq K \subset Hyp_G(2)$ ให้ $\sigma_t \in K$ เราสมมติว่า $f(x_2, x_1) \in K$ เราเลือก $t = f(x_1, t')$ โดยที่ $t' \in W_{(2)}(X),\ x_1, x_2 \notin \mathrm{var}(t')$ พิจารณา

$$\begin{aligned}(\sigma_t \circ_G \sigma_{f(x_2,x_1)})(f) &= \hat{\sigma}_t[f(x_2, x_1)]\\ &= S^2(f(x_1, t'), x_2, x_1)\\ &= f(x_2, t')\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sigma_t \circ_G \sigma_{f(x_2,x_1)} \notin K$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่ K เป็นโมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ ดังนั้น $f(x_2, x_1) \notin K$ นั่นคือ $(MI)_{Hyp_G(2)} = K$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

กรณีที่ $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ สามารถพิสูจน์คล้ายกับกรณี $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$

บทแทรก 4.2.2 ทุก ๆ นิจพลย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของ $Hyp_G(2)$ จะเป็นกึ่งกรูปย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

พิสูจน์ เห็นได้ชัดเจนโดยตรงจาก **พรอพโพสิชัน 4.2.1**

พรอพโพสิชันที่จะกล่าวต่อไปนี้ เราจะแสดงว่าบทกลับของ **บทแทรก 4.2.2** ไม่เป็นความจริงในกรณีทั่ว ๆ ไป

พรอพโพสิชัน 4.2.3 เราได้ว่า $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

พิสูจน์ เราจะแสดงว่าเซต $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ โดยพิจารณาจาก $\sigma_{id} \in (MSR)_{Hyp_G(2)}$ และ $\{\sigma_{f(x_1,x_1)}, \sigma_{f(x_2,x_2)}, \sigma_{f(x_2,x_1)}\}(MSR)_{Hyp_G(2)} \subseteq (MSR)_{Hyp_G(2)}$ และ

$(R_3 \cup R_4)(MSR)_{Hyp_G(2)} \subseteq (MSR)_{Hyp_G(2)}$ เราจะได้ว่า $(MSR)^2{}_{Hyp_G(2)} \subseteq (MSR)_{Hyp_G(2)}$ ดังนั้น $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ โมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ **เรา**ให้ K เป็นโมนอยด์ย่อยแท้ของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ โดยที่ $(MSR)_{Hyp_G(2)} \subseteq K \subset Hyp_G(2)$ ให้ $\sigma_t \in K$ ถ้า $\sigma_t \in R_2$ โดยที่

$t = f(t', x_2) \neq f(x_2, x_2)$ โดยที่ $x_1 \notin \mathrm{var}(t')$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t)(f) &= \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[f(t', x_2)] \\
&= S^2\left(f(x_2, x_1), \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'], x_2\right) \\
&= f\left(x_2, \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t']\right) \\
&\neq f(x_2, x_2)
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t$ ไม่มีสมบัติปิดซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่ K เป็นโมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ ดังนั้น $t = f(x_2, x_2)$

ถ้า $\sigma_t \in R_1$ โดยที่

$t = f(x_1, t') \neq f(x_1, x_1)$ โดยที่ $x_2 \notin \mathrm{var}(t')$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t)(f) &= \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[f(x_1, t')] \\
&= S^2\left(f(x_2, x_1), x_1, \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t']\right) \\
&= f\left(\hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'], x_1\right) \\
&\neq f(x_1, x_1)
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t$ ไม่มีสมบัติปิดซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่ K เป็นโมนอยด์ย่อยของ $Hyp_G(2)$ ดังนั้น $t = f(x_1, x_1)$ นั่นคือ $(MSR)_{Hyp_G(2)} = K$

ทฤษฎีบท 4.2.4 เราได้ว่าเซต $(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$

พิสูจน์ เราให้ M เป็นเป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดใด ๆ ของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ เราจะแบ่งพิจารณาออกเป็นสองกรณี

กรณีที่ 1 : ถ้า $f(x_2, x_1) \notin M$ เราจะได้ว่า M เป็นโมนอยด์ย่อยนิจพลใหญ่สุดของ $Hyp_G(2)$ โดยการใช้ **บทแทรก 4.2.2** เราได้ว่า $M \in \{(MI)_{Hyp_G(2)}, (MI_1)_{Hyp_G(2)}, (MI_2)_{Hyp_G(2)}\}$

กรณีที่ 2 : ถ้า $f(x_2, x_1) \in M$ เราพิจารณา $\sigma_t \in M \setminus (\{\sigma_{f(x_2,x_1)}\} \cup R_3 \cup R_4)$ ถ้า $\sigma_t \in R_2$ โดยที่

$t = f(t', x_2)$ โดยที่ $x_1 \notin \mathrm{var}(t')$ พิจารณา

$$(\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t)(f) = \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[f(t', x_2)]$$

$$= S^2\left(f(x_2, x_1), \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'], x_2 \right)$$

$$= f\left(x_2, \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'] \right) \in M$$

ดังนั้น $t = f(x_2, x_2)$

ถ้า $\sigma_t \in R_1$ โดยที่

$t = f(x_1, t')$ โดยที่ $x_2 \notin \mathrm{var}(t')$ พิจารณา

$$(\sigma_{f(x_2,x_1)} \circ_G \sigma_t)(f) = \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[f(x_1, t')]$$

$$= S^2\left(f(x_2, x_1), x_1, \hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'] \right)$$

$$= f\left(\hat{\sigma}_{f(x_2,x_1)}[t'], x_1 \right) \in M$$

ดังนั้น $t = f(x_1, x_1)$

จะได้ว่า $\sigma_t \in (MSR)_{Hyp_G(2)}$ นั่นคือ $M \subseteq (MSR)_{Hyp_G(2)}$

เนื่องจาก M เป็นเป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดใด ๆ ของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$ เราได้ว่า $M = (MSR)_{Hyp_G(2)}$ จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 เราจึงสรุปได้ว่า

$(MI)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_1)_{Hyp_G(2)}$, $(MI_2)_{Hyp_G(2)}$ และ $(MSR)_{Hyp_G(2)}$ เป็นโมนอยด์ย่อยใหญ่สุดทั้งหมดของคลาสปรกติพิเศษของ $Hyp_G(2)$