บทที่ 2
แนวคิด ทฤษฎี เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 พีชคณิต (Algebras)

ให้ A เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และให้ $n \in N \cup \{0\}$ เมื่อ N เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ (natural number) เรานิยาม $A^0 = \{\varnothing\}$ และ $A^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1, ..., a_n \in A\}$ จะเรียกฟังก์ชัน $f^n : A^n \to A$ ว่า ***การดำเนินการลำดับ n ที่นิยามบน A*** (n-ary operation define on A) และจะเรียกฟังก์ชันดังกล่าวว่ามี ***อาริตี้ n*** ให้ $(f_i)_{i \in I}$ เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ n_i (n_i- ary operation symbol) เมื่อ I เป็นเซตดรรชนี (indexed set) จะเรียกลำดับ $\tau = (n_i)_{i \in I}$ ว่า ***ชนิด (type)*** ของอาริตี้ของ f_i

เรานิยาม ***พีชคณิตชนิด τ*** (algebra of type τ) คือคู่อันดับ $\mathrm{A} := \left(A, (f_i^{\,A})_{i \in I}\right)$ เมื่อ A เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่เป็นเซตว่างและ $(f_i^{\,A})_{i \in I}$ เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ n_i โดยทั่วไปจะเขียน A แทน $\left(A, (f_i^{\,A})_{i \in I}\right)$ กำหนดให้ $\mathrm{Alg}_f(\tau)$ แทนคลาสของพีชคณิตชนิด τ ทั้งหมดและให้ $\mathrm{Alg}_f(\tau)$ แทนคลาสของพีชคณิตจำกัดชนิด τ ทั้งหมด

2.2 กึ่งกรูปปรกติ (Regular Semigroups)

นิยาม 2.3.1 ให้เซต $S \neq \varnothing$ เรียก $(S,\cdot)$ **ว่า *กรูปปอยด์ (Groupoid)*** ถ้า $\cdot$ **เป็น*การดำเนินการทวิภาค (Binary operation)* บน S และจะเรียกกรูปปอยด์ $(S,\cdot)$ ว่า *กึ่งกรูป (Semigroup)*** ถ้า $\cdot$ มี ***สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (Associative)*** นั่นคือ สำหรับทุกๆ $a, b, c \in S$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

<u>หมายเหตุ</u> เพื่อความสะดวกและไม่ให้เกิดความสับสนเราจะเขียน S แทน $(S,\cdot)$ และจะใช้ ab **แทน** $a \cdot b$

นิยาม 2.3.2 จะเรียกสมาชิก $e \in S$ **ว่า *สมาชิกเอกลักษณ์ (Identity)* ของ** S ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $a \in S, ae = a = ea$

นิยาม 2.3.3 กึ่งกรุปที่มีสมาชิกเอกลักษณ์จะเรียกว่า ***โมนอยด์ (Monoid)*** และจะเรียกโมนอยด์ S ว่า ***กรูป(Group)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ มี $b \in S$ ที่ทำให้ $ab = e = ba$

นิยาม 2.3.4 ให้ S เป็นกึ่งกรุปใด ๆ เรียกสมาชิก $a \in S$ ว่าเป็น ***ปรกติ (regular)*** ถ้ามี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = aba$ เรียกกึ่งกรุป S ว่า ***ปรกติ*** ถ้าสมาชิกทุกตัวของ S เป็นปรกติ
นิยาม 2.3.5 ให้ S เป็นกึ่งกรุปใด ๆ เราจะเรียกสมาชิก $a \in S$ ว่าเป็น ***นิจพล (idempotent)*** ถ้า $aa = a$ เราเขียนแทนเซตของสมาชิกนิจพลทั้งหมดของกึ่งกรุป S ด้วย $E(S)$
นิยาม 2.3.6 เรียกกึ่งกรุป S ว่าเป็น ***โคปรกติ (coregular)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ จะมี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = aba = bab$
นิยาม 2.3.7 เรียกกึ่งกรุป S ว่าเป็น ***ปฏิปรกติ (anti-regular)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ จะมี $b \in S$ ที่ทำให้ $b = aba$ และ $a = bab$
นิยาม 2.3.8 เรียกกึ่งกรุป S ว่าเป็น ***ปรกติบริบูรณ์ (completely-regular)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ จะมี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = aba$ และ $ab = ba$
นิยาม 2.3.9 เรียกกึ่งกรุป S ว่าเป็น ***ปรกติทางขวา (right regular)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ จะมี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = a^2b$ และ S เป็น ***กึ่งกรูปปรกติทางซ้าย (left regular)*** ถ้าแต่ละ $a \in S$ จะมี $b \in S$ ที่ทำให้ $a = ba^2$
นิยาม 2.3.10 และจะเรียกกึ่งกรูป S ว่าเป็น ***ปรกติอินทรา (intra- regular)*** ถ้า $a \in Sa^2S$ สำหรับแต่ละ $a \in S$

2.3 เทอมและเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน (Terms and Generalized Hypersubstitutions**)**

เราสามารถขยายแนวคิดของ “คำ” ให้อยู่ในรูปแบบอย่างทั่ว ๆ ไป (general) ได้ดังต่อไปนี้ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $X_n := \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นเซตของตัวแปร (variables) ที่มีสมาชิก n ตัว $X := \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ และ $\{f_i \mid i \in I\}$ เป็นเซตของสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ n_i (n_i- ary operation symbol) และ I เป็นเซตดรรชนี และให้ $\tau = (n_i)_{i\in I}$ เป็น ชนิด (type) ของ อาริตี ของ f_i (the arity of f_i) และนิยามเทอมลำดับ n ชนิด $\tau = (n_i)_{i\in I}$ โดยวิธีอุปนัยดังนี้ :

(1) สำหรับทุก $x_i \in X_n$ เป็นเทอมลำดับ n ชนิด τ

(2) ถ้า $t_1, t_2, ..., t_{n_i}$ เป็นเทอมลำดับ n ชนิด τ แล้ว $f_i(t_1, t_2, ..., t_{n_i})$ เป็นเทอมลำดับ n ชนิด τ ด้วย โดยเราใช้สัญลักษณ์ $W_\tau(X_n)$ แทนเซตที่เล็กที่สุดของเทอมอันดับ n ชนิด τ ที่มี $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นสมาชิกและที่มีสมบัติปิดภายใต้การกระทำในข้อ (2) จำนวนจำกัดครั้ง และให้ $W_\tau(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_\tau(X_n)$ เป็นเซตของเทอมชนิด τ ทั้งหมดโดยใช้ขั้นตอนที่ (2) ในนิยามของเทอมลำดับ ทำให้เราได้พีชคณิตเทอม $F_\tau(X) := (A, (\bar{f}_i)_{i\in I})$ ชนิด τ และจะเรียกพีชคณิตเทอมนี้ว่า

absolutely free algebra เมื่อ $W_\tau(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}W_\tau(X_n)$ เป็นเซตของเทอมชนิด τ ทั้งหมดและ $(\bar{f}_i)_{i\in I}$ เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ n_i บน $W_\tau(X)$ นิยามโดย $\bar{f}_i(t_1,...t_{n_i}) := f_i(t_1,...t_{n_i})$ สำหรับทุก ๆ $i\in I$ ซึ่ง f_i เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ n_i และ $t_1,...t_{n_i}\in W_\tau(X)$
ในปี ค.ศ. 1991 K. Denecke, D. Lau, R. Poschel และ D. Schweigert ได้นิยามแนวคิดเกี่ยวกับไฮเพอร์สับสติตูชัน นั่นคือ ไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด τ คือ ฟังก์ชัน $\sigma:\{f_i\,|\,i\in I\}\to W_\tau(X)$ ซึ่ง $\sigma(f_i)\in W_\tau(X_{n_i})$ และแต่ละไฮเพอร์สับสติตูชัน σ จะกำหนดการดำเนินการ $\hat{\sigma}:W_\tau(X)\to W_\tau(X)$ โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้:

(1) $\hat{\sigma}[x]:=x$ ทุก $x\in X$

(2) $\hat{\sigma}[f_i(t_1,t_2,...,t_{n_i})]:=\sigma(f_i)\left(\hat{\sigma}[t_1],\hat{\sigma}[t_2],...,\hat{\sigma}[t_{n_i}]\right)$ โดยที่ $\hat{\sigma}[t_j]$ กำหนดค่าแล้วทุก $1\le j\le n_i$

ให้ $Hyp(\tau)$ แทนเซตของไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด τ ทั้งหมดและกำหนดการดำเนินการทวิภาค o_h
บน $Hyp(\tau)$ ดังนี้ สำหรับ $\sigma_1,\sigma_2\in Hyp(\tau)$

$\sigma_1 o_h\,\sigma_2 := \hat{\sigma}_1\,o\,\sigma_2$ โดยที่ o เป็นการประกอบของฟังก์ชันปกติ

ให้ σ_{id} เป็นไฮเพอร์สับสติตูชันที่กำหนดโดย สำหรับแต่ละ $i\in I$

$$\sigma_{id}(f_i)=f_i(x_1,x_2,...,x_{n_i})$$

ทำให้เราได้ว่า $(Hyp(\tau);o_h,\sigma_{id})$ เป็นโมนอยด์ (monoid) ที่มี σ_{id} เป็นสมาชิกเอกลักษณ์

ในปี ค.ศ. 2000 S. Leeratanavalee และ K. Denecke ได้วางนัยทั่วไปของแนวคิดของไฮเพอร์สับสติตูชัน ไปเป็น เจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน นั่นคือ เจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันชนิด τ คือ ฟังก์ชัน $\sigma:\{f_i\,|\,i\in I\}\to W_\tau(X)$ โดยที่ $\sigma(f_i)\in W_\tau(X)$ เราแทนเซตของเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด τ ทั้งหมดด้วย $Hyp_G(\tau)$ ซึ่งในการนิยามการดำเนินการทวิภาคบน $Hyp_G(\tau)$ เราจะนิยามแนวคิดของ เจเนอรัลไลซ์ซุปเปอร์โพสิชันของเทอม $S^m:W_\tau(X)^{m+1}\to W_\tau(X)$ ดังนี้

(1) ถ้า $t=x_j, 1\le j\le m$ แล้ว $S^m(x_j,t_1,t_2,...,t_m):=t_j$

(2) ถ้า $t=x_j, m<j$ แล้ว $S^m(x_j,t_1,t_2,...,t_m):=x_j$

(3) ถ้า $t=f_i(s_1,s_2,...,s_{n_i})$ แล้ว

$$S^m(t,t_1,t_2,...,t_m) := f_i\left(S^m(s_1,t_1,t_2,...,t_m),...,S^m(s_{n_i},t_1,t_2,...,t_m)\right)$$

ซึ่งเราจะขยาย เจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน σ ไปเป็นฟังก์ชัน $\hat{\sigma}: W_\tau(X) \to W_\tau(X)$ โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้:

(1) $\hat{\sigma}[x] := x$ ทุก $x \in X$

(2) $\hat{\sigma}[f_i(t_1,t_2,...,t_{n_i})] := S^{n_i}\left(\sigma(f_i), \hat{\sigma}[t_1], \hat{\sigma}[t_2],...,\hat{\sigma}[t_{n_i}]\right)$ โดยที่ $\hat{\sigma}[t_j]$ กำหนดค่าแล้วทุก $1 \leq j \leq n_i$

กำหนดการดำเนินการทวิภาค o_G บน $Hyp_G(\tau)$ ดังนี้ สำหรับ $\sigma_1, \sigma_2 \in Hyp_G(\tau)$

$\sigma_1 o_G\, \sigma_2 := \hat{\sigma}_1\, o\, \sigma_2$ โดยที่ o เป็นการประกอบของฟังก์ชันปกติ ให้ σ_{id} เป็นเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันที่กำหนดโดย สำหรับแต่ละ $i \in I$

$$\sigma_{id}(f_i) = f_i(x_1, x_2, ..., x_{n_i})$$

ซึ่งเราได้ว่า $(Hyp_G(\tau); o_G, \sigma_{id})$ เป็นโมนอยด์ที่มี σ_{id} เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ และเรายังได้อีกว่า เซตของไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด τ ทั้งหมด เป็นโมนอยด์ย่อยของ $(Hyp_G(\tau); o_G, \sigma_{id})$