**บทที่ 2**

**แนวคิด ทฤษฎี เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**

2.1 พีชคณิต (Algebras)

ให้  เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และให้  เมื่อ  เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ (natural number) เรานิยาม  และจะเรียกฟังก์ชัน  ว่า ***การดำเนินการลำดับ  ที่นิยามบน*(-ary operation define on A )** และจะเรียกฟังก์ชันดังกล่าวว่ามี ***อาริตี้********* ให้  เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ **** (****- ary operation symbol ) เมื่อ  เป็นเซตดรรชนี (indexed set) จะเรียกลำดับ  ว่า ***ชนิด (type)***ของอาริตี้ของ 

 เรานิยาม ***พีชคณิตชนิด*  (**algebra of type ) คือคู่อันดับ   เมื่อ เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่เป็นเซตว่างและ เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ  โดยทั่วไปจะเขียน  แทน  กำหนดให้  แทนคลาสของพีชคณิตชนิด  ทั้งหมดและให้  แทนคลาสของพีชคณิตจำกัดชนิด  ทั้งหมด

2.2 กึ่งกรูปปรกติ **(Regular Semigroups)**

**นิยาม 2.3.1** ให้เซต เรียก **ว่า *กรูปปอยด์ (Groupoid)*** ถ้า **· เป็น*การดำเนินการทวิภาค (Binary operation)* บน****และจะเรียกกรูปปอยด์**  **ว่า *กึ่งกรูป (Semigroup)*** ถ้า **·** มี ***สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (Associative)*** นั่นคือสำหรับทุกๆ 



**หมายเหตุ** เพื่อความสะดวกและไม่ให้เกิดความสับสนเราจะเขียนแทน และจะใช้**แทน**

**นิยาม 2.3.2** จะเรียกสมาชิก **ว่า *สมาชิกเอกลักษณ์ (Identity)* ของ** ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก

**นิยาม 2.3.3** กึ่งกรุปที่มีสมาชิกเอกลักษณ์จะเรียกว่า ***โมนอยด์ (Monoid)*** และจะเรียกโมนอยด์ ***S*** ว่า ***กรูป(Group)*** ถ้าแต่ละมีที่ทำให้ 

**นิยาม 2.3.4** ให้เป็นกึ่งกรูปใด ๆ เรียกสมาชิกว่าเป็น ***ปรกติ (regular)*** ถ้ามีที่ทำให้ เรียกกึ่งกรูป ว่า ***ปรกติ*** ถ้าสมาชิกทุกตัวของ เป็นปรกติ

**นิยาม 2.3.5** ให้เป็นกึ่งกรูปใด ๆ เราจะเรียกสมาชิก ว่าเป็น ***นิจพล (idempotent)*** ถ้าเราเขียนแทนเซตของสมาชิกนิจพลทั้งหมดของกึ่งกรูป ด้วย 

**นิยาม 2.3.6** เรียกกึ่งกรูป ว่าเป็น ***โคปรกติ (coregular)*** ถ้าแต่ละ จะมีที่ทำให้ 

**นิยาม 2.3.7** เรียกกึ่งกรูป ว่าเป็น ***ปฏิปรกติ (anti-regular)*** ถ้าแต่ละ จะมีที่ทำให้ และ

**นิยาม 2.3.8** เรียกกึ่งกรูป ว่าเป็น ***ปรกติบริบูรณ์ (completely-regular)*** ถ้าแต่ละ จะมีที่ทำให้ และ

**นิยาม 2.3.9** เรียกกึ่งกรูป ว่าเป็น ***ปรกติทางขวา (right regular)*** ถ้าแต่ละ จะมีที่ทำให้ และเป็น ***กึ่งกรูปปรกติทางซ้าย (left regular)*** ถ้าแต่ละ จะมี ที่ทำให้ 

**นิยาม 2.3.10** และจะเรียกกึ่งกรูป ว่าเป็น ***ปรกติอินทรา (intra- regular)*** ถ้าสำหรับแต่ละ

2.3 เทอมและเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน (Terms and Generalized Hypersubstitutions)

เราสามารถขยายแนวคิดของ “คำ” ให้อยู่ในรูปแบบอย่างทั่ว ๆ ไป (general) ได้ดังต่อไปนี้ สำหรับแต่ละจำนวนนับ  ใด ๆ ให้  เป็นเซตของตัวแปร (variables) ที่มีสมาชิก  ตัว  และ เป็นเซตของสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ  (- ary operation symbol) และ  เป็นเซตดรรชนี และให้เป็น ชนิด (type) ของ อาริตี ของ (the arity of ) และนิยามเทอมลำดับ  ชนิด โดยวิธีอุปนัยดังนี้ :

 (1) สำหรับทุก  เป็นเทอมลำดับ  ชนิด 

 (2) ถ้า เป็นเทอมลำดับ  ชนิด  แล้ว  เป็นเทอมลำดับ  ชนิด  ด้วย โดยเราใช้สัญลักษณ์  แทนเซตที่เล็กที่สุดของเทอมอันดับ  ชนิด  ที่มี  เป็นสมาชิกและที่มีสมบัติปิดภายใต้การกระทำในข้อ (2) จำนวนจำกัดครั้ง และให้ เป็นเซตของเทอมชนิด  ทั้งหมดโดยใช้ขั้นตอนที่ (2) ในนิยามของเทอมลำดับ ทำให้เราได้พีชคณิตเทอม  ชนิด  และจะเรียกพีชคณิตเทอมนี้ว่า **absolutely free algebra** เมื่อ  เป็นเซตของเทอมชนิด  ทั้งหมดและ  เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับบน  นิยามโดย  สำหรับทุก ๆ  ซึ่ง  เป็นสัญลักษณ์การดำเนินการลำดับ  และ 

ในปี ค.ศ. 1991 K. Denecke, D. Lau, R. Poschel และ D. Schweigert ได้นิยามแนวคิดเกี่ยวกับ ไฮเพอร์สับสติตูชัน นั่นคือ ไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิดคือ ฟังก์ชันซึ่ง และแต่ละไฮเพอร์สับสติตูชัน จะกำหนดการดำเนินการ โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้:

 (1)  ทุก 

 (2)  โดยที่  กำหนดค่าแล้วทุก

 ให้แทนเซตของไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด ทั้งหมดและกำหนดการดำเนินการทวิภาค

บน ดังนี้ สำหรับ 

  โดยที่  เป็นการประกอบของฟังก์ชันปกติ

 ให้  เป็นไฮเพอร์สับสติตูชันที่กำหนดโดย สำหรับแต่ละ 

 

 ทำให้เราได้ว่า  เป็นโมนอยด์ (monoid) ที่มีเป็นสมาชิกเอกลักษณ์

 ในปี ค.ศ. 2000 S. Leeratanavalee และ K. Denecke ได้วางนัยทั่วไปของแนวคิดของไฮเพอร์สับสติตูชัน ไปเป็น เจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน นั่นคือ เจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด  คือ ฟังก์ชัน  โดยที่  เราแทนเซตของ เจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด ทั้งหมดด้วย  ซึ่งในการนิยามการดำเนินการทวิภาคบน  เราจะนิยามแนวคิดของ เจเนอรัลไลซ์ซุปเปอร์โพสิชันของเทอม  ดังนี้

 (1) ถ้า  แล้ว 

 (2) ถ้า แล้ว 

 (3) ถ้า  แล้ว

 

 ซึ่งเราจะขยาย เจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชัน ไปเป็นฟังก์ชัน 

โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้:

 (1)  ทุก 

 (2) โดยที่  กำหนดค่าแล้วทุก 

 กำหนดการดำเนินการทวิภาค บน ดังนี้ สำหรับ 

  โดยที่  เป็นการประกอบของฟังก์ชันปกติ ให้  เป็นเจเนอรัลไลซ์ไฮเพอร์สับสติตูชันที่กำหนดโดย สำหรับแต่ละ 

 

ซึ่งเราได้ว่า  เป็นโมนอยด์ที่มีเป็นสมาชิกเอกลักษณ์ และเรายังได้อีกว่า เซตของไฮเพอร์สับสติตูชัน ชนิด ทั้งหมด เป็นโมนอยด์ย่อยของ 