บทที่ 2
การทบทวนวรรณกรรม

ในการวิจัยเรื่อง การศึกษายุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หนึ่งขั้นตอนที่เกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณและการหารของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 , 5 และ 6 ผู้วิจัยได้ดำเนินการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

1. ความหมายของปัญหาและโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
2. ประเภทของปัญหาและโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
3. รูปแบบและประเภทของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ และการหาร
4. ระดับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
5. กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์
6. ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
7. องค์ประกอบการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
8. ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ
9. การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
10. อุปสรรคในการแก้โจทย์ปัญหา
11. แบบทดสอบ
12. บริบทของกลุ่มโรงเรียนห้วยน้ำหวาน
13. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
14. กรอบการวิจัย

2.1 ความหมายของปัญหาและโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.1.1 ความหมายของปัญหา

ได้มีนักการศึกษากล่าวถึงความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ไว้หลายทัศนะ ดังนี้

ยุพิน พิพิธกุล (2542, น. 82) ได้กล่าวว่า ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นปัญหาที่ผู้เรียนจะต้องค้นหาความจริงที่อาศัยนิยาม ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่จะถูกนำมาใช้หรือสรุปสิ่งใหม่ให้ผู้เรียนยังไม่เคย

เรียนมาก่อน หรือปัญหาเกี่ยวกับวิธีการ การพิสูจน์ทฤษฎีบท ปัญหาที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ ซึ่งล้วนเป็นปัญหาที่ต้องอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้ามาแก้ไข

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544, น. 16) ได้กล่าวถึงความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการคำตอบ ซึ่งบุคคลต้องใช้สาระความรู้และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์มากำหนดแนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบ บุคคลผู้คิดหาคำตอบไม่คุ้นเคยกับสถานการณ์นั้นมาก่อน และไม่สามารถหาคำตอบได้ทันทีทันใด สถานการณ์หรือคำถาม ข้อใดจะเป็นปัญหาหรือไม่ ขึ้นอยู่กับบุคคลผู้คิดหาคำตอบบางสถานการณ์เป็นปัญหาสำหรับบางคน แต่อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับคนอื่น ๆ ก็ได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2555, น. 7) ได้กล่าวถึงความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ซึ่งนักเรียนเผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นในทันที ถ้าเป็นสถานการณ์ที่นักเรียนรู้วิธีการหาคำตอบหรือรู้คำตอบทันทีแล้ว สถานการณ์นั้นก็ไม่ใช่ปัญหาอีกต่อไป ปัญหาทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนคนหนึ่งอาจไม่ใช้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนอีกคนหนึ่งก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับประสบการณ์และพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคน

Bruckner (1957, p. 301) กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวกับปริมาณที่นักเรียนไม่สามารถตอบได้ทันทีโดยวิธีที่เคยชิน และสิ่งที่เป็นปัญหาของนักเรียน เมื่อวานนี้อาจจะไม่เป็นปัญหาในวันนี้ก็ได้

Polya (1962, p. 117) กล่าวว่า ปัญหา หมายถึง การแสวงหาวิธีที่เหมาะสมมาใช้ทำความเข้าใจกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งให้ชัดเจน แต่วิธีการนั้นไม่ได้มาจากการค้นพบในทันทีทันใด แต่ต้องอาศัยความพยายามในการแสวงหา ดังนั้นการแก้ปัญหาคือ การค้นพบวิธีการที่จะปฏิบัติให้เหมาะสมกับสถานการณ์ที่เกิดขึ้นนั้นๆ ได้

Anderson and Pingry (1973, p. 228) กล่าวว่า ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการวิธีการแก้ไขหรือหาคำตอบซึ่งผู้ตอบจะทำได้ดีต้องมีวิธีการที่เหมาะสม ใช้ความรู้ประสบการณ์และการตัดสินใจโดยพร้อมมูล

Adams, Ellis and Beeson (1977, p. 179) กล่าวว่า ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณและคำตอบที่ต้องการจะเกี่ยวข้องกับปริมาณ ปัญหาคณิตศาสตร์จะรวมถึงปัญหาที่เป็นภาษา (Word Problem) ปัญหาที่เป็นเรื่องราวและปัญหาที่เป็นคำพูด (Verbal Problem) นอกจากนี้เขายังกล่าวถึงความแตกต่างระหว่างปัญหากับแบบฝึกหัดไว้ว่า ในการแก้ปัญหานั้นจะต้องมีการตัดสินใจและลงมือทำ ส่วนแบบฝึกหัดไม่จำเป็นต้องมีการตัดสินใจ

Frederick (1978, pp. 309 - 310) ได้ให้ความหมายว่าปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์ใดๆ จะเป็นปัญหาสำหรับบุคคลหนึ่งบุคคลใดถ้าเอาใจใส่ มีความต้องการที่จะตอบสนองสถานการณ์นั้นแต่ไม่สามารถแก้สถานการณ์นั้นได้ทันทีทันใด การหาคำตอบของสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์จะเป็นปัญหาหรือไม่ขึ้นอยู่กับบุคคลผู้หาคำตอบด้วย

Burns (1984, p. 6) กล่าวว่า ปัญหาเป็นสถานการณ์ ซึ่งค้นหาจุดหมายบางอย่างแต่การกระทำอันเหมาะสมในการค้นหานั้นยังไม่เกิดขึ้นในทันที ปัญหาทางคณิตศาสตร์ต้องการทักษะทางคณิตศาสตร์ ความคิดรวบยอดหรือกระบวนการเพื่อจะได้ไปถึงจุดหมายนั้น

Reys (1984, p. 6) กล่าวว่า ปัญหานั้นจะเกี่ยวข้องกับสถานการณ์ที่คนคนหนึ่งต้องการบางสิ่งบางอย่าง และในขณะนั้นเขาไม่รู้ว่าจะทำอย่างไร จึงจะได้สิ่งที่ตนต้องการ

Krulik and Rudnick (1988, p. 2) ให้ความหมายว่าปัญหาเป็นสถานการณ์ที่อาจเป็นเชิงปริมาณหรือในด้านอื่นๆ ซึ่งคนคนหนึ่ง หรือคนกลุ่มหนึ่ง เผชิญอยู่และต้องอาศัยการตั้งใจมั่นคงในการหาทางแก้ปัญหา และต้องไม่เคยเห็นวิธีการ หรือแนวทางแก้ปัญหาที่ชัดเจนนั้นมาก่อน

สรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ แต่ไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใด ต้องอาศัยใช้ความพยายามในการหาคำตอบ โดยต้องเลือกใช้ความรู้ และทักษะเดิมให้เหมาะสมมาใช้ในการแก้ปัญหานั้น และปัญหาทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนแต่ละคนจะเหมือนหรือแตกต่างกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับประสบการณ์และพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคน

2.1.1.1 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ได้มีนักการศึกษากล่าวถึงความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ไว้หลายทัศนะ ดังนี้

Polya (1957, p. 1) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการหาแนวทางที่จะหาวิธีการที่จะนำสิ่งที่ไม่รู้ในปัญหาหรือสิ่งที่ยุ่งยากออกไป เป็นการหาวิธีการที่ต้องการความสำเร็จในการแก้ไขกับอุปสรรคที่ต้องเผชิญเพื่อที่จะให้ได้ข้อสรุปและคำตอบที่มีความชัดเจน

Bitter (1980, p. 36) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ว่าเป็นการค้นหาวิธีทางที่เหมาะสมเพื่อดำเนินการไปสู่คำตอบ โดยวิธีทางนั้นไม่เคยรู้จักมาก่อน เป็นวิธีการที่ยาก เป็นวิธีการที่มีอุปสรรคและการแก้ปัญหาอาจไม่สามารถทำได้ในทันทีต้องใช้ความคิดวิเคราะห์จนได้วิธีการที่เหมาะสม

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM., 1980, p. 52) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการทำงานที่ยังไม่รู้วิธีการที่ได้มาซึ่งคำตอบในทันที ซึ่งการหาคำตอบนักเรียนต้องนำความรู้ที่มีอยู่ไปเข้าสู่กระบวนการแก้ปัญหา เพื่อที่จะทำให้เกิดความรู้ใหม่ ๆ

การแก้ปัญหาไม่ได้มีเป้าหมายเพียงการหาคำตอบ แต่อยู่ที่วิธีการได้มาซึ่งคำตอบ นักเรียนควรได้ฝึกฝนได้แก้ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นและให้มีการสะท้อนความคิดในการแก้ปัญหาออกมาด้วย

Krulik and Rudnick (1993 , p. 6) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการหาแนวทางการแก้ปัญหา โดยสังเคราะห์ความรู้ที่ได้เรียนมาเพื่อหาคำตอบซึ่งเป็นกระบวนการที่บุคคลใช้ความรู้พื้นฐานหรือความรู้เดิม ทักษะและความเข้าใจในการแก้ปัญหา กระบวนการดังกล่าวเริ่มต้นด้วยการเผชิญปัญหา และหาข้อสรุปถึงคำตอบ ซึ่งนักเรียนต้องสังเคราะห์ในสิ่งที่เขาได้เรียนมาและนำไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่

Brahier (2005, p. 13) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่แต่ละบุคคลพยายามใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาคณิตศาสตร์ที่ไม่คุ้นเคยมาก่อน

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544, น. 18) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการหาวิธีการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหาจะต้องใช้ความรู้ ความคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ผสมผสานกับข้อมูลต่าง ๆ ที่กำหนดในปัญหาเพื่อกำหนดวิธีการหาคำตอบของปัญหา

สมทรง สุวพานิช (2549, น. 5) ให้ความหมายการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณ หรือจำนวน หรือคำอธิบายให้เหตุผล การหาคำตอบนั้นต้องใช้ความรู้ ทักษะ และประสบการณ์หลาย ๆ อย่างประมวลเข้าด้วยกันจึงจะหาคำตอบได้

อัมพร ม้าคะนอง (2553, น. 45) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการทำงานโดยใช้กระบวนการที่ยังไม่ทราบมาก่อนล่วงหน้าในการหาคำตอบของปัญหาการแก้ปัญหาเป็นทั้งทักษะ (Skill) ซึ่งเป็นความสามารถพื้นฐานในการทำความเข้าใจปัญหาและการหาคำตอบของปัญหา และกระบวนการ (Process) ซึ่งเป็นวิธีการหรือขั้นตอนการทำงานที่มีการวิเคราะห์ และวางแผนโดยมีการใช้เทคนิคต่าง ๆ ประกอบ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2555 , น. 7) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ กระบวนการเหล่านี้อาจนำมาใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มากบ้างน้อยบ้าง ขึ้นอยู่กับลักษณะของโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น ๆ

สรุปได้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการหาแนวทางการแก้ปัญหาที่ยังไม่รู้วิธีการที่ได้มาซึ่งคำตอบในทันที นักเรียนจะต้องนำปัญหานั้น ๆ เข้าสู่กระบวนการแก้ปัญหา โดยการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา และ

ประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไม่ได้ต้องการเพียงการหาคำตอบ แต่เป้าหมายสำคัญอยู่ที่วิธีการได้มาซึ่งคำตอบ มุ่งเน้นนักเรียนสามารถนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนขึ้น หรือนำไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่ ๆ ได้

2.1.2 ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ได้มีนักการศึกษาและนักวิชาการ กล่าวถึงความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้หลายทัศนะ ดังนี้

สมทรง สุวพานิช (2549, น. 5) ได้กล่าวว่าโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณ หรือจำนวน หรือคำอธิบายให้เหตุผล การหาคำตอบนั้นต้องใช้ความรู้ ทักษะและประสบการณ์หลาย ๆ อย่างประมวลเข้าด้วยกันจึงจะหาคำตอบได้

Adams (1977, p. 176) ได้กล่าวว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง ปัญหาที่มีลักษณะเป็นโจทย์ภาษา โจทย์เรื่องราว หรือโจทย์เชิงสนทนา ที่บอกลักษณะของปัญหาด้วยข้อความหรือข้อความประกอบกับปริมาณหรือจำนวน

Anderson (1987, p. 228) กล่าวว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์หรือคำถามที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ หรือจำนวนที่ต้องการคำตอบ การที่ผู้แก้ปัญหาจะแก้โจทย์ปัญหาได้นั้น จะต้องใช้วิธีการที่เหมาะสมกับสภาพโจทย์ปัญหา รวมทั้งต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ประกอบกับการตัดสินใจของผู้แก้ปัญหาเอง

Bell (1978, pp. 309-310) ได้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่มีปัญหา การหาคำตอบของปัญหาจะประสบความสำเร็จหรือไม่ขึ้นอยู่กับวิธีการที่ผู้แก้ปัญหาซึ่งเป็นผู้ที่สนใจการหาคำตอบที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหานั้น

Krulik and Rudnick (1993, p. 6) ได้ให้ความหมายว่า เป็นสถานการณ์ที่เป็นประโยคภาษา คำตอบจะเกี่ยวข้องกับปริมาณในตัวปัญหานั้นไม่ได้ระบุวิธีการหรือการดำเนินการในการแก้ปัญหาไว้อย่างชัดเจน ผู้แก้ปัญหาจะต้องค้นหาว่าจะใช้วิธีการใดในการหาคำตอบของปัญหาจึงจะทำให้ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา

Cruikshank and Sheffield (1992, p. 37) ได้กล่าวถึง โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง คำถามหรือสถานการณ์ที่มีเนื้อหาสาระที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ โดยที่บางปัญหาเป็นปัญหาที่ไม่เกี่ยวข้องกับจำนวนและตัวเลขและสามารถหาคำตอบได้โดยใช้การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์

สรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นคำถามหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ ที่มีลักษณะเป็นโจทย์ภาษา โจทย์เรื่องราว หรือโจทย์เชิง หรือข้อความประกอบกับปริมาณ หรือจำนวน ไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที ต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ ทักษะต่างๆ เช่น การวางแผนและการตัดสินใจ มาช่วยเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหานั้น

2.2 ประเภทของปัญหาและโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

2.2.1 ประเภทของปัญหา

ได้มีนักการศึกษาและนักวิชาการ กล่าวถึงความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้หลายทัศนะ ดังนี้

พิศมัย ศรีอำไพ (2545, น. 3-4) กล่าวว่า ปัญหาคณิตศาสตร์แบ่งออก 4 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาชั้นเดียว (One – Step Problem) เป็นปัญหาที่ทุกคนคุ้นเคยอยู่ การแก้ปัญหาแบบนี้มักใช้วิธีการบวก ลบ คูณ และหารธรรมดา

2. ปัญหาหลายชั้น (Multiple – Step Problem) เป็นปัญหาที่สามารถแก้ได้โดยการกระทำเบื้องต้นตั้งแต่ 2 ชนิดขึ้นไป หรืออาจจะใช้การกระทำชนิดเดิมแต่ซ้ำกันหลายครั้ง

3. ปัญหาที่เกี่ยวกับกระบวนการ (Process Problem) เป็นปัญหาที่ต้องใช้ความคิดที่เป็นเหตุผลช่วยในการแก้ปัญหา โดยใช้ยุทธวิธีหลาย ๆ แบบ เช่น มองหารูปแบบ วาดภาพ สร้างสมการ และอื่น ๆ โดยทั่วไปปัญหาเหล่านี้ไม่สามารถแก้ได้โดยวิธีการบวก ลบ คูณและหารธรรมดา

4. ปัญหาที่เกี่ยวกับการประยุกต์ (Applied Problem) เป็นปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนเก็บข้อมูลและตัดสินใจเอง การที่จะหาเหตุผลเฉลี่ยของปัญหาอาจใช้ยุทธวิธีหลายอย่าง ปัญหาเหล่านี้สะท้อนให้เป็นสถานการณ์และอาจจะไม่มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2550, น. 62-67) ได้แบ่งประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. การแบ่งโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจากจุดประสงค์ของปัญหา สามารถแบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้เป็น 2 ประเภท คือ

1.1 ปัญหาให้ค้นหา เป็นปัญหาที่ให้ค้นหาคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณ จำนวนหรือให้หาวิธีการ คำอธิบายให้เหตุผล

1.2 ปัญหาให้พิสูจน์เป็นปัญหาให้แสดงการให้เหตุผลว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเท็จ

2. การแบ่งประเภทปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยพิจารณาจากตัวผู้แก้ปัญหา และความซับซ้อนของปัญหา ทำให้สามารถแบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้เป็น 2 ประเภท คือ

2.1 ปัญหาธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อนนัก ผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีการแก้ปัญหา

2.2 ปัญหาไม่ธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อนนัก ผู้แก้ปัญหาต้องประมวลความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกัน เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา

Polya (1957, pp. 154-156) ได้กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

1. ปัญหาให้ค้นหา เป็นปัญหาที่ค้นหาสิ่งที่ต้องการ ซึ่งอาจเป็นปัญหาในเชิง ทฤษฎี หรือปัญหาเชิงปฏิบัติ อาจเป็นรูปธรรมหรือนามธรรม ส่วนสำคัญของปัญหานี้ แบ่งเป็น 3 ส่วน คือ สิ่งที่ต้องการค้นหา ข้อมูลที่กำหนด และเงื่อนไข

2. ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาที่แสดงให้ความสมเหตุสมผลว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ ส่วนสำคัญของปัญหาแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ สมมติฐานหรือสิ่ง ที่กำหนดให้และผลสรุปคือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

Russel (1961, p. 256) ได้กล่าวว่า ปัญหาคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาที่มีรูปแบบ ได้แก่ ปัญหาที่ปรากฏในแบบเรียนและหนังสือเรียนทั่วไป

2. ปัญหาที่ไม่มีรูปแบบ ได้แก่ ปัญหาที่พบได้ทั่ว ๆ ไปในชีวิตประจำวัน

Reys (1980, p. 16) ได้กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภท โดยพิจารณาจากผู้แก้ปัญหาและความซับข้อนของปัญหา สรุปได้ดังนี้

1. ปัญหาธรรมดาหรือปัญหาที่คุ้นเคย (Routine Problem) เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการประยุกต์ใช้ในการดำเนินการทางคณิตคาสตริ มักอยู่ในรูปโจทย์ปัญหาที่เป็นถ้อยคำหรือเรื่องราวที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อนนัก ผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยหรือมีประสบการณ์เกี่ยวกับโครงสร้างและวิธีการแก้ปัญหานี้มาแล้ว

2. ปัญหาไม่ธรรมดาหรือปัญหาที่แปลกใหม่ไม่คุ้นเคย (Nonroutine Problem) เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน แปลกใหม่สำหรับผู้แก้ปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหาต้องประมวลความรู้ความสามารถ และประสบการณ์หลายอย่างเข้าด้วยกันเพื่อนำมาใช้ในแก้ปัญหา

Charles and Lester (1982, pp. 6-10) แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ 6 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาที่ใช้ฝึก (Drill Exercise) เป็นปัญหาที่ใช้ฝึกขั้นตอนวิธี และการคำนวณเบื้องต้น

2. ปัญหาข้อความอย่างง่าย (Simple Translation Problem) เป็นปัญหาข้อความที่เคยพบ เช่น ปัญหาในหนังสือเรียน ต้องการฝึกให้คุ้นเคยกับการเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นปัญหาขั้นตอนเดียวมุ่งให้มีความเข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ และความสามารถในการคิดคำนวณ

3. ปัญหาข้อความที่ซับซ้อน (Complex Translation Problem) คล้ายกับปัญหาข้อความอย่างง่ายแต่เพิ่มเป็นปัญหาที่มี 2 ขั้นตอนหรือมากกว่า

4. ปัญหาที่เป็นกระบวนการ (Process Problem) เป็นปัญหาที่ไม่เคยพบมาก่อนไม่สามารถเปลี่ยนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ได้ทันที จะต้องจัดปัญหาให้ง่ายขึ้น หรือแบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ แล้วหารูปแบบทั่วไปของปัญหา ซึ่งนำไปสู้การคิดและการแก้ปัญหาเป็นการพัฒนายุทธวิธีต่าง ๆ เพื่อความเข้าใจ วางแผนการแก้ปัญหาและการประเมินผลคำตอบ

5. ปัญหาการประยุกต์ (Applied Problem) เป็นปัญหาที่ต้องใช้ทักษะความรู้ มโนมติ และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ การได้มาซึ่งคำตอบต้องอาศัยวิธีทางคณิตศาสตร์เป็นสำคัญ เช่น การจัดระทำ การรวบรวมและการแทนข้อมูล การตัดสินใจเกี่ยวกับข้อมูลในเชิงปริมาณ เป็นปัญหาที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการมโนมติ ข้อเท็จจริงในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง ซึ่งทำให้ผู้เรียนได้เห็นประโยชน์และเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ชีวิตจริง

6. ปัญหาปริศนา (Puzzle Problems) เป็นปัญหาที่บางครั้งได้คำตอบจากการเดาสุ่ม ไม่จำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา บางครั้งต้องใช้เทคนิคเฉพาะ บางครั้งต้องใช้วิธีที่ไม่ธรรมดา หรือต้องใช้ความรู้ที่ลึกซึ้ง ปัญหาประเภทนี้จะเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ใช้ความคิดสร้างสรรค์ และมีความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหา สามารถมองได้หลายมุมมอง

Charles and O'Daffer (1987, pp. 17-18) ได้กล่าวว่า ปัญหาคณิตศาสตร์แบ่งออก 4 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาขั้นตอนเดียว (One - Step Problem) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาคือนักเรียนต้องแปลงสถานการณ์ที่เป็นเรื่องราวให้เป็นประโยคทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ หรือการหาร ปัญหาประเภทนี้มักพบในการเรียนการสอนตามปกติ ยุทธวิธีพื้นฐานที่ใช้ในปัญหาขั้นตอนเดียวคือ การเลือกการดำเนินการ

2. ปัญหาหลายขั้นตอน (Multi - Step Problem) มีความแตกต่างกับปัญหาขั้นตอนเดียวที่จำนวนของการดำเนินการที่จำเป็นในการหาคำตอบ ปัญหาหลายขั้นตอนมีจำนวนของการดำเนินการมากกว่าหนึ่งตัว ยุทธวิธีพื้นฐานที่ใช้ในการแก้ปัญหาหลายขั้นตอนคือ การเลือกการดำเนินการ

3. ปัญหากระบวนการ (Process Problem) เป็นปัญหาที่ไม่สามารถแปลงเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์โดยการเลือกการดำเนินการได้ทันที แต่จะต้องใช้กระบวนการต่าง ๆ ช่วย เช่น การทำปัญหาให้ง่าย การแบ่งปัญหาออกเป็นปัญหาย่อย ๆ การเขียนภาพหรือแผนภาพ การเขียนกราฟแทนปัญหา การแก้ปัญหาประเภทนี้ต้องใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ เช่น การประมาณคำตอบ การเดาและตรวจสอบ การสร้างตาราง การค้นหาแบบรูป การทำย้อนกลับ ปัญหากระบวนการปัญหาหนึ่งอาจใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหาได้หลายแบบ

4. ปัญหาการประยุกต์ (Applied Problem) บางครั้งเรียกว่า ปัญหาเชิงสถานการณ์ (Situational Problem) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาจะต้องใช้ทักษะ ความรู้ มโนมติ และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริง ซึ่งจะต้องใช้วิธีการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น การรวบรวมข้อมูลทั้งที่กำหนดในปัญหาและอยู่นอกปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูล เป็นปัญหาที่จะทำให้ผู้แก้ปัญหาเห็นประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์

Reys, Suydum and Lindquist (1992, p. 29) ได้กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภท โดยพิจารณาจากตัวผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อนของปัญหา ดังนี้

1. ปัญหาธรรมดา (Routine Problem) เป็นปัญหาที่ต้องการให้ประยุกต์ใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ มักเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อนผู้แก้มีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีแก้ปัญหาเมื่อพบปัญหาสามารถแก้ได้ทันที

2. ปัญหาแปลกใหม่ (Non - Routine Problem) เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อนและผู้แก้ไม่คุ้นเคยกับปัญหานั้น ผู้แก้ต้องประมวลความรู้ความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกัน จึงจะแก้ปัญหาได้

Baroody (1993, p. 56) ได้กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภทโดยใช้ผู้แก้ปัญหาและโครงสร้างของปัญหาเป็นเกณฑ์ในการแบ่ง ดังนี้

1. ปัญหาธรรมดา (Routine Problems) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาคุ้นเคยในวิธีการในโครงสร้างของปัญหา เช่น อาจเคยพบในตัวอย่างเมื่อพบปัญหาและทราบได้เกือบทันทีว่าจะแก้ปัญหาด้วยวิธีใด ข้อมูลที่กำหนดให้ในปัญหาประเภทนี้มักมีแต่เฉพาะข้อมูลที่จำเป็นและเพียงพอในการหาคำตอบ มุ่งเน้นการฝึกทักษะใดทักษะหนึ่ง ปัญหาประเภทนี้มักพบในหนังสือเรียนทั่วไป

2. ปัญหาไม่ธรรมดา (Nonroutine Problems) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาจะต้องประมวลความรู้ความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกัน เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหาเป็นปัญหาที่ที่มีลักษณะสอดคล้องกับสภาพความเป็นจริงของชีวิตมากกว่าประเภทแรก ข้อมูลที่เป็นปัญหากำหนดให้มีทั้งจำเป็นและไม่จำเป็น หรือกำหนดข้อมูลให้ไม่เพียงพอ วิธีหาคำตอบอาจมีได้หลายวิธีการ คำตอบก็อาจมีมากกว่าหนึ่งคำตอบ

สรุปได้ว่า ประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ สามารถจัดแบ่งเป็นกลุ่มตามลักษณะของแต่ละปัญหา แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. ปัญหาพื้นฐาน (Routine Problems) เป็นปัญหาที่พบเจอทั่ว ๆ ไป ที่เกี่ยวกับการใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การดำเนินการเพียงขั้นตอนเดียว (One – Step Problem) เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อน หรือเป็นปัญหาที่มีโครงสร้างอย่างง่าย (Simple Problem Structure) ผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีการแก้ปัญหา

2. ปัญหาซับซ้อน (Non - Routine Problems) เป็นปัญหาที่ไม่คุ้นเคย และมีการดำเนินการมากกว่าหนึ่งขั้นตอน เน้นกระบวนการคิด และประยุกต์ มีโครงสร้างซับซ้อน (Complex Problem Structure) ผู้แก้ปัญหาต้องประมวลความรู้ความสามารถ การเลือกใช้ยุทธวิธีต่างๆ มาช่วยในการแก้ปัญหา

2.2.2 ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

Ashlock, et al. (1983, p. 239) แบ่งรูปแบบของปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท คือ

2.2.2.1 โจทย์ปัญหาในหนังสือหรือโจทย์ปัญหาที่แก้ด้วยการแปลงให้เป็นประโยคคณิตศาสตร์ (Standard Textbook Or Translation Problem) เป็นโจทย์ปัญหาที่แก้ด้วยหลักการหรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ที่ตายตัวซึ่งไม่ยุ่งยากมากนัก

2.2.2.2 โจทย์ปัญหาที่แก้ด้วยกระบวนการ (Process Problem) เป็นโจทย์ปัญหา ที่ต้องแก้ด้วยยุทธวิธีต่าง ๆ ซึ่งยุ่งยากมากกว่าประเภทที่ 1 โจทย์ประเภทนี้จำเป็นจะต้องแก้ด้วยกระบวนการ 3 ขั้น คือ

1) ความเข้าใจปัญหา

2) การพัฒนาและการหายุทธวิธีในการแก้ปัญหา

3) การประเมินการแก้ปัญหา

นอกจากนี้โจทย์ปัญหาอาจมีลักษณะเป็นโจทย์ปัญหาโดยตรง (Direct Problem) และโจทย์ปัญหาโดยอ้อม (Indirect Problem) หรืออาจเป็นโจทย์ปัญหาหนึ่งขั้นตอน (One-Step Problem) และโจทย์ปัญหาหลายขั้นตอน (Multi-Step Problem) ซึ่งโจทย์ปัญหาโดยตรงและโจทย์ปัญหาหนึ่งขั้นตอนนี้แก้ง่ายกว่าโจทย์ปัญหาโดยอ้อมและโจทย์ปัญหาหลายขั้นตอน

2.3 รูปแบบและประเภทของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ และการหาร

2.3.1 รูปแบบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ และการหาร

Riedesel (1990, p. 92) ได้จัดรูปแบบของโจทย์ปัญหามีลักษณะดังนี้

1. รูปแบบโจทย์ที่เกี่ยวกับการบวก (เรียงลำดับจากง่ายไปหายาก)

1.1 มุกมีตุ๊กตาตัวใหญ่ 3 ตัว ตัวเล็ก 2 ตัว มุกมีตุ๊กตาทั้งหมดกี่ตัว (Part – Part – Whole)

1.2 พี่จ๊ะมีสมุด 3 เล่ม ซื้อมาอีก 2 เล่ม พี่จ๊ะมีสมุดกี่เล่ม (Joining)

1.3 เล็กมีเงิน 5 บาท ไก่มีมากกว่าเล็ก 3 บาท ไก่มีเงินกี่บาท (Comparison)

1.4 ดำให้เงินน้องไป 3 บาท แต่ยังเหลืออีก 5 บาท เดิมดำมีเงินกี่บาท (Complementary Subtraction)

1.5 ตอนเช้าแดงมีเงินอยู่จำนวนหนึ่ง ตอนสายใช้ไป 5 บาท ตอนกลางวันแม่ให้เงินมาอีก ทำให้แดงมีเงินมากกว่าตอนเช้า 10 บาท แม่ให้เงินแดงอีกกี่บาท (Vector Subtraction)

2. รูปแบบของโจทย์ที่เกี่ยวกับการลบ (เรียงลำดับจากง่ายไปหายาก)

2.1 ปุ้มมีลูกหิน 5 ลูก ทำหาย 3 ลูก เหลือลูกหินกี่ลูก (Separating)

2.2 พี่มาลีมีเงิน 7 บาท น้องดวงใจมีเงิน 3 บาท (Comparison)

ก. พี่มาลีมีเงินมากกว่าน้องดวงใจกี่บาท

ข. น้องดวงใจมีเงินน้อยกว่าพี่มาลีกี่บาท

ค. สองคนมีเงินต่างกันกี่บาท

2.3 สมพรมีกระเป๋าถือ 5 ใบ ใบใหญ่ 3 ใบ ที่เหลือเป็นใบเล็ก สมพรมีกระเป๋าใบเล็กกี่ใบ (Part – Part – Whole – With Missing Addend)

2.4 น้อยมีเงิน 3 บาท ต้องการซื้อปากการาคา 15 บาท น้อยขาดเงินกี่บาท (Joining With Missing Addend)

2.5 จอยมีเงินอยู่จำนวนหนึ่ง แม่ให้อีก 5 บาท ทำให้จอยมีเงิน 17 บาท เดิมจอยมีเงินกี่บาท (Complementary Addition)

2.6 ตลอดวันนี้สำรวยใช้เงินไป 15 บาท ตอนเช้าใช้ไป 8 บาท ตอนบ่ายสำรวยใช้เงินไปกี่บาท (Vector Subtraction)

3. รูปแบบโจทย์ที่เกี่ยวกับการคูณ (เรียงลำดับจากง่ายไปหายาก)

3.1 ปลูกต้นไม้ 4 แถว แถวละ 3 ต้น ปลูกต้นไม้กี่ต้น (Rate)

3.2 แก้วมีเงิน 3 บาท ก้อยมีเงินเป็น 4 เท่าของแก้ว ก้อยมีเงินกี่บาท (Multiplying Factor)

3.3 รถรุ่นหนึ่งมี 3 แบบ แต่ละแบบมี 4 สี เลือกซื้อรถโดยเลือกทั้งแบบและสีได้กี่วิธี (Cartesian Product)

4. รูปแบบของโจทย์ที่เกี่ยวกับการหาร (เรียงลำดับจากง่ายไปหายาก)

4.1 มีลูกแก้ว 12 ลูก จัดใส่กล่อง ๆ ละ 3 ลูก จัดได้กี่กล่อง (Measurement)

4.2 มีลูกปิงปอง 12 ลูก จัดใส่กล่อง ๆ ละเท่า ๆ กัน 4 กล่อง แต่ละกล่องจะมีลูกปิงปองกี่ลูก (Partitioning)

2.3.2 ประเภทของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ และการหาร

2.3.2.1 ประเภทของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ

Romberg and Collis (1987, pp. 5-7) ได้จำแนกประเภทของโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการบวกและการลบได้ 4 ประเภท ดังนี้

1. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลง (Change) เป็นโจทย์ปัญหาเกี่ยวข้องกับการกระทำหรือพฤติกรรม แบ่งได้เป็น 2 ชนิด ดังนี้

1.1 โจทย์ปัญหาการเปลี่ยนแปลงแบบรวมเข้า (Change Join Problem) เป็นพฤติกรรมที่บ่งถึงการเพิ่มปริมาณขึ้นจากจำนวนเดิมที่มีอยู่

1.2 โจทย์ปัญหาการเปลี่ยนแปลงแบบนำออก (Change Separate) เป็นพฤติกรรมที่บ่งถึงการนำปริมาณออกจากจำนวนเดิมที่มีอยู่

ปัญหาทั้ง 2 ชนิดข้างต้นได้แยกเป็น 3 ลักษณะ ดังนี้

ลักษณะที่ 1 การกำหนดปริมาณที่มีอยู่เดิม และกำหนดจำนวนที่จะให้เกิดการเปลี่ยนแปลง ผลของการเปลี่ยนแปลงคือคำตอบ เช่น

ตัวอย่างที่ 1 แดงมีสมุด 5 เล่ม ดำให้อีก 8 เล่ม แดงจะมีสมุดทั้งหมดเท่าใด (แบบรวมเข้า)

ตัวอย่างที่ 2 แดงมีสมุด 13 เล่ม ให้ดำ 8 เล่ม แดงจะเหลือสมุดกี่เล่ม (แบบนำออก)

ลักษณะที่ 2 กำหนดปริมาณที่มีอยู่เดิม และผลของการเปลี่ยนแปลงให้ หาจำนวนที่มีการเปลี่ยนแปลง เช่น

ตัวอย่างที่ 1 แดงมีสมุด 5 เล่ม แดงจะต้องหามาเพิ่มอีกเท่าใดจึงจะมีสมุดรวมทั้งสิ้น 13 เล่ม (แบบรวมเข้า)

ตัวอย่างที่ 2 แดงมีสมุด 13 เล่ม หลังจากให้สมุดดำไปแล้ว แดงเหลือสมุด 5 เล่ม อยากทราบว่าแดงให้สมุดดำไปกี่เล่ม (แบบนำออก)

ลักษณะที่ 3 ให้หาปริมาณเดิมที่มีอยู่ เช่น

ตัวอย่างที่ 1 แดงมีสมุดจำนวนหนึ่ง ดำให้อีก 8 เล่ม แดงมีสมุดรวมทั้งสิ้น 13 เล่ม อยากทราบว่าเดิมแดงมีสมุดกี่เล่ม (แบบรวมเข้า)

ตัวอย่างที่ 2 แดงมีสมุดจำนวนหนึ่งให้ดำ 8 เล่ม ขณะนี้แดงเหลือสมุด 5 เล่ม อยากทราบว่าเดิมแดงมีสมุดกี่เล่ม (แบบนำออก)

2. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการรวมหมู่ (Combine) เป็นความสัมพันธ์ในเซตเซตหนึ่ง ซึ่งเกิดจากเซตย่อย 2 เซต ที่กำหนดให้มารวมกันซึ่งจำแนกได้ 2 ชนิด ดังนี้

2.1 กำหนดขนาดของเซตย่อยสองเซต ให้หาขนาดของเซตใหญ่ที่เกิดจากเซตย่อยสองเซตรวมกัน เช่น แดงมีสมุดปกอ่อน 5 เล่ม และสมุดปกแข็ง 8 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดทั้งหมดกี่เล่ม

2.2 กำหนดเซตย่อยหนึ่งเซต และขนาดของเซตใหญ่ที่เกิดจากเซตย่อย สองเซตรวมกัน ให้หาขนาดของเซตอีกเซตหนึ่ง เช่น แดงมีสมุดทั้งหมด 13 เล่ม เป็นสมุดปกอ่อน 5 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดปกแข็งกี่เล่ม

3. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบ (Compare) เป็นการเปรียบเทียบระหว่างเซตย่อย สองเซต เมื่อเซตสองเซตได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกัน เซตหนึ่งจะเรียกว่าเซตอ้างอิง (Referent Set) และอีกเซตหนึ่งจะเรียกว่าเซตเปรียบเทียบ (Compared Set) ผลที่ได้คือความแตกต่างซึ่งอาจจะมากกว่าหรือน้อยกว่า โจทย์ปัญหาประเภทนี้ตัวไม่ทราบค่าซึ่งเป็นสิ่งที่โจทย์ให้หาอาจจะเป็นความแตกต่างหรือเซตเปรียบเทียบหรือเซตอ้างอิง เช่น

3.1 แดงมีสมุด 13 เล่ม ดำมีสมุด 8 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดมากกว่าดำกี่เล่ม

3.2 แดงมีสมุด 13 เล่ม ดำมีสมุด 8 เล่ม อยากทราบว่าดำมีสมุดน้อยกว่าแดงกี่เล่ม

3.3 ดำมีสมุด 8 เล่ม แดงมีสมุดมากกว่าดำ 5 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม

3.4 ดำมีสมุด 8 เล่ม เขามีสมุดน้อยกว่าแดง 5 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม

3.5 แดงมีสมุด 13 เล่ม เขามีมากกว่าดำ 5 เล่ม อยากทราบว่าดำมีสมุดกี่เล่ม

3.6 แดงมีสมุด 13 เล่ม ดำมีสมุดน้อยกว่าแดง 5 เล่ม อยากทราบว่าดำ มีสมุดกี่เล่ม

4. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากัน (Equalize) โจทย์มีลักษณะก้ำกึ่งระหว่างโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการเปรียบเทียบ และโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลง คือจะมีส่วนเกี่ยวข้องกับการกระทำ (Action) เช่นเดียวกับปัญหาที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลง แต่อยู่บนพื้นฐานของการเปรียบเทียบของเซตสองเซต เช่น ขณะที่เซตสองเซตเปรียบเทียบกัน คำถามก็คือทำอย่างไรจึงจะทำ

ให้อีกเซตหนึ่งมีปริมาณเท่ากับอีกเซตหนึ่ง ถ้าทำให้เซตที่เล็กกว่าเท่ากับเซตที่ใหญ่กว่า เราเรียกโจทย์ปัญหาชนิดนี้ว่าโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการเท่ากันแบบรวมเข้า (Equalize Join Problem) แต่ถ้าทำให้เซตใหญ่มีขนาดเล็กลงเท่ากับเซตเล็ก เราจะเรียกโจทย์ปัญหาชนิดนี้ว่าโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากันแบบนำออก (Equalize Separate Problem)

4.1 ตัวอย่างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากันแบบรวมเข้า

- แดงมีสมุด 13 เล่ม ดำมีสมุด 8 เล่ม อยากทราบว่าดำต้องหาสมุดมาเพิ่มกี่เล่มจึงจะเท่ากับจำนวนสมุดของแดง

- ดำมีสมุด 8 เล่ม ถ้าเขาหามาอีก 5 เล่ม เขาจะมีจำนวนสมุดเท่ากับแดงพอดี อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม

- แดงมีสมุด 13 เล่ม ถ้าดำหาสมุดมาได้อีก 5 เล่ม ดำจะมีจำนวนสมุดเท่ากับแดงพอดี อยากทราบว่าดำมีสมุดกี่เล่ม

4.2 ตัวอย่างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากันแบบนำออก

- แดงมีสมุด 13 เล่ม ดำมีสมุด 8 เล่ม อยากทราบว่าแดงจะต้องเอาสมุดออกจำนวนเท่าใดจึงจะมีจำนวนสมุดเท่ากับดำพอดี

- แดงมีสมุด 13 เล่ม ถ้าเขาทำหาย 5 เล่ม แดงจะมีจำนวนสมุดเท่ากับดำพอดี อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม

จากรายละเอียดข้างต้น Carpenter and Moser (1983, pp. 5-6) ได้สรุปประเภทของโจทย์ปัญหาตามตารางที่ 2.1 ดังนี้

ตารางที่ 2.1

สรุปโจทย์ปัญหาตามประเภทต่าง ๆ

ประเภทของปัญหา	การรวมเข้า (Join)	การนำออก (Separate)
1. การเปลี่ยนแปลง (Change)	1.1 แดงมีสมุด 5 เล่ม ดำให้อีก 8 เล่ม แดงมีสมุดทั้งหมดเท่าใด 1.3 แดงมีสมุด 5 เล่ม แดงจะต้องหามาเพิ่มอีกเท่าใดจึงจะมีสมุดรวมทั้งสิ้น 13 เล่ม	1.2 แดงมีสมุด 13 เล่ม ให้ดำ 8 เล่ม แดงเหลือสมุดกี่เล่ม 1.4 แดงมีสมุด 13 เล่ม หลังจากให้สมุดแก่ดำแล้วแดงเหลือสมุด 5 เล่ม อยากทราบว่าแดงให้สมุดดำไปกี่เล่ม

(ต่อ)

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

ประเภทของปัญหา	การรวมเข้า (Join)	การนำออก (Separate)
	1.5 แดงมีสมุดจำนวนหนึ่ง ดำให้อีก 8 เล่ม แดงมีสมุดรวมทั้งสิ้น 13 เล่ม อยากทราบว่าเดิมแดงมีสมุดกี่เล่ม	1.6 แดงมีสมุดจำนวนหนึ่งให้ดำ 8 เล่ม ขณะนี้แดงเหลือสมุด 5 เล่ม อยากทราบว่าเดิมแดงมีสมุดกี่เล่ม
2. การรวมหมู่ (Combine)	2.1 แดงมีสมุดปกอ่อน 5 เล่ม และสมุดปกแข็ง 8 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดทั้งหมดกี่เล่ม	2.2 แดงมีสมุดทั้งหมด 13 เล่ม เป็นสมุดปกอ่อน 5 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดปกแข็งกี่เล่ม
3. การเปรียบเทียบ (Compare)	3.1 แดงมีสมุด 13 เล่ม ดำมีสมุด 8 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดมากกว่าดำกี่เล่ม	3.2 แดงมีสมุด 13 เล่ม ดำมีสมุด 8 เล่ม อยากทราบว่าดำมีสมุดน้อยกว่าแดงกี่เล่ม
	3.3 ดำมีสมุด 8 เล่ม แดงมีสมุดมากกว่าดำ 5 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม	3.4 ดำมีสมุด 8 เล่ม เขามีสมุดน้อยกว่าแดง 5 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม
	3.5 แดงมีสมุด 13 เล่ม เขามีมากกว่าดำ 5 เล่ม อยากทราบว่าดำมีสมุดกี่เล่ม	3.6 แดงมีสมุด 13 เล่ม ดำมีสมุดน้อยกว่าแดง 5 เล่ม อยากทราบว่าดำมีสมุดกี่เล่ม
4. การเท่ากัน (equalize)	4.1 แดงมีสมุด 13 เล่ม ดำมีสมุด 8 เล่ม อยากทราบว่าดำจะต้องหาสมุดอีก กี่เล่มจึงจะเท่ากับจำนวนสมุดของแดง	4.2 แดงมีสมุด 13 เล่ม ดำมีสมุด 8 เล่ม อยากทราบว่าแดงจะต้องเอาสมุดออกเท่าใดจึงจะมีจำนวนสมุดเท่ากับดำพอดี
	4.3 ดำมีสมุด 8 เล่ม ถ้าดำหามา อีก 5 เล่ม ดำจะมีจำนวนสมุดเท่ากับแดงพอดี อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม	4.4 ดำมีสมุด 8 เล่ม ถ้าแดงทำสมุดหาย 5 เล่ม แดงจะมีจำนวนสมุดเท่ากับดำพอดี อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม

(ต่อ)

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

ประเภทของปัญหา	การรวมเข้า (Join)	การนำออก (Separate)
	4.3 ดำมีสมุด 8 เล่ม ถ้าดำหามา อีก 5 เล่ม ดำจะมีจำนวนสมุดเท่ากับแดงพอดี อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม	4.4 ดำมีสมุด 8 เล่ม ถ้าแดงทำสมุดหาย 5 เล่ม แดงจะมีจำนวนสมุดเท่ากับดำพอดี อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม
	4.5 แดงมีสมุด 13 เล่ม ถ้าดำหาสมุดมาได้อีก 5 เล่ม ดำจะมีจำนวนสมุดเท่ากับแดงพอดี อยากทราบว่าดำมีสมุดกี่เล่ม	4.6 แดงมีสมุด 13 เล่ม ถ้าแดงทำหาย 5 เล่ม แดงจะมีจำนวนสมุดเท่ากับดำพอดี อยากทราบว่าดำมีสมุดกี่เล่ม

2.3.2.2 ประเภทของโจทย์ปัญหาการคูณ การหาร

Greer (1992, pp. 276-295) ได้จำแนกประเภทของโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการคูณ การหาร ตามกลุ่มสถานการณ์ที่สำคัญดังนี้

1. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการรวมกลุ่มที่มีจำนวนเท่ากัน (Equal Groups) เป็นสถานการณ์ ที่ลักษณะกลุ่มของสิ่งของจำนวนเท่ากันทุกกลุ่ม หรือซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง หรือการกระทำที่ซ้ำ ๆ กันโดยธรรมชาติเกิดขึ้นได้ในลักษณะต่าง ๆ กันในชีวิตประจำวัน เช่น คน n คน มีนิ้ว 5n นิ้ว หรือเดินทีละ 3 ก้าว 4 ครั้ง หรือการให้ของจำนวนเท่าเดิมแก่คนหลายคน เป็นต้น เช่น

- เด็ก 3 คน มีขนมคนละ 4 ชิ้น อยากทราบว่ามีขนมรวมทั้งสิ้นจำนวนเท่าใด
- สมุด 2 เล่ม เล่มละ 8 บาท จะต้องจ่ายเงินทั้งหมดเท่าใด

โจทย์ลักษณะนี้เป็นสถานการณ์ที่เด็กได้เผชิญครั้งแรกในเรื่องการคูณ จำนวนแต่ละจำนวนในโจทย์ จะแสดงบทบาทที่แตกต่างกัน จำนวนเด็ก 3 คน หรือจำนวนสมุด 2 เล่ม เรียกว่าตัวคูณ (Multiplier) ซึ่งจะต้องกระทำ (Operate) กับจำนวนของขนม หรือราคาสมุด หรือที่เรียกว่าตัวตั้ง (Multiplicand) เพื่อให้ได้คำตอบ ผลของจำนวนในโจทย์ที่ไม่ได้สัดส่วนกันนี้ ทำให้เกิดการหาร 2 ประเภท คือ

1.1 การหารแบบแบ่งส่วน (Partitive Division) คือ การนำเอาจำนวนกลุ่มหารจำนวนทั้งหมด เพื่อหาจำนวนในแต่ละกลุ่ม (สอดคล้องกับการแบ่งออกเป็นจำนวนที่เท่ากัน)

1.2 การหารแบบหาส่วนแบ่ง (Quantitive Division) คือ เอาจำนวนในแต่ละกลุ่มมาหารจำนวนทั้งหมดเพื่อหาว่ามีกี่กลุ่ม (บางครั้งเรียกการหารแบบวัดหรือ Measurement Division)

2. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตราส่วน (Rate) เป็นโจทย์อีกลักษณะหนึ่งของการรวมกลุ่มที่มีจำนวนเท่ากัน (Equal Groups) ตัวอย่างเช่น

- เด็กคนหนึ่งมีขนม 4 ก้อน ถ้าเด็ก 3 คน จะมีขนมรวมกันกี่ก้อน

จะเห็นว่าจำนวนก้อนต่อเด็กคูณด้วยจำนวนเด็กทั้งหมด ทำให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนของเด็กกับจำนวนของขนม สถานการณ์เช่นนี้เรียกว่า การกำหนดเฉพาะ (Particular) เมื่อเด็กมี 3 คน

3. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบการคูณ (Multiplicative Comparison) สถานการณ์ลักษณะนี้แสดงโดยคำว่า “x เท่าของ” หรือ “มากเท่ากับ n เท่า” ตัวอย่างเช่น

- แดงมีมะม่วง 3 เท่าของดำ ถ้าดำมีมะม่วง 4 ผล แดงจะมีมะม่วงกี่ผล จะเห็นว่ามะม่วงทุก ๆ 1 ลูกของดำ

จะเห็นว่ามะม่วงทุกๆ 1 ลูกของดำจะเป็น 3 ลูกของแดงเสมอ จึงทำให้ 3 เป็นตัวคูณ (Multiplier) และ 4 เป็นตัวตั้ง (Multiplicand)

4. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product) สถานการณ์ของโจทย์นี้เกี่ยวข้องกับบทนิยามที่ว่า m x n สามารถเขียนอยู่ในรูปของคู่อันดับ (Ordered Pair) โดยตัวแรกของคู่อันดับมาจากสมาชิกของ m และตัวหลังมาจากสมาชิกของ n การกระทำเช่นนี้แสดงให้เห็นจำนวนเต็ม เมื่อคูณกันแล้วจะทำให้เกิดมีการต่อเนื่องจำนวนใหม่ขึ้น (Historical Terms) ตัวอย่างเช่น

- ถ้าเด็กชาย 4 คน เด็กหญิง 3 คน กำลังรำวง อยากทราบว่าเขาจะจับคู่กันได้ทั้งหมดกี่คู่โดยไม่ซ้ำกัน

จะเห็นว่า จำนวนทั้งสอง คือ จำนวนเด็กชาย 4 คนและเด็กหญิง 3 คน แสดงบทบาทเท่าเทียมกันจึงไม่เรียกตัวใดว่าเป็นตัวตั้ง หรือ ตัวคูณสำหรับโจทย์สถานการณ์นี้ และจะทำให้เกิดลักษณะหนึ่งของการหารด้วย เช่น ได้คำตอบว่า มีรำวง 12 คู่ ก็สามารถตั้งคำถามตามมาว่า ถ้าเด็กชาย 4 คน จะเป็นเด็กหญิงกี่คน หรือถ้าเด็กหญิง 3 คน จะเป็นเด็กชายกี่คน เป็นต้น (โจทย์ลักษณะนี้จะเป็นโจทย์ที่ยากสำหรับเด็กประถมศึกษา)

5. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Area) เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวกับการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งความยาวของด้านทั้งสี่จะต้องเป็นจำนวนเต็ม การหาพื้นที่ จะทำได้โดยใช้สูตรความกว้าง x ความยาว สมมติให้รูปสี่เหลี่ยมมีด้านกว้างคือ 4 ซม.

และด้านยาวคือ 3 ซม. ดังนั้นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมรูปนี้คือ 4 x 3 การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ อาจหาได้จากการแบ่งพื้นที่ภายในออกเป็นตารางหน่วย แล้วนับจำนวนตารางหน่วยนั้น

2.4 ระดับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ได้มีนักการศึกษากล่าวถึงระดับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้หลายทัศนะ ดังนี้

Heller and Greeno (1978, p. 150) ได้สรุปว่าโจทย์ปัญหาเลขคณิตจำแนกออกได้ 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับโครงสร้างการบวกและโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับโครงสร้างการคูณ และเมื่อ Christou and Philippou (1998, pp. 436-442) ได้ทำการศึกษาระดับพัฒนาการในการแก้โจทย์ปัญหาหนึ่งขั้นตอนเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหารของนักเรียนเกรด 2, 3 และ 4 จาก 7 โรงเรียนในไซปรัสประเทศกรีก จำนวน 450 คน เขาได้จำแนกชนิดของโจทย์ซึ่งสอนในระดับประถมศึกษาในไซปรัสเป็นดังนี้

1. โครงสร้างการบวก (Additive Structure) โดยได้แนวทางการจัดประเภท ของโจทย์ จาก Romberg and Collis (1987, pp. 5-7) เป็นดังนี้

1.1 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลง (Change)

1.2 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการรวมหมู่ (Combine)

1.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบ (Compare)

1.4 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากัน (Equalize)

2. โครงสร้างการคูณ (Multiplicative Structure) ได้แนวทางการจัดประเภท ของโจทย์จาก Greer (1992, pp. 276-295) เป็นดังนี้

2.1 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการรวมกลุ่มที่มีจำนวนเท่ากับ (Equal Groups)

2.2 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตรา (Rate)

2.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบ (Compare)

2.4 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

2.5 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Area)

จากโครงสร้างทั้ง 2 ประเภทข้างต้น ได้จัดทำเป็นข้อสอบได้จำนวน 33 ข้อ จำแนกเป็นโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับโครงสร้างการบวก 20 ข้อ และโครงสร้างการคูณ 13 ข้อ แล้วให้กลุ่มตัวอย่างดังกล่าวทดสอบ ถ้าตอบถูกได้ 1 คะแนน และถ้าตอบผิดได้ 0 คะแนน ผลการศึกษาครั้งนี้ทำให้ทราบแนวโน้มที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาหนึ่งขั้นตอนของเด็ก

แต่ละระดับความสำเร็จ ซึ่งแยกได้ 4 ระดับดังนี้คือ กลุ่มที่มีความสำเร็จน้อยจัดเป็นระดับที่ 1 มีจำนวน 94 คน กลุ่มที่มีความสำเร็จต่ำกว่าปานกลาง จัดเป็นระดับที่ 2 มีจำนวน 93 คน กลุ่มที่มีความสำเร็จสูงกว่าปานกลางจัดเป็นระดับที่ 3 มีจำนวน 95 คนและกลุ่มที่มีความสำเร็จสูงจัดเป็นระดับที่ 4 มีจำนวน 84 คน และโจทย์ปัญหาในระดับที่ 1 ทำได้เพียง 3 ข้อ คือ โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเท่ากันแบบนำออก (Equalize/Separate) และอีก 2 ข้อเป็นการรวมกลุ่มที่มีจำนวนเท่ากันของการคูณ และโจทย์ที่ถือว่ายากสำหรับทุกระดับคือ โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับอัตราพื้นที่สี่เหลี่ยม ผลคูณคาร์ทีเซียน และการเปรียบเทียบโดยการหาร ผลการศึกษาพบว่าแนวโน้มความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหามีพัฒนาการเพิ่มขึ้นเป็นระบบและทีละระดับนั้น หมายถึง หากเด็กไม่สามารถแก้ปัญหาในระดับที่ต่ำกว่าได้ก่อน เด็กจะไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาในระดับที่สูงขึ้นได้

นอกจากนั้นคริสเทาและฟิลิปเพายังได้ค้นพบอีกว่า ระดับสติปัญญาจะมีลักษณะเด่นของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 1
- ใช้คำหลัก (Key Word) ช่วยในการแก้ปัญหา
- สามารถทำโจทย์ปัญหาที่แปลความตรงๆได้ชัดเจนว่าเป็นวิธีใด โจทย์ปัญหาที่ทำได้ง่ายคือ โจทย์ประเภทการเท่ากันแบบนำออก (Equalize/Separate) และโจทย์ปัญหาการคูณที่เกี่ยวกับการรวมกลุ่มจำนวนที่เท่ากัน ซึ่งเด็กเลือกทำทั้งแบบการคูณหรือบวกจำนวนที่เท่ากันเข้าด้วยกันทีละจำนวน

ระดับที่ 2
- เปรียบเทียบกลุ่ม 2 กลุ่มพร้อม ๆกันได้ และสามารถแก้โจทย์ปัญหาการเปรียบเทียบการบวกได้
- แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงได้
- แก้โจทย์ปัญหาการรวมหมู่และการเปลี่ยนแปลงได้ ยกเว้นโจทย์ปัญหานั้นขึ้นต้นด้วยตัวไม่ทราบค่า เข้าใจโจทย์การคูณการหารอย่างง่าย

ระดับที่ 3
- แก้โจทย์ปัญหาทุกประเภทในโครงสร้างการบวกได้
- แก้ปัญหาได้เองโดยไม่สนใจลำดับเหตุการณ์ที่อธิบายไว้ในหนังสือ
- สามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบการคูณและโจทย์ปัญหาการหาร เมื่อตัวตั้งเป็นจำนวนมากและตัวหารเป็นจำนวนน้อย

- เข้าใจหาวิธีการเพื่อช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาที่มีข้อมูลบางส่วนของโจทย์ไม่สมบูรณ์ได้

ระดับที่ 4 - สามารถเข้าใจโครงสร้างของสัดส่วน แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตราส่วน แต่ยังไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียนได้

ผลการทดลองยังพบอีกว่า สำหรับนักเรียนในไซปรัส สามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการนำออกง่ายกว่าการเอามารวมกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อโจทย์นั้นมีคำหลัก (key word) เช่น คำว่า หายไป

Carpenter and Moser (1983, as cited in Carpenter, 1982, pp. 21-26) ได้แบ่งความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาการบวกและการลบของเด็กระดับประถมศึกษาออกเป็น 4 ระดับ (level) ดังนี้

ระดับที่ 1 จากงานวิจัยของ Starkey and Gelman (1982, p. 22) พบว่าเด็กอายุ 3 ขวบ สามารถแก้โจทย์ปัญหาการบวก การลบอย่างง่ายได้ เมื่อเข้าโรงเรียนแล้วเด็กส่วนใหญ่จะสามารถแก้โจทย์ปัญหาที่หลากหลายแตกต่างกันได้ Blume (1982, p. 8) จากการทดลองของบลูม พบว่า เด็กที่จัดให้อยู่ในระดับที่ 1 จะใช้ของจริง เช่น สิ่งของเครื่องใช้นิ้วมือ เพื่อช่วยในการหาคำตอบ ถ้าโจทย์ข้อใดไม่แสดงอย่างชัดเจนว่าเป็นการบวกหรือการลบ เด็กก็จะแก้โจทย์ปัญหาไม่ได้ ลักษณะโจทย์ที่เด็กวัยนี้ทำได้คือ “แดงมีสมุด 5 เล่ม ดำให้อีก 8 เล่ม แดงจะมีสมุดทั้งหมดเท่าใด” เพียง 1 ใน 3 ของเด็กในระดับนี้ เท่านั้นที่จะสามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบได้ แต่ผลจากงานวิจัยหลายเล่มพบว่า เด็กในระดับนี้ยังทำไม่ได้ (Riley, et al., 1982, pp. 6) อย่างไรก็ตาม ถ้าใช้คำที่ง่ายและชัดเจน เด็กระดับนี้สามารถแก้โจทย์ประเภทดังกล่าวได้ (Hudson, 1980, pp. 232-233) สำหรับโจทย์ที่ตัวบวกเป็นตัวไม่ทราบค่า (Join Missing Addend Problems) เช่น แดงมีสมุด 5 เล่ม แดงจะต้องหามาเพิ่มอีกเท่าใดจึงจะมีสมุดรวมทั้งสิ้น 13 เล่ม โจทย์ลักษณะนี้จะเป็นโจทย์ที่ยากมากกว่าโจทย์ประเภทอื่น ๆ แต่ถ้าหากโจทย์นั้นง่ายและชัดเจนเพียงพอเด็กก็จะสามารถแก้โจทย์ปัญหานั้นได้

ระดับที่ 2 เป็นระดับหัวเลี้ยวหัวต่อของการใช้ยุทธวิธีที่มีประสิทธิภาพในการแก้โจทย์ปัญหา คือ ในระดับนี้จะใช้ทั้งของจริงและยุทธวิธีการนับเข้าช่วยเด็กระดับนี้จะแก้โจทย์ปัญหาที่ตัวบวกเป็นตัวไม่ทราบค่าได้ แต่สำหรับโจทย์ที่เริ่มต้นด้วยตัวไม่ทราบค่าเด็กก็ยังไม่สามารถทำได้ดังเช่นโจทย์ต่อไปนี้ “แดงมีสมุดจำนวนหนึ่ง ดำให้อีก 8 เล่ม ขณะนี้แดงมีสมุดทั้งสิ้น 13 เล่ม อยากทราบว่าเดิมแดงมีสมุดกี่เล่ม” สิ่งที่เด็กในระดับ 2 เหนือกว่าเด็กในระดับ 1 คือ เด็ก

สามารถที่จะเข้าใจโครงสร้างของปัญหาและบทบาทของจำนวนแต่ละตัวในปัญหานั้น ทำให้สามารถแก้โจทย์ปัญหาที่ตัวบวกเป็นตัวไม่ทราบค่าได้

ระดับที่ 3 เป็นระดับที่ใช้ยุทธวิธีที่หลากหลาย และไม่ใช้ของจริงช่วยในการแก้ปัญหาอีกต่อไป แก้โจทย์ปัญหาได้หลายประเภท และสามารถแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับ การเปลี่ยนแปลงได้ทั้ง 6 ประเภท

ระดับที่ 4 ระดับนี้เด็กจะนำยุทธวิธีการรู้จักจำนวน (Number Fact Strategy) มาช่วยในการหาคำตอบ เด็กจะสะสมความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนมาตั้งแต่ระดับ 1, 2 และ3 ตามลำดับที่เด็กรู้จักจำนวน (Number Fact) ถือว่ามีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาการบวก การลบได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงสุด ระดับนี้สามารถทำโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับ การเปรียบเทียบได้ เช่น โจทย์ “ดำมีสมุด 8 เล่ม เขามีสมุดน้อยกว่าแดง 5 เล่ม อยากทราบว่าแดงมีสมุดกี่เล่ม” หรือโจทย์ “แดงมีสมุด 13 เล่ม เขามีมากกว่าดำ 5 เล่ม อยากทราบว่าดำมีสมุดกี่เล่ม”

2.5 กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ได้มีนักการศึกษาอธิบายกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้หลายทัศนะดังนี้

สุวิทย์ มูลคำ (2545, น. 27) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. กำหนดปัญหาเป็นการทบทวนปัญหาที่พบ เพื่อทำความเข้าใจให้ถ่องแท้ในประเด็นต่าง ๆ รวมทั้งการกำหนดขอบเขตของปัญหา

2. วางแผนแก้ปัญหา เป็นการคิดหาวิธีการเทคนิคเพื่อแก้ปัญหาและกำหนดขั้นตอนย่อยของการแก้ปัญหาไว้อย่างเหมาะสม

3. เก็บรวบรวมข้อมูลและลงมือปัญหา เป็นการค้นคว้าหาความรู้จากแหล่งต่าง ๆ ตามแผนที่วางไว้ซึ่งขั้นนี้จะเป็นขั้นของการทดลองและลงมือแก้ปัญหาด้วย และวินิจฉัยว่ามีความถูกต้องเที่ยงตรงและเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใด

4. การสรุปผล เป็นการประเมินผลวิธีการแก้ปัญหาหรือการตัดสินใจเลือกวิธีแก้ปัญหาที่ได้ผลดีที่สุด โดยสรุปในรูปของหลักการที่จะนำไปอธิบายเป็นคำตอบตลอดจนนำความรู้ไปใช้

สมศักดิ์ โสภณพินิจ (2547, น. 17) ได้สรุปกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 5 ขั้นตอนดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งอาจจะใช้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ช่วย เช่น กราฟ แผนภูมิ

2. แสวงหาความรู้เพื่อนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหานั้นๆ พิจารณาถึงเหตุและหนทางที่จะแก้ปัญหา

3. วางแผนในการแก้ปัญหาเป็นยุทธวิธีที่เหมาะสมในการแก้โจทย์ปัญหา

4. แก้ปัญหา โดยดำเนินการตามแผนที่ได้วางไว้ ซึ่งอาจจะมีความจำเป็นต้องใช้การคำนวณช่วย

5. ตรวจสอบ เป็นการทบทวนเหตุผล ที่ได้ดำเนินการแก้ปัญหาไปแล้วนั้นว่า ความเหมาะสมหรือไม่เพียงใด คำนวณถูกต้องหรือไม่ คำตอบมีความน่าเชื่อถือเพียงใด

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2555, น. 78) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา ผู้เรียนจะต้องวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหาในประเด็นต่าง ๆ เช่น คำถามของปัญหาคืออะไร ข้อมูลที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง ต้องการข้อมูลใดเพิ่มเติมการวิเคราะห์ปัญหาจะช่วยให้เข้าใจปัญหาชัดเจนมากขึ้น

2. วางแผนการแก้ปัญหา เป็นการคิดวางแผนเพื่อหาวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์ไว้แล้ว ผู้เรียนจะต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ในการแก้ปัญหามาประกอบการวางแผน

3. ดำเนินการแก้ปัญหา เป็นการลงมือแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้และการตรวจสอบความถูกต้องหรือความสมเหตุสมผลของการแก้ปัญหา

4. ตรวจสอบการแก้ปัญหา เป็นการประเมินการแก้ปัญหาในภาพรวมทั้งด้านยุทธวิธีและวิธีการแก้ปัญหา ผลการแก้ปัญหา การตัดสินใจ และการนำไปประยุกต์ใช้ รวมถึงการขยายผลการแก้ปัญหาไปสู่การแก้ปัญหาอื่น ๆ

Polya (1957, pp. 5-40) ได้กล่าวถึงกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วยกระบวนการ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา เป็นขั้นการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจ ประโยคย่อยๆ สัญลักษณ์ต่างๆ ของปัญหา ซึ่งนักเรียนต้องสามารถสรุปปัญหาเป็นภาษาหรือคำพูด ของตนเองได้ สามารถระบุได้ว่าโจทย์กำหนดสิ่งใดมาให้และโจทย์ต้องการให้หาสิ่งใด

2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนที่มีความสำคัญที่ต้องพิจารณาโดยอาศัยข้อมูลจากขั้นที่ 1 นำไปสู่การกำหนดว่าจะแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยวิธีการใด โดยพิจารณาว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้จะก่อให้เกิดผลอย่างไรบ้าง และต้องใช้ความรู้เรื่องใดที่มีความเกี่ยวข้องกับปัญหา

ดังกล่าว โดยนำทฤษฎี กฎ หลักการ สูตร บทนิยาม ที่เรียนมากำหนดเป็นวิธีการที่ใช้ในการดำเนินการแก้ปัญหา

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ เป็นขั้นดำเนินการตามแผนหรือวิธีการที่กำหนดไว้ จนกระทั่งได้คำตอบที่ต้องการ สำหรับปัญหาที่มีการคิดคำนวณ ขั้นนี้เป็นขั้นลงมือคิดคำนวณเพื่อหา คำตอบตามกระบวนการทางคณิตศาสตร์

4. ขั้นตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและคำตอบ เป็นขั้นที่ต้องพิจารณาตรวจสอบ กระบวนการแก้ปัญหาของตนเองว่าเรียบร้อยครบถ้วนทุกกรณีที่เป็นไปได้หรือไม่ ตลอดจนตรวจสอบ ความถูกต้องรวมทั้งความสมเหตุสมผลของคำตอบ

Helton (1958, p. 203) กล่าวถึงกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ดังนี้

1. อ่านโจทย์ให้เข้าใจว่าโจทย์ต้องการอะไร และต้องการให้หาตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวหรือมากกว่านั้น

2. กำหนดสัญลักษณ์แทนตัวไม่ทราบค่า

3. หาความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆที่สอดคล้องกับโจทย์

4. เขียนสมการ

5. แก้สมการ

6. สรุปคำตอบและให้ความหมายของคำตอบ เช่น บอกหน่วย บอกคุณภาพ

7. ตรวจสอบคำตอบ

Mark (1965, pp. 401 - 402) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ค้นหาว่าโจทย์ให้ข้อมูลอะไรและโจทย์ถามอะไร

2. ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ให้มาเพื่อนำไปสู่สิ่งที่โจทย์ต้องการ ให้หา

3. วิเคราะห์ข้อมูลและหาความสัมพันธ์เพื่อหาผลลัพธ์

4. ตรวจสอบความถูกต้อง

Clyde (1967, pp. 109-112) ได้แบ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้น คือ

ขั้นที่ 1 เข้าใจปัญหา คือ ความรู้เกี่ยวกับคำศัพท์ต่างๆที่ใช้ในปัญหานั้น

ขั้นที่ 2 การหาสิ่งที่ต้องการใช้หาคำตอบของปัญหา

ขั้นที่ 3 ดูความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่างๆที่จะให้หาคำตอบและความสัมพันธ์กับคำตอบ มองเห็นว่าต้องใช้การดำเนินการใดจึงจะได้คำตอบ ขั้นนี้ถือว่าเป็นขั้นให้เหตุผลที่แท้จริง นักเรียนที่จะประสบความสำเร็จในขั้นนี้ต้องมีความสามารถ 3 ประการคือ

1. มองเห็นเงื่อนไขอย่างชัดเจน

2. การวางแผนแก้ปัญหาและให้เหตุผล

3. ตัดสินคำตอบที่มีเหตุผล หรือสมเหตุสมผลเพียงใด

ขั้นที่ 4 การคำนวณ จะต้องมีทักษะพื้นฐานเป็นอย่างดี

Guilford (1971, p. 130) ได้กำหนดลำดับการแก้ปัญหาว่าควรประกอบด้วย 5 ขั้นตอน คือ

1. ขั้นเตรียมการ คือ การกำหนดปัญหาหรือค้นหาปัญหาที่แท้จริงของเหตุการณ์คืออะไร

2. ขั้นวิเคราะห์ปัญหา คือ การพิจารณาว่าสิ่งใดที่เป็นสาเหตุสำคัญของปัญหาหรือสิ่งใดไม่ใช่สาเหตุของปัญหา

3. ขั้นเสนอแนวทางในการแก้ปัญหา คือ การหาวิธีการแก้ปัญหา คือ การหาวิธีการแก้ปัญหาซึ่งตรงกับสาเหตุของปัญหาและแสดงออกมาในรูปแบบของวิธีการแก้ปัญหาและผลลัพธ์ในขั้นสุดท้าย

4. ขั้นตรวจสอบผล คือ การเสนอเกณฑ์เพื่อตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้มาจากการเสนอวิธีการแก้ปัญหา ถ้าผลลัพธ์ที่ได้ยังไม่ถูกต้อง ก็ต้องเสนอวิธีการแก้ปัญหาใหม่จนกว่าจะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

5. ขั้นประยุกต์ คือ การนำวิธีการแก้ปัญหาที่ถูกต้องไปใช้ในโอกาสอื่นเมื่อพบกับสถานการณ์ที่เป็นปัญหาคล้ายกับปัญหาเดิม

Weir (1974, pp. 16-18) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นตั้งปัญหาหรือวิเคราะห์ประโยคที่เป็นมา เป็นการระบุปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ที่กำหนดให้อย่างแท้จริงและมากที่สุดภายในขอบเขตที่แท้จริงที่กำหนดให้

2. ขั้นนิยามสาเหตุของปัญหา โดยแยกแยะจากสัญลักษณ์ที่สำคัญ เป็นการระบุสาเหตุที่เป็นไปได้ที่ทำให้เกิดปัญหาโดยพิจารณาจากข้อเท็จจริงของสถานการณ์ที่กำหนดให้

3. ขั้นค้นหาแนวทางการแก้ปัญหาและตั้งสมมุติฐาน เป็นการวางแผนหรือเสนอแนวการแก้ปัญหาที่ตรงกับสาเหตุของปัญหาหรือเสนอข้อมูลเพิ่มเติม เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ระบุไว้อย่างสมเหตุสมผล

4. ขั้นพิสูจน์คำตอบหรือผลลัพธ์ ที่ได้จากการแก้ปัญหา เป็นการอธิบายว่าผลที่เกิดขึ้นจากการกำหนดวิธีแก้ปัญหานั้นสอดคล้องกับปัญหาที่ระบุไว้หรือไม่ หรือผลที่ได้จะเป็นอย่างไร

Schoen and Oehmke (1980, p. 217) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4ขั้นตอน ดังนี้

1. ทำความเข้าใจในปัญหา (Getting to Khow the Problem) นักแก้ปัญหาจะต้องอ่านและตีคำต่าง ๆ ในปัญหา สรุปลักษณะของปัญหา พิจารณาตามความเป็นจริงต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง หาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีอยู่ได้

2. การเลือกวิธีการ (Choosing What to do) วางแผนแก้ปัญหา เลือกแผนการแก้ปัญหา

3. การดำเนินการแก้ปัญหา (Doing It) ขั้นดำเนินการแก้ปัญหาตามที่วางไว้

4. ขั้นการตรวจย้อนกลับ (Looking Back) ดูว่าคา ตอบที่ได้เป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหาหรือไม่ คำตอบถูกต้องหรือไม่และยังสามารถใช้วิธีอื่นแก้ปัญหาได้อีกหรือไม่

Sternberg (1986, pp. 41-78) ได้กล่าวถึง วิธีการที่จะนำไปแก้ปัญหา “Metacomponents” ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 การนิยามธรรมชาติของปัญหา เป็นการทบทวนปัญหา เพื่อทำความเข้าใจ ต่อจากนั้น ก็เป็นการตั้งเป้าหมาย และนิยามปัญหา เพื่อจะนำไปสู่เป้าหมายที่ตั้งไว้

ขั้นที่ 2 การเลือกองค์ประกอบหรือขั้นตอนที่จะใช้ในการแก้ปัญหา เป็นการกำหนดขั้นตอน ให้แต่ละขั้นตอนมีขนาดที่เหมาะสม ไม่กว้างเกินไป หรือไม่แคบเกินไปก่อนจะกำหนดขั้นตอนต่อๆไป ควรพิจารณารายละเอียดในแต่ละขั้นตอนให้ถี่ถ้วนก่อน

ขั้นที่ 3 การเลือกกลวิธีในการจัดลำดับองค์ประกอบการแก้ปัญหา ต้องแน่ใจว่ามีการ พิจารณาปัญหาอย่างทั่วถึงแล้ว ไม่ด่วนสรุปในสิ่งที่เกิดขึ้น เพราะอาจเกิดผิดพลาดได้ ต้องแน่ใจว่าการ เรียงลำดับขั้นตอนเป็นไปตามธรรมชาติ หรือหลักเหตุผลที่จะนำไปสู่เป้าหมายที่ต้องการ

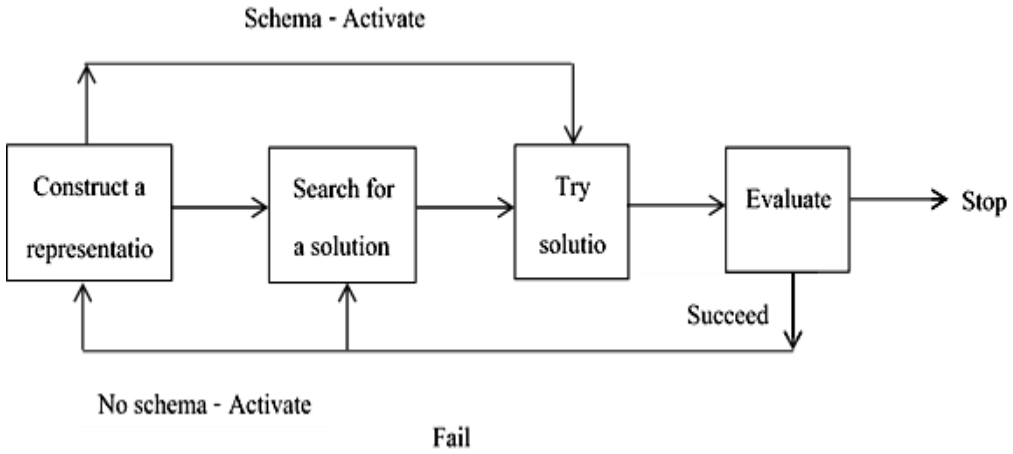
ขั้นที่ 4 การเลือกตัวแทนทางความคิดเกี่ยวกับข้อมูลของปัญหาที่ต้องการทราบรูปแบบ ความสามารถของตนใช้ตัวแทนทางความคิดในรูปแบบต่างๆจากความสามารถที่ตนมีอยู่ตลอดจนใช้ตัวแทนภายนอกมาเพิ่มเติม

ขั้นที่ 5 การกำหนดแหล่งข้อมูลที่เป็นประโยชน์ ต้องมีการทุ่มเทเวลาให้กับการวางแผนอย่าง รอบคอบ ใช้ความรู้ที่มีอยู่อย่างเต็มที่ในการวางแผนและกำหนดแหล่งข้อมูลที่จะนำมาใช้ประโยชน์ มีความยืดหยุ่นในการเปลี่ยนแปลงแผนและแหล่งข้อมูล เพื่อให้สอดคล้องกับสภาพการแก้ปัญหา และแสวงหาแหล่งข้อมูลที่เป็นประโยชน์แหล่งใหม่อยู่เสมอ

ขั้นที่ 6 การตรวจสอบวิธีการแก้ปัญหา ว่าจะเป็นวิธีที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาหรือไม่ การแก้ปัญหาด้วยกระบวนการนี้ เน้นกระบวนการที่สำคัญ 2 ประการ คือ

1. การสร้างตัวแทนของปัญหา (Problem Representation) ผู้แก้ปัญหาต้องพยายามทำความเข้าใจปัญหาโดยเชื่อมปัญหากับความรู้เดิมที่มีอยู่และสร้างเป็นตัวแทนของปัญหาขึ้น ในรูปแบบต่างๆ

2. กระบวนการแก้ปัญหา (Solution Process) เป็นการค้นหาขอบข่ายของปัญหา (Problem Space) ซึ่งเป็นการใช้ความเข้าใจ รวมไปถึงการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่กำหนดให้ในปัญหานั้น และการสร้างรูปแบบในการแก้ปัญหาขึ้น



ภาพที่ 2.1 กระบวนการแก้ปัญหาของสเทอร์นเบิร์ก

Krulik (1993, pp. 39-57) ได้กล่าวถึง ลำดับขั้นตอนของการ แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 5 ขั้น ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นการอ่านและคิด (Read and Think) เป็นขั้นที่นักเรียนได้อ่านข้อปัญหา ตีความจากภาษา สร้างความสัมพันธ์ และระลึกถึงสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกัน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วปัญหาจะประกอบด้วยข้อเท็จจริงและคำถามอยู่รวมกันอาจทำให้เกิดการไขว้เขวได้ ในขั้นนี้นักเรียน จะต้องแยกแยะข้อเท็จจริงและข้อคำถาม มองเห็นภาพของเหตุการณ์ บอกสิ่งที่กำหนดและสิ่งที่ ต้องการ และกล่าวถึงปัญหาในภาษาของเขาเองได้

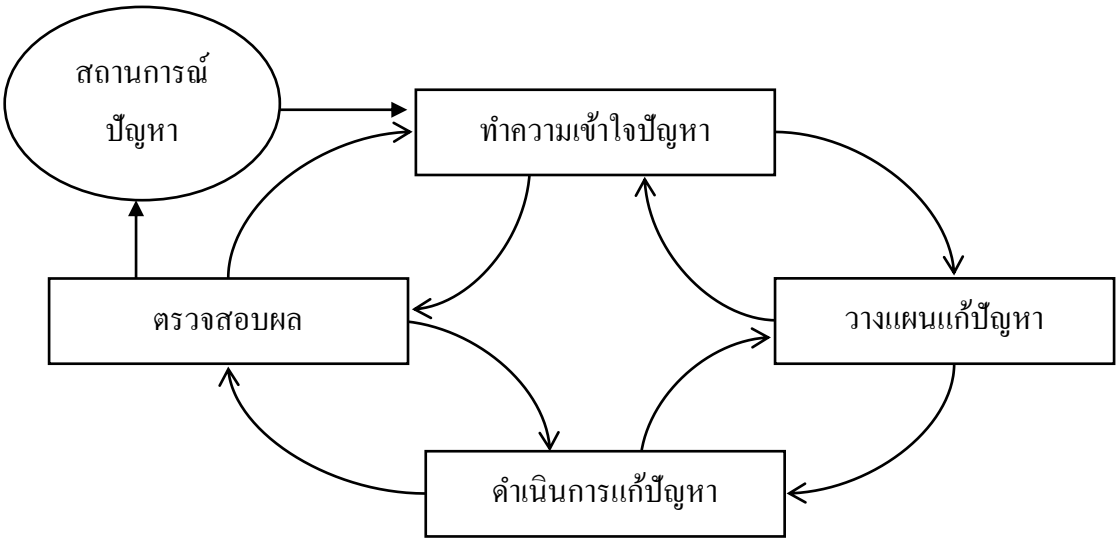
ขั้นที่ 2 ขั้นสำรวจและวางแผน (Explore and Plan) ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาจะวิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลที่มีอยู่ในปัญหา รวบรวมข้อมูล พิจารณาว่าข้อมูลที่มีอยู่เพียงพอหรือไม่ เชื่อมโยงข้อมูลเข้ากับความรู้เดิม เพื่อหาคำตอบที่เป็นไปได้ แล้ววางแผนเพื่อแก้ปัญหา โดยนำเอาข้อมูลที่มีอยู่มาสร้างเป็นแผนภาพหรือรูปแบบต่าง ๆ เช่น แผนผัง ตาราง กราฟ หรือวาดภาพประกอบ

ขั้นที่ 3 ขั้นเลือกวิธีการแก้ปัญหา (Select a Strategy) ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาต้องเลือกวิธีการที่เหมาะสมที่สุด แต่ละบุคคลจะเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันไป และในการแก้ปัญหาหนึ่งปัญหาอาจจะมีการนำเอาหลาย ๆ วิธีการแก้ปัญหามาประยุกต์เพื่อแก้ปัญหานั้นก็ได้

ขั้นที่ 4 ขั้นค้นหาคำตอบ (Find an Answer) เมื่อเข้าใจปัญหาและเลือกวิธีในการแก้ปัญหาได้แล้ว นักเรียนควรจะประมาณคำตอบที่เป็นไปได้ ในขั้นนี้นักเรียนควรลงมือปฏิบัติด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ให้ได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง ซึ่งจะต้องอาศัยการประมาณค่า การใช้ทักษะการคิดคำนวณ การใช้ทักษะการคิดคำนวณ การใช้ทักษะทางพีชคณิต และการใช้ทักษะทางเรขาคณิต

ขั้นที่ 5 ขั้นมองย้อนและขยายผล (Reflect and Extend) ถ้าคำตอบที่ได้ไม่ใช่ผลที่ต้องการก็ ต้องย้อนกลับไปยังกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหาเพื่อหาวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบที่ถูกต้องใหม่ และนำเอาวิธีการที่ได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์อื่นต่อไป ในขั้นนี้ประกอบด้วย การตรวจสอบคำตอบ การค้นหาทางเลือกที่นำไปสู่ผลลัพธ์ การมอง ความสัมพันธ์ระหว่างข้อเท็จจริงและคำถาม การขยายผลลัพธ์ที่ได้ การพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้ และการ สร้างสรรค์ปัญหาที่น่าสนใจจากข้อปัญหาเดิม

Willson (1993, pp. 60-62) ได้ปรับปรุงกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา โดยเสนอเป็นกรอบแนวคิดเกี่ยวกับการ แก้ปัญหาที่แสดงความเป็นพลวัต (Dynamic) และเป็นวงจรของขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา ดังแผนภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 2.2 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัต

LeBlance (1997, pp. 16-20) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่ช่วยให้ผู้แก้ปัญหาเข้าใจปัญหาได้อย่างชัดเจน จะทำให้รู้สิ่งที่โจทย์ถาม ข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดมา

2. ขั้นเลือกวิธีการที่จะใช้ในการหาคำตอบ เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหาตัดสินใจเลือกยุทธวิธีหรือวิธีการใดวิธีการหนึ่ง ในการหาคำตอบของปัญหา

3. ขั้นลงมือแก้ปัญหา เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหานำวิธีการที่เลือกไว้ในขั้นที่ 2 มาใช้แก้ปัญหาบางครั้งวิธีการที่เลือกใช้ในการหาคำตอบนั้น อาจเป็นวิธีการที่ทำให้ไม่ได้คำตอบ ผู้แก้ปัญหาต้องย้อนกลับไปสู่ขั้นที่ 2 อีกครั้ง

4. ขั้นทบทวนการแก้ปัญหาและคำตอบ เป็นการตรวจสอบขั้นตอนต่าง ๆ ที่ใช้ในการแก้ปัญหาตลอดจนคำตอบที่ได้

Dossey (2005, p. 47) ได้เสนอกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วย 7 ขั้นตอนดังนี้

1. ทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา
2. จำแนกประเด็นปัญหาและวางแผนหาคำตอบ
3. จัดรูปแบบแสดงความหมายเงื่อนไขของโจทย์
4. เลือกกลวิธีการแก้โจทย์ปัญหา
5. ดำเนินการหาคำตอบ
6. ทบทวนคำตอบ
7. สื่อสารและขยายคำตอบ

สรุปได้ว่า กระบวนการการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจ เป็นขั้นที่ช่วยให้ผู้แก้ปัญหาเข้าใจปัญหาได้อย่างชัดเจน จะทำให้รู้สิ่งที่โจทย์ถาม ข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดมา

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหาพิจารณาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้กับสิ่งที่ต้องการหาคำตอบ โดยใช้ทฤษฎี หลักการ กฎ สูตร นิยาม และยุทธวิธีต่างๆ แล้วตัดสินใจเลือกวิธีการนั้นๆ ในการหาคำตอบของปัญหา

3. ขั้นการดำเนินการแก้ปัญหา เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหานำขั้นวางแผนในการแก้ปัญหามาลงมือปฏิบัติ

4. ขั้นการตรวจสอบคำตอบ เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหาพิจารณาตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาของตนตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องและสมเหตุสมผลของคำตอบ

2.6 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ได้มีนักการศึกษาอธิบายยุทธวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้หลายทัศนะดังนี้

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2538, น. 21-71) กล่าวว่า ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ เป็นการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่างๆที่ปัญหากำหนดแล้วคาดเดาคำตอบของปัญหา หลังจากนั้นตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าไม่ถูกต้องก็คาดเดาใหม่โดยอาศัยพื้นฐานของเหตุผล จากการคาดเดาครั้งแรก

2. ยุทธวิธีวาดภาพ เป็นการแสดงสถานการณ์ ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ออกมาเป็นภาพเพื่อช่วยให้ผู้แก้ปัญหามีความเข้าใจปัญหาแจ่มชัดขึ้นทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆและสามารถกำหนดแนวในการแก้ปัญหาได้รวดเร็วขึ้น

3. ยุทธวิธีสร้างตาราง เป็นการแจงกรณีต่างๆ ที่เป็นไปได้ของสถานการณ์ที่ปัญหากำหนดโดยนำมาเขียนในรูปตาราง เป็นการจัดระบบข้อมูลทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลชัดเจน ซึ่งนำไปสู่การหาคำตอบของปัญหา

4. ยุทธวิธีใช้ตัวแปร แทนจำนวนที่ไม่ทราบค่า ซึ่งจะเป็นโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับจำนวนหรือปริมาณ โดยสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่มีตัวแปรปรากฏอยู่ แล้วศึกษาหาคำตอบของปัญหาจากความสัมพันธ์นั้น

5. ยุทธวิธีค้นหาแบบรูป เป็นการศึกษาข้อมูลที่มีอยู่ แล้ววิเคราะห์ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเหล่านั้นแล้วคาดเดาคำตอบ และสรุปเป็นรูปแบบหรือกฎเกณฑ์ของข้อมูลเหล่านั้น ทำให้ได้คำตอบที่โจทย์ต้องการ

6. ยุทธวิธีแบ่งกรณี เป็นการแบ่งกรณีมากกว่า 1 กรณีทำให้แต่ละกรณีมีความชัดเจนมากขึ้น เมื่อหาคำตอบของทุกกรณีได้แล้วนำมาพิจารณาหาคำตอบของทุกกรณีร่วมกันจะได้ภาพรวมซึ่งเป็นคำตอบของปัญหา

7. ยุทธวิธีการให้เหตุผล เป็นการใช้ข้อมูลที่ปัญหากำหนดให้ เป็นเหตุบังคับให้เกิดผล ซึ่งต้องผสานกับความรู้ และประสบการณ์ต่างๆ ที่ผู้แก้ไขปัญหามีอยู่เพื่อให้ได้คำตอบที่ต้องการ

8. ยุทธวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ เป็นการสร้างปัญหาที่มีโครงสร้างคล้ายกับปัญหาเดิมแต่มีความยุ่งยากน้อยกว่า ตลอดจนแบ่งเป็นปัญหาเดิมออกเป็นปัญหาย่อยๆที่สัมพันธ์กับปัญหาเดิมจะทำให้ผู้แก้ปัญหามองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาเดิม

9. ยุทธวิธีสร้างแบบจำลอง เป็นการทำให้ปัญหามีความชัดเจนมากขึ้น เป็นการสื่อที่เป็นรูปธรรมมาแสดงสถานการณ์ของปัญหา และรวมไปถึงการใช้สื่อในการแก้ปัญหา

10. ยุทธวิธีทำย้อนกลับ ปัญหาบางชนิดสามารถแก้ไขง่ายกว่าถ้าเริ่มต้นแก้ปัญหาโดยพิจารณาจากผลลัพธ์สุดท้ายแล้วมองย้อนกลับมาสู่ตัวปัญหาอย่างมีขั้นตอน ยุทธวิธีมองย้อนกลับใช้กระบวนการคิดวิเคราะห์โดยพิจารณาจากผลย้อนกลับไปหาเหตุ ซึ่งต้องหาเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการกับสิ่งที่กำหนด

ฉวีวรรณ เศวตมาลย์ (2542, น. 36-38) ได้เสนอยุทธวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. การกำหนดคุณลักษณะของปัญหา (Characterize The Problem) อะไรคือสิ่งที่กำหนด อะไรคือสิ่งที่ต้องการ อะไรขาดหายไป ท่านกำลังค้นหาอะไรอยู่ ข้อมูลที่จำเป็นกำหนดมาให้หรือไม่ จงดูตัวอย่างหลายๆ ข้อ มีกรณีพิเศษใดหรือไม่ที่กำหนดขอบข่ายของคำตอบที่เป็นไปได้ ท่านสามารถ ทำปัญหานั้นให้ง่ายลงโดยใช้ประโยชน์จากการสมมาตรหรือทำข้อความ“โดยไม่สูญเสียความเป็นกรณี ทั่วไป” เพื่อย่อโจทย์ทั้งข้อให้เป็นกรณีเฉพาะได้หรือไม่

2. การที่ท่านเคยเห็นปัญหานั้นมาก่อนหรือไม่ (Have You Seen This Before) หรือท่านเคยเห็นปัญหานี้ในรูปแบบที่แตกต่างไปเพียงเล็กน้อยไหม ถ้าเคยท่านสามารถถ่ายทอดไปสู่ปัญหานี้ แล้วใช้วิธีการบางตอนที่เคยแก้ปัญหาเดิมมาใช้ได้หรือไม่ จงตั้งปัญหาที่คล้ายคลึงกันที่มีตัวแปรน้อย กว่าแล้วแก้ดูโดย “การคลาย” เงื่อนไขในข้อหนึ่งหรือมากกว่านั้นท่านสามารถเรียนรู้อะไรเกี่ยวกับ ปัญหาเดิมบ้างหรือไม่

3. การค้นหารูปแบบ (Look for a Pattern) โดยการพิจารณาลักษณะโดยภาพรวม

4. การทำให้ง่ายลง (Simplification) บางครั้งความสัมพันธ์รูปแบบง่าย ๆ อาจถูกจัดให้อยู่ใน รูปแบบหรือนิพจน์ที่ “ยุ่งเหยิง” จงพยายามแทนค่ารูปที่ยุ่งเหยิงด้วยสัญลักษณ์ง่ายๆ แล้วค้นหา ความสัมพันธ์ที่อยู่เบื้องหลัง

5. การลดลง (Reduction) ปัญหาของท่านสามารถแบ่งเป็นปัญหาย่อยๆ ที่จะแก้ให้ง่ายขึ้น หรือไม่

6. การทำย้อนกลับ (Work Backwards) เมื่อท่านพยายามพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ท่านทราบอยู่ แล้วว่าเป็นจริง อาจจะง่ายขึ้นถ้าเริ่มต้นทำจากข้อสรุปขึ้นไปหาเหตุผล

7. การจัดทำรายการ (Make a List) ถ้าท่านใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ มันอาจจะเป็นไปได้ที่จะ จัดรายการทั้งหมดของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทุกขั้นของกระบวนการบางอย่าง ถ้าท่านสนใจในผลลัพธ์ใด โดยเฉพาะของกระบวนการนั้น มันก็ควรจะรวมอยู่ในรายการทั้งหมดนั้น

8. การจำลองสถานการณ์ (Simulation and Modeling) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อาจ สร้างได้โดยการเรียนแบบกระบวนการที่ซับซ้อน ในคณิตศาสตร์หรือในโลกแห่งความจริงนั้น ถ้าผลที่ ได้รับโดยใช้สถานการณ์จาลองถูกต้องแม่นยำแล้ว สถานการณ์จาลองนั้นคือความสำเร็จ

9. ตรรกศาสตร์ทางการ (Formal Logic) อุปนัยทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่มีศักยภาพ ในคณิตศาสตร์หลายสาขา เช่นเดียวกับเทคนิคที่เรียกว่า การพิสูจน์โดยอ้อม (indirect Prove) ซึ่ง เป็นที่รู้กันว่าเป็นการพิสูจน์แบบ Contrapositive ด้วยคำตอบของท่านมีความหมายหรือไม่ ตรวจ คำตอบคำตอบของท่านโดยใช้สามัญสานึกและการให้เหตุผลแบบมีทางเลือกข้อสุดท้าย เมื่อใดก็ตามที่ ท่านพยายามจะแก้ปัญหา จงค้นหาวิธีหลาย ๆ วิธีเพื่อเป็นตัวแทนลักษณะของปัญหา จงสร้างรูปและ ระบุชื่อประกอบ จัดทำรายการคุณลักษณะ เขียนรายการแสดงความสัมพันธ์ เป็นต้น ยิ่งท่านมีวิธีแทน ปัญหาได้มากเท่าใด ก็ยิ่งมีแนวโน้มที่ท่านจะค้นพบความสัมพันธ์ที่แอบแฝงอยู่ ซึ่งจะเป็นกุญแจไขไปสู่ คำตอบได้มากเท่านั้น

สมศักดิ์ โสภณพินิจ (2547, น. 18-20) ได้รวบรวมยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ดังนี้

1. มองภาพรวมๆเพื่อวิเคราะห์ปัญหาในลักษะของปัญหาทั้งหมด การมองภาพรวมๆเป็นการทบทวนภาพทั้งหมด ทำความเข้าใจเนื้อหา การทบทวนอาจทำได้โดยการอ่านหลายๆรอบเพื่อที่จะได้ไม่หลงทาง มองภาพให้มุมกว้างจนกว่าจะเห็นหนทางแก้ไข ในกรณีที่คิดไม่ออกอาจจะเปลี่ยนมุมมองเสียใหม่

2. กำหนดหนทางไว้เลือกหลายทาง การหาทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมดไว้หลายๆ ทาง เพื่อนำมาพิจารณาในรายละเอียดว่า ทางเลือกใดที่ดีและเป็นไปได้มากที่สุด การพิจารณาเพื่อตัดสินใจเลือกนั้นต้องกระทำอย่างรอบคอบ

3. กำจัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับปัญหาทิ้งไป เหลือไว้แต่ข้อมูลที่เป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหานั้นๆ โดยเฉพาะขีดเส้นใต้เนื้อหาหรือเรื่องราวที่สำคัญจากข้อมูลที่มีอยู่ พิจารณาทางเลือกที่เป็นไปได้โดยตัดหนทางที่เป็นไปไม่ได้หรือประโยคที่ไม่เกี่ยวข้องทิ้งไปเสียก่อน โดยหลักตรรกศาสตร์แล้วค่อยพิจารณาตัดสินใจจากข้อมูลทั้งหมดที่มีประกอบกัน

4. เลือกวิธีการในการคำนวณให้เหมาะโดยวิเคราะห์จากข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาว่าจะใช้ข้อมูลข่าวสารใด ยุทธวิธีที่สมควรนำมาจึงจะได้ผล และควรจะใช้การคำนวณ บวก ลบ คูณ หาร หาค่าราก ยกกำลัง หรือใช้ความรู้ทางสถิติ แคลคูลัส พีชคณิต กราฟ ฯลฯ อย่างใดมาช่วยในการคำนวณ

5. ใช้การเดาแล้วทดสอบ โดยใช้เหตุผลในการพิจารณาคำตอบควรจะเป็นเช่นใด การเดาจะต้องเดาอย่างมีหลักเกณฑ์ สมเหตุสมผล ไม่ลำเอียง เมื่อเดาแล้วต้องมีการตรวจสอบความ

ถูกต้องเรื่อยๆจนกว่าจะได้คำตอบ การเดาจะมีประสิทธิภาพมากขึ้นถ้ามีเทคนิคบางอย่างช่วย เช่น การประมาณค่า การวิเคราะห์ข้อมูล การจำลองสถานการณ์ การพิจารณากรณีแวดล้อมประกอบการพิจารณา

6. การสร้างรูปแบบที่เป็นรูปธรรม ซึ่งจะช่วยให้มองเห็นปัญหาในลักษณะหลายๆ มิติ รูปแบบที่สร้างขึ้น จำลองขึ้นอาจจะเป็นคน วัตถุ สิ่งก่อสร้าง โครงสร้าง เครือข่าย เพื่อให้เกิดต้นแบบและสามารถนำไปหาความสัมพันธ์กับข้อมูลที่มีอยู่ หรือนำไปสู่คำตอบที่ต้องการได้

7. หารูปแบบที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างมีระบบ ปัญหาบางปัญหาเรื่องราวบางเรื่องราว อาจจะมีลักษณะเป็นวงจร เป็นการเรียนลำดับ เป็นอนุกรมของตัวเลข เป็นรูปเรขาคณิต เป็นค่าของสัดส่วน เป็นลักษณะของการแปลงค่า เป็นคู่ลำดับ หรือเป็นฤดูกาล เป็นต้น การหาแบบรูปได้จะทำให้สามารถไขปัญหาได้

8. จัดระบบข้อมูลใหม่ หมายถึง การจัดระบบข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นให้ มีรูปแบบที่ง่ายแก่การเข้าใจ เช่น ทำเป็นรายการ ทำเป็นตาราง ทำเป็นข้อสังเกตรวมข้อมูลเรื่องราวเดียวกันไว้ตัดข้อมูลที่ฟุ่มเฟือยออกไป รวมทั้งให้บันทึกข้อมูลที่สูญหายไปซึ่งอาจจะเป็นเบาะแสให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

9. สร้างภาพประกอบ เพื่อให้สามารถมองเห็นลักษณะของตัวปัญหาได้อย่างชัดเจนหากข้อมูลที่มีลักษณะที่เป็นการบรรยายความ เป็นตารางตัวเลขสามารถจะทำให้ชัดเจนขึ้นได้โดยการสร้างภาพประกอบ โดยเขียนกราฟประกอบคำอธิบาย เขียนรูปเรขาคณิตสเกตซ์ภาพลายเส้นเขียนเป็นไดอะแกรม จะทำให้มองเห็นปัญหาในลักษณะที่เป็นรูปธรรมมากขึ้นแยกปัญหาใหญ่ออกเป็นปัญหาย่อยๆให้มีลักษณะเช่นเดียวกับปัญหาเดิม แต่อยู่ในรูปลักษณะที่ง่ายขึ้น เป็นการแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า มีตัวเลขที่ซับซ้อนน้อยกว่าแต่เป็นโจทย์ปัญหาลักษณะเดียวกัน เมื่อสามารถแก้ปัญหาที่เล็กกว่าได้จะมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาที่เล็กกว่าได้จะมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาที่ยุ่งยากซับซ้อนมากขึ้นได้ ในทางพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เราใช้ Mathematical reduction อ้างอิงจากเรื่องย่อยๆมาสรุปเป็นเรื่องที่ใหญ่กว่าได้

10. ใช้ตรรกศาสตร์ในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาโดยใช้สามัญสำนึก ใช้หลักการและเหตุผล บ่อยครั้งที่พบว่าการแก้ปัญหาในบางครั้งที่ผู้ที่พยายามแก้ปัญหา อาจจะมองลึกซึ้งจนเกินไปและลืมนึกถึงความเป็นจริงตามธรรมชาติ ขาดการใช้สามัญสำนึกทำให้หาหนทางแก้ไขที่เหมาะสมไม่ได้ การถามว่า “ถ้าเป็นอย่างนี้แล้วจะเกิดอะไรขึ้นต่อไป” เป็นการโยงจากเหตุไปสู่การใช้วิธีแบบอนุมานและอุปมาน เป็นวิธีการหนึ่งที่เป็นประโยชน์

11. การคิดย้อนกลับ การแก้ไขปัญหาโดยพิจารณาเหตุในบางครั้งไม่สามารถกระทำได้ง่ายนัก การสืบสาวจากผลย้อนหลังไปหาเหตุในบางครั้งสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่า

ตัวอย่างการพิสูจน์เราขาคณิต ตรีโกนมิติ รวมทั้งการสืบสวนเรื่องราวต่างๆเป็นต้น ในบางครั้งจะพบว่าสามารถเริ่มต้น (ปลายทาง) เพื่อไปสู่เหตุ (ต้นทาง) ได้ง่ายและรวดเร็วมากขึ้น

12. ใช้สูตร ปัญหาหลายปัญหามีสูตรในการแก้ บางสูตรใช้ได้กับหลายปัญหาในการแก้ปัญหาจะต้องพิจารณาก่อนว่าสูตรใดบ้างที่มีความเกี่ยวข้อง และสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้ ให้วิเคราะห์ปัญหาแล้วนำสูตรไปใช้ หลังจากนั้นจำเป็นต้องตรวจสอบความถูกต้องของสูตรและการนำสูตรไปใช้อย่างถูกต้องกับเรื่องราวนั้นๆ

13. ตั้งคำถามที่เหมาะสมโดยตนเองหรือโดยผู้อื่น สามารถใช้แง่คิดที่สามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ คำถามที่เป็นประโยชน์ เช่น ทำไม เป็นไปได้อย่างไร ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น จะช่วยเกิดความกระจ่างในปัญหามากขึ้น ช่วยให้สามารถจับใจความสำคัญของปัญหาได้ การตั้งคำถามและหาคำตอบจะสามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาได้

14. คุย อภิปรายหรือระดมความคิด เป็นยุทธวิธีหนึ่งซึ่งทำให้ได้ความคิดหรือเห็นแนวทางในการแก้ปัญหา เนื่องจากการคุยหรือการอภิปราย ทำให้เกิดการมองเห็นปัญหาจากมุมมองที่ต่างกันออกไป เกิดแนวทางในการแก้ปัญหาได้หลายจุด มีการเติมหรือแก้ไขในจุดบกพร่องที่มองจากบางมุมไม่เห็น นอกจากนั้นยังจะพบว่า คำพูดบางคำทำให้สะกดใจหรือเป็นกุญแจให้สามารถหาหนทางแก้ปัญหาได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551, น. 13-14) กล่าวว่า ยุทธวิธีแก้ปัญหาเป็นเครื่องมือสำคัญและสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ดี ที่พบบ่อยในคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. การค้นหารูปแบบ เป็นการวิเคราะห์ปัญหาและค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีลักษณะเป็นระบบหรือแบบรูปในสถานการณ์ปัญหานั้น ๆ แล้วคาดเดาคำตอบ ซึ่งคำตอบที่ได้จะยอมรับว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้องเมื่อผ่านการตรวจสอบยืนยัน ยุทธวิธีนี้มักจะใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับเรื่องจำนวนและเรขาคณิต

2. การสร้างตาราง เป็นการจัดระบบข้อมูลใส่ในตาราง ตารางที่สร้างขึ้นจะช่วยในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ อันจะนำไปสู่การค้นพบแบบรูปหรือข้อชี้แนะอื่น ๆ ตลอดจนช่วยให้ไม่ลืมหรือสับสนในกรณีใดกรณีหนึ่ง เมื่อต้องแสดงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปัญหา

3. การเขียนภาพหรือแผนภาพ เป็นการอธิบายสถานการณ์และแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ของปัญหาด้วยภาพหรือแผนภาพ ซึ่งการเขียนภาพหรือแผนภาพจะช่วยให้เข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น และบางครั้งก็สามารถหาคำตอบของปัญหาได้โดยตรงจากภาพหรือแผนภาพนั้น

4. การแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด เป็นการจัดระบบข้อมูล โดยแยกเป็นกรณี ๆ ที่เกิดขึ้นทั้งหมด ในการแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด นักเรียนอาจขจัดกรณีที่ไม่ใช้ออกก่อน แล้วค่อยค้นหาระบบหรือแบบรูปของกรณีที่เหลืออยู่ ซึ่งถ้าไม่มีระบบในการแจงกรณีที่เหมาะสม ยุทธวิธีนี้ก็จะไม่มีประสิทธิภาพ ยุทธวิธีนี้จะใช้ได้ดีถ้าปัญหานั้นมีจำนวนกรณีที่เป็นไปได้แน่นอน ซึ่งบางครั้งเราอาจใช้การค้นหาแบบรูปและการสร้างตารางมาช่วยในการแจกกรณีด้วยก็ได้

5. การคาดเดาและตรวจสอบ เป็นการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ปัญหากำหนดผสมผสานกับประสบการณ์เดิมที่เกี่ยวข้อง มาสร้างข้อความคาดการณ์ แล้วตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์นั้น ถ้าการคาดเดาไม่ถูกต้องก็คาดเดาใหม่โดยอาศัยประโยชน์จากความไม่ถูกต้องของการคาดเดาครั้งแรก ๆ เป็นกรอบในการคาดเดาคำตอบของปัญหาครั้งต่อไป นักเรียนควรคาดเดาอย่างมีเหตุผลและมีทิศทาง เพื่อให้สิ่งที่คาดเดานั้นเข้าใกล้คำตอบที่ต้องการมากที่สุด

6. การเขียนสมการ เป็นการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่กำหนดของปัญหาในรูปของสมการ ซึ่งบางครั้งอาจเป็นอสมการก็ได้ ในการแก้สมการนักเรียนต้องวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาเพื่อหาว่า ข้อมูลและเงื่อนไขที่กำหนดมามีอะไรบ้าง และสิ่งที่ต้องการหาคืออะไร หลังจากนั้น กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ต้องการหาหรือแทนสิ่งที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลที่กำหนดมาให้แล้วเขียนสมการ หรืออสมการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลเหล่านั้น ในการหาคำตอบของสมการ มักใช้สมบัติของ การเท่ากันมาช่วยในการแก้สมการ ได้แก่ สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติการบวกและสมบัติ การคูณ และเมื่อใช้สมบัติการเท่ากันมาช่วยแล้ว ต้องมีการตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไข ของปัญหา ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหา ถือว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องของปัญหานี้ ยุทธวิธีนี้มักใช้บ่อยในปัญหาทางพีชคณิต

7. การคิดแบบย้อนกลับ เป็นการวิเคราะห์ปัญหาที่พิจารณาจากผลย้อนกลับไปสู่เหตุ โดยเริ่มจากข้อมูลที่ได้ในขั้นตอนสุดท้าย แล้วคิดย้อนขั้นตอนกลับมาสู่ข้อมูลที่ได้ในขั้นตอนเริ่มต้น การคิดแบบย้อนกลับใช้ได้ดีกับการแก้ปัญหาที่ต้องการอธิบายถึงขั้นตอนการได้มาซึ่งคำตอบ

8. การเปลี่ยนมุมมอง เป็นการเปลี่ยนการคิดหรือมุมมองให้แตกต่างไปจากที่คุ้นเคย หรือที่ต้องทำตามขั้นตอนทีละขั้นเพื่อให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น ยุทธวิธีนี้มักใช้ในกรณีที่แก้ปัญหาด้วย ยุทธวิธีอื่นไม่ได้แล้ว สิ่งสำคัญของยุทธวิธีนี้คือ การเปลี่ยนมุมมองที่แตกต่างไปจากเดิม

9. การแบ่งเป็นปัญหาย่อย เป็นการแบ่งปัญหาใหญ่หรือปัญหาที่มีความซับซ้อนหลายขั้นตอนออกเป็นปัญหาย่อยหรือเป็นส่วน ๆ ซึ่งในการแบ่งเป็นปัญหาย่อยนั้นนักเรียนอาจลด

จำนวนของข้อมูลลง หรือเปลี่ยนข้อมูลให้อยู่ในรูปที่คุ้นเคยและไม่ซับซ้อน หรือเปลี่ยนให้เป็นปัญหา ที่คุ้นเคยหรือเคยแก้ปัญหามาก่อนหน้านี้

10. การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ เป็นการอธิบายข้อความหรือข้อมูลที่ปรากฏอยู่ในปัญหานั้นว่าเป็นจริง โดยใช้เหตุผลทางตรรกศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหาบางปัญหาเราใช้การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ ร่วมกับการคาดเดาและตรวจสอบ หรือการเขียนภาพและแผนภาพ จนทำให้บางครั้งเราไม่สามารถแยกการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ออกจากยุทธวิธีอื่นได้อย่างเด่นชัด ยุทธวิธีในวิธีนี้มักใช้บ่อยในปัญหาทางเรขาคณิตและพีชคณิต

11. การให้เหตุผลทางอ้อม เป็นการแสดงหรืออธิบายข้อความหรือข้อมูลที่ปรากฏอยู่ในปัญหานั้นว่าเป็นจริง โดยการสมมติว่าข้อความที่ต้องการแสดงนั้นเป็นเท็จ แล้วหาข้อขัดแย้ง ยุทธวิธีนี้มักใช้กับการแก้ปัญหาที่ยากแก่การแก้ปัญหาโดยตรง และง่ายที่จะหาข้อขัดแย้งเมื่อกำหนดให้ข้อความที่จะแสดงเป็นเท็จ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2560, น. 62-70) กล่าวว่า ยุทธวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา ผู้สอนต้องจัดประสบการณ์การแก้ปัญหาที่หลากหลายและเพียงพอให้กับผู้เรียน โดยยุทธวิธีที่เลือกใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ นั้น จะต้องมีความเหมาะสมและสอดคล้องกับพัฒนาการของผู้เรียน ซึ่งยุทธวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีดังนี้

1. การวาดภาพ (Draw a Picture) การวาดภาพ เป็นการอธิบายสถานการณ์ปัญหาด้วยการวาดภาพจำลอง หรือเขียนแผนภาพ เพื่อทำให้เข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น และเห็นแนวทางการแก้ปัญหานั้น ๆ ในบางครั้งอาจได้คำตอบจากการวาดภาพนั้น

2. การหาแบบรูป (Find a Pattern) การหาแบบรูป เป็นการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาโดยค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นระบบ หรือที่เป็นแบบรูป แล้วนำความสัมพันธ์หรือแบบรูปที่ได้นั้นไปใช้ในการหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหา

3. การคิดย้อนกลับ (Work Backwards) การคิดย้อนกลับ เป็นการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาที่ทราบผลลัพธ์ แต่ไม่ทราบข้อมูลในขั้นเริ่มต้น การคิดย้อนกลับเริ่มคิดจากข้อมูลที่ได้ในขั้นสุดท้าย แล้วคิดย้อนกลับทีละขั้นมาสู่ข้อมูลในขั้นเริ่มต้น

4. การเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) การเดาและตรวจสอบ เป็นการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและเงื่อนไขต่าง ๆ ผสมผสานกับความรู้ และประสบการณ์เดิมเพื่อเดาคำตอบที่น่าจะเป็นไปได้ แล้วตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าไม่ถูกต้องให้เดาใหม่โดยใช้ข้อมูลจากการเดาครั้งก่อนเป็นกรอบในการเดาคำตอบครั้งต่อไปจนกว่าจะได้คำตอบที่ถูกต้องและสมเหตุสมผล

5. การทำปัญหาให้ง่าย (Simplify the problem) การทำปัญหาให้ง่าย เป็นการลดจำนวนที่เกี่ยวข้องในสถานการณ์ปัญหา หรือเปลี่ยนให้อยู่ในรูปที่คุ้นเคย ในกรณีที่สถานการณ์ปัญหามีความซับซ้อน อาจแบ่งปัญหาเป็นส่วนย่อย ๆ ซึ่งจะช่วยให้หาคำตอบของสถานการณ์ปัญหาได้ง่ายขึ้น

6. การแจกแจงรายการ (Make a list) การแจกแจงรายการ เป็นการเขียนรายการหรือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจากสถานการณ์ปัญหาต่าง ๆ การแจกแจงรายการควรทำอย่างเป็นระบบ โดยอาจใช้ตารางช่วยในการแจกแจงหรือจัดระบบของข้อมูลเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างชุดของข้อมูลที่นำไปสู่การหาคำตอบ

7. การตัดออก (Eliminate) การตัดออก เป็นการพิจารณาเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา แล้วตัดสิ่งที่กำหนดให้ในสถานการณ์ปัญหาที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข จนได้คำตอบที่ตรงกับเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหานั้น

8. การเปลี่ยนมุมมอง การเปลี่ยนมุมมอง เป็นการแก้สถานการณ์ปัญหาที่มีความซับซ้อนไม่สามารถใช้ยุทธวิธีอื่นในการหาคำตอบได้ จึงต้องเปลี่ยนวิธีคิด หรือแนวทางการแก้ปัญหาให้แตกต่างไปจากที่คุ้นเคยเพื่อให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

Krulik and Rudnick (1982, p. 43) กล่าวว่า ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีหลายหลายต้องเลือกใช้ให้เหมาะสมกับปัญหา ยุทธวิธีหนึ่งอาจจะเหมาะสมกับปัญหาหนึ่งแต่ต่างปัญหาอาจไม่ใช่ นอกจากนั้นบางปัญหาจำเป็นต้องใช้หลายยุทธวิธีในการแก้ปัญหา และเสนอแนะกลวิธีในการแก้ปัญหาไว้ 8 ประการดังต่อไปนี้

1. การจำแนกแบบรูป (Pattern Recognition)
2. ทำย้อนกลับ (Working Backwards)
3. การเดาและตรวจสอบ (Guess and Test)
4. การสร้างสถานการณ์จำลองหรือทดลอง (Simulation or Experimentation)
5. การย่อความ (Reduction)
6. การแจกแจงรายการ (Exhaustive Listing)
7. การใช้ตรรกศาสตร์เชิงอนุมาน (Logical Deduction)
8. การแสดงความหมายข้อมูล (Representing Data) โดยใช้
    8.1 กราฟ (Graph)
    8.2 สมการ (Equation)
    8.3 นิพจน์เชิงพีชคณิต (Algebraic Expression)
    8.4 ตาราง (Table)

8.5 แผนภูมิ (Chart)

8.6 ไดอะแกรม (Diagram)

Matlin (1983, pp. 225-229) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 5 วิธี

1. การใช้สัญลักษณ์ (Symbol) ถือเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากในการสร้างตัวแทนที่เป็นนามธรรมที่ไม่ซับซ้อนมากนัก

2. การเขียนรายงาน (List) สำหรับปัญหาที่ไม่สามารถแปลงข้อมูลให้เป็นสัญลักษณ์ได้ก็สามารถใช้การเขียนรายการแทนโดยเขียนเฉพาะข้อมูลสำคัญของปัญหา ซึ่งทำให้สามารถมองเห็นลักษณะของปัญหาได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

3. การใช้ตารางสัมพันธ์ (Matrices) เป็นตารางที่ชี้ให้เห็นถึงการเชื่อมโยงข้อมูลของปัญหา ใช้ได้ดีกับปัญหาที่มีความซับซ้อน

4. การใช้กราฟ (Graphs) มีประโยชน์สำหรับปัญหาที่ไม่สามารถใช้สัญลักษณ์หรือการเขียนรายการ หรือการใช้ตารางสัมพันธ์ในการสร้างตัวแทนของปัญหา โดยที่การใช้กราฟยังสามารถแสดงการเคลื่อนไหวของสิ่งต่างๆ ได้ด้วย

5. การเขียนภาพ (Figure) เป็นการเขียนภาพประกอบ เพื่อสร้างความเข้าใจในปัญหา การเขียนภาพอาจเขียนจากการใช้จิตนาการ (Visual Imagery) ซึ่งมีประโยชน์ในการเก็บข้อมูลที่ไม่มีกฎเกณฑ์ และช่วยขจัดรูปแบบเก่าๆ ในการหาสิ่งที่เป็นตัวแทนของปัญหานอกจากนี้อาจเขียนภาพเป็นแผนภูมิหรือโครงร่างแทนความเข้าใจซึ่งในการสร้างตัวแทนของปัญหานั้นไม่อาจกล่าวได้ว่าวิธีใดเป็นวิธีที่ดีที่สุดเพราะบางวิธีไม่สามารถใช้กับบางปัญหาและบางปัญหาอาจต้องใช้หลายวิธีร่วมกัน

Cruikshank (2000, pp. 41-44) เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ดังนี้

1. การเดาหรือตรวจสอบ (Guess and Check)

2. การหาแบบรูป (Look for a Pattern)

3. เขียนรายละเอียดของโจทย์ (Make a Systematic List)

4. สร้างและวาดรูปหรือแบบจำลอง (Make and Use a Drawing or Model)

5. กำจัดสิ่งที่เป็นไปไม่ได้ (Eliminate Possibilities)

Reys (2004, pp. 124-130) ได้เสนอยุทธวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 10 ประการ คือ

1. ปฏิบัติเพื่อออกไปจากปัญหา (Act it out) เป็นกลวิธีนี้นักเรียนได้สัมผัสกับสถานการณ์ของโจทย์ปัญหา และนักเรียนได้เรียนรู้วิธีการแก้ปัญหาจากสถานการณ์นั้น

2. ใช้ภาพหรือแผนภาพ (Make a drawing or diagram) เป็นการเขียนภาพหรือแผนภาพของข้อมูลตามโจทย์กำหนดให้

3. ค้นหาแบบรูป (Look for a pattern) เป็นการใช้แบบรูปของจำนวนหรือรูปภาพหรือแผนภาพของข้อมูลตามที่โจทย์กำหนดให้

4. สร้างตาราง (Construct a table) เป็นการจัดระเบียบของข้อมูลในรูปแบบของตารางช่วยให้ผู้แก้โจทย์ปัญหามองเห็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้

5. จำแนกทุกกรณีที่เป็นไปได้ (Identify all possibilities) กลวิธีนี้มักใช้ร่วมกับยุทธวิธีสร้างตาราง ค้นหาแบบรูป ทำให้นักเรียนรู้ว่าคำตอบของโจทย์ปัญหาเป็นอะไรได้บ้าง

6. เดาและตรวจสอบ (Guess and Check) เป็นการคาดเดาคำตอบและตรวจสอบคำตอบที่ได้ ผู้แก้ปัญหาจะมั่นใจว่าคำตอบที่ได้จากการเดาถูกต้องหรือไม่ จะต้องตรวจสอบคำตอบว่าเป็นไปตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดหรือไม่

7. ทำย้อนกลับ (Work back Ward) เป็นการหาคำตอบโดยพิจารณาจากข้อมูลสุดท้ายกำหนดมาให้ ช่วยในการหาคำตอบที่โจทย์ถาม

8. เขียนประโยคเปิด (Write an Open Sentence) เป็นการฝึกหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในประโยคคำถาม ซึ่งมีลักษณะเหมือนคำทาย เพื่อใช้ในการหาคำตอบ

9. แก้ปัญหาที่ง่ายกว่าหรือปัญหาที่คล้ายกัน (Solve a Simpler or Similar Problem) เป็นการกำหนดปัญหาขึ้นมาใหม่ที่มีลักษณะที่ง่ายกว่า หรือคล้ายกัน โดยมีโครงสร้างของปัญหาเหมือนเดิม แล้วนำวิธีการที่ใช้แก้โจทย์ปัญหาที่ง่ายกว่าหรือคล้ายกันไปแก้โจทย์ปัญหาเดิม

10. เปลี่ยนจุดมุ่งหมายของปัญหา (Change your point of view) เป็นการแก้โจทย์ปัญหาทีละตอนทำให้ได้คำตอบของโจทย์ปัญหา

Hatfield (1993, pp. 50-60) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ยุทธวิธีหาหาแบบรูป (Look for a Pattern) ยุทธวิธีนี้จะพิจารณาแบบรูปของส่วนแรกใน ลำดับ ของจำนวนหรือข้อมูลที่ให้มาก่อนแล้วจึงค้นหาไปอีก

2. ยุทธวิธีวิเคราะห์ให้เป็นปัญหาย่อยๆ (Identify a Sub Goal) ในการวางแผนแก้ปัญหาบางปัญหา คำตอบของปัญหาที่ง่ายกว่าหรือคำตอบของปัญหาที่คล้ายกันมากๆหรือที่เคยพบมาแล้วอาจกลายเป็นเป้าหมายย่อยๆของเป้าหมายพื้นฐานในการแก้ปัญหานั้นได้

3. ยุทธวิธีคิดย้อนหลัง (Work Backward) ปัญหาบางปัญหาอาจง่ายขึ้น ถ้าเริ่มต้นพิจารณาจากคำตอบหรือผลขั้นสุดท้ายและทำย้อนกลับ

4. ยุทธวิธีการสร้างแผนภาพ (Draw a Diagram) การวาดแผนภาพเป็นส่วนหนึ่งในการแก้ปัญหาในวิชาเรขาคณิต จะสร้างรูปเพื่อการเข้าใจซึ่งจำเป็นในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ปัญหา

ที่ไม่ใช่ปัญหาในวิชาเรขาคณิตก็สามารถใช้การวาดรูปในการแก้ปัญหาได้ ยุทธวิธีนี้มีคุณค่าและประโยชน์ต่อการเรียนรู้ของผู้เรียนเป็นวิธีการอันชาญฉลาดในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผล

5. การวาดภาพ กราฟและตาราง (Drawing Pictures , Graphs,and Table)ยุทธวิธีนี้จะช่วยให้ผู้เรียนมองเห็นภาพจากปัญหาที่ยุ่งยาก หรือปัญหาที่เป็นนามธรรม การวาดภาพ กราฟและตาราง เป็นการแสดงข้อมูลเชิงจำนวนให้ผู้เรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ไม่ปรากฏ โดยทันทีในการแก้ปัญหาจะใช้ยุทธวิธีสร้างตาราง เพื่อ

5.1 แจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด

5.2 แจงกรณีบางกรณีที่จำเป็นและเพียงพอ

5.3 หาความสัมพันธ์ของข้อมูลตั้งแต่ 2 ข้อมูลขึ้นไป และ

5.4 หานัยทั่วไปของความสัมพันธ์

6. ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) ในขั้นแรกจะเดาคำตอบและใช้เหตุผลดูความเป็นไปได้ แล้วตรวจคำตอบ ถ้าการเดาครั้งนั้นไม่ถูกต้อง ขั้นต่อไปคือการเรียนรู้เกี่ยวกับความเป็นไปได้ของคำตอบให้มากขึ้นแล้วเดาต่อไป

7. ตรวจสอบว่าข้อมูลเพียงพอหรือไม่ (Insufficient Information) บางครั้งข้อมูลที่ให้มาไม่เพียงพอมีบางส่วนขาดหายไป

8. การตัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวออก (Elimination of Extraneous Data) ปัญหาบางปัญหามีข้อมูลที่ไม่จำเป็น ผู้เรียนต้องตัดข้อมูลข้อมูลส่วนที่ไม่จำเป็นออกเพื่อที่จะให้ข้อมูลนั้นแคบลง แทนที่จะพยายามใช้ข้อมูลทั้งหมดที่ไม่มีความหมาย

9. พัฒนาสูตรและเขียนสมการ (Developing Formula and Writing Equation) สูตรที่สร้างขึ้นจะใช้ประโยชน์โดยการแทนจำนวนลงในสูตรเพื่อหาคำตอบ

10. เขียนแผนภูมิสายงาน (Flowcharting) การเขียนแผนภูมิสายงานจะช่วยให้เห็นกระบวนการของการแก้ปัญหา ซึ่งแผนภูมิสายงานหรือผังงานเป็นเค้าโครงที่แสดงรายละเอียดของขั้นตอน ที่ต้องดำเนินงานตามเงื่อนไขต่างๆ ที่ต้องการก่อนที่จะไปแก้ปัญหา

11. ยุทธวิธีการพิจารณากรณีที่ง่ายกว่าหรือแบ่งเป็นปัญหาย่อยๆ (Simplifying the problem) เป็นการพิจารณาสถานการณ์ที่ซับซ้อนโดยเริ่มพิจารณาจากกรณีง่ายๆของปัญหานั้นก่อน แล้วนำความคิดนั้นมาใช้แก้ปัญหาที่กำหนดให้

12. ยุทธวิธีแจงกรณีเป็นไปได้ (Account for all possibilities) ยุทธวิธีนี้ผู้เรียนจะใช้ก่อนที่จะทราบคำตอบ ผู้เรียนอาจจะแจงความเป็นไปได้ทั้งหมด โดยนำมาเขียนเป็นรายการหรือสร้างตารางเหมาะสมสำหรับปัญหาที่มีจำนวนความเป็นไปได้ไม่มากนัก

13. เปลี่ยนมุมมองของปัญหา (Change your point of view) ปัญหาบางปัญหาต้องการเปลี่ยนสิ่งที่มีอยู่ในใจหรือหยุดความคิดนั้น ดังนั้น ต้องมองภาพสถานการณ์ด้วยวิธีใหม่

สรุปได้ว่า ยุทธวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่ช่วยให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา ซึ่งยุทธวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีดังนี้

1. ยุทธวิธีวาดภาพ เป็นการอธิบายสถานการณ์ปัญหาด้วยการวาดภาพจำลอง หรือเขียนแผนภาพ เพื่อทำให้เข้าใจปัญหาได้ชัดเจนขึ้น และเห็นแนวทางในการแก้ปัญหานั้น ๆ

2. ยุทธวิธีค้นหาแบบรูป เป็นการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา โดยค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นระบบ แล้วคาดเดาคำตอบ และสรุปเป็นรูปแบบหรือกฎเกณฑ์ของข้อมูลเหล่านั้น แล้วนำความสัมพันธ์หรือแบบรูปที่ได้นั้นไปใช้ในการหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหา

3. ยุทธวิธีทำย้อนกลับ เป็นการวิเคราะห์ปัญหาที่ทราบผลลัพธ์ แต่ไม่ทราบข้อมูลในขั้นเริ่มต้น การคิดย้อนกลับเริ่มต้นจากข้อมูลที่ได้ในขั้นสุดท้าย แล้วคิดย้อนกลับทีละขั้นอย่างมีขั้นตอนไปสู่ข้อมูลในขั้นเริ่มต้น

4. ยุทธวิธีการเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) เป็นการพิจารณาปัญหาข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ผสมผสานกับความรู้ และประสบการณ์เดิมเพื่อเดาคำตอบที่น่าจะเป็นไปได้อย่างสมเหตุสมผล แล้วตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าไม่ถูกต้องให้เดาคำตอบใหม่โดยใช้ข้อมูลจากการเดาครั้งก่อนเป็นกรอบในการเดาคำตอบครั้งต่อไปจนกว่าจะได้คำตอบที่ถูกต้องและสมเหตุสมผล

5. ยุทธวิธีทำปัญหาให้ง่าย การทำปัญหาให้ง่าย เป็นการลดจำนวนที่เกี่ยวข้องในสถานการณ์ปัญหา หรือเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบ ความสัมพันธ์ที่คุ้นเคย ในกรณีที่ปัญหามีความซับซ้อน อาจแบ่งปัญหาเป็นส่วนย่อยๆซึ่งจะช่วยให้หาคำตอบของปัญหาได้ง่ายขึ้น

6. ยุทธวิธีแจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด เป็นการแจกแจงเป็นกรณีๆ ที่สถานการณ์ของปัญหาเกิดขึ้นทั้งหมด ซึ่งควรทำอย่างเป็นระบบ โดยอาจใช้ตารางช่วยในการแจกแจงหรือจัดระบบของข้อมูลเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างชุดของข้อมูลจนนำไปสู่การหาคำตอบ

7. ยุทธวิธีการตัดออก (Eliminate) เป็นการพิจารณาเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาแล้วตัดสิ่งที่กำหนดให้ในสถานการณ์ปัญหาที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขเพื่อให้ข้อมูลแคบลง จนได้คำตอบที่ตรงกับเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหานั้น

8. ยุทธวิธีเปลี่ยนมุมมอง เป็นการแก้สถานการณ์ปัญหาที่มีความซับซ้อนไม่สามารถใช้ยุทธวิธีอื่นในการหาคำตอบได้ จึงต้องเปลี่ยนวิธีคิด หรือแนวทางการแก้ปัญหาให้แตกต่างไปจากที่คุ้นเคยเพื่อให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

9. การเขียนสมการ เป็นการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่กำหนดของปัญหาในรูปของสมการ ซึ่งอาจเป็นอสมการก็ได้ โดยกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ต้องการหาหรือแทนสิ่งที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลที่กำหนดมาให้แล้วเขียนสมการ หรืออสมการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลเหล่านั้น

10. การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ เป็นการอธิบายข้อความ สถานการณ์ ปัญหาต่างๆ โดยใช้หลักการเหตุผลทางตรรกศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหา ซึ่งในบางครั้งอาจจะต้องสามัญสำนึกของตนเองเข้ามาช่วยในการให้เหตุผลด้วย

11. การให้เหตุผลทางอ้อม เป็นการแสดงหรืออธิบายข้อความ โดยใช้วิธีการสมมติว่าข้อความหรือข้อมูลที่ต้องการแสดงนั้นเป็นเท็จ แล้วหาข้อขัดแย้ง เมื่อผลสรุปเกิดขัดแย้ง จึงสามารถได้ว่าข้อความหรือข้อมูลเหล่านั้นเป็นจริง

2.7 องค์ประกอบการแก้โจทย์ปัญหาให้มีประสิทธิภาพ

ได้มีนักการศึกษาเสนอองค์ประกอบที่ช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้หลายทัศนะ ดังนี้

สุวร กาญจนมยูร (2533, น. 3) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหามีดังนี้

1. องค์ประกอบเกี่ยวกับภาษา ได้แก่ คำ และความหมายของคำต่าง ๆ ที่อยู่ในโจทย์ปัญหาแต่ละข้อว่ามีความหมายอย่างไร

2. องค์ประกอบเกี่ยวกับความเข้าใจ เป็นขั้นตีความ และแปลความจากข้อความทั้งหมดของโจทย์ปัญหา ออกมาเป็นประโยคสัญลักษณ์ ที่นำไปสู่การหาคำตอบด้วยวิธีบวก ลบ คูณ และหาร ซึ่งนักเรียนจะต้องคิดได้ด้วยตนเอง

3. องค์ประกอบเกี่ยวกับการคิดคำนวณ ขั้นนี้นักเรียนจะต้องมีทักษะ ในการบวก ลบ คูณ และหาร ได้อย่างรวดเร็วและแม่นยำ

4. องค์ประกอบเกี่ยวกับการแสดงวิธีทำ ครูผู้สอนต้องให้นักเรียน ฝึกอ่านย่อความจากโจทย์แต่ละตอน โดยเขียนสั้น ๆ รัดกุม และมีใจความชัดเจนตามโจทย์

5. องค์ประกอบในการฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหา ผู้สอนจะต้องเริ่มฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาให้นักเรียนทุกคน จากง่ายไปหายาก กล่าวคือ เริ่มฝึกทักษะตามตัวอย่าง หรือเลียนแบบตัวอย่างที่ครูผู้สอนทำให้ดูก่อน จึงไปฝึกทักษะจากการแปลความ และฝึกทักษะจากหนังสือเรียนต่อไป

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537, น. 81-82) กล่าวถึงองค์ประกอบของความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่สำคัญ ประกอบด้วย

1. ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา ปัจจัยสำคัญที่ส่งผลต่อความสามารถด้านนี้คือ ทักษะการอ่านและการฟัง เพราะนักเรียนจะรับรู้ปัญหาได้จากการอ่านและการฟังแต่ปัญหาส่วนใหญ่อยู่ในรูปข้อความที่เป็นตัวอักษร เมื่อพบปัญหานักเรียนจะต้องอ่านทำความเข้าใจโดยแยกประเด็นที่สำคัญของปัญหาออกมาให้ได้ว่า ปัญหากำหนดอะไรให้บ้างและปัญหาต้องการอะไร มีข้อมูลใดบ้างที่จำเป็นในการแก้ปัญหา การทำความเข้าใจปัญหา

2. ทักษะในการแก้ปัญหา เกิดขึ้นจากการฝึกฝนทำอยู่บ่อย ๆ จนเกิดความชำนาญ เมื่อนักเรียนได้ฝึกคิดแก้ปัญหาอยู่เสมอ นักเรียนจะมีโอกาสได้พบปัญหาต่าง ๆ หลายรูปแบบ ซึ่งอาจมีโครงสร้างของปัญหาที่คล้ายคลึงกันหรือแตกต่างกัน ได้มีประสบการณ์ในการเลือกยุทธวิธีต่าง ๆ เพื่อนไปใช้ได้เหมาะสมกับปัญหา เมื่อเผชิญกับปัญหาใหม่ก็จะสามารถนำประสบการณ์เดินมาเทียบเคียง พิจารณาว่าปัญหาใหม่นั้นมีโครงสร้างคล้ายคลึงกับปัญหาที่ตนเองคุ้นเคยหรือไม่ สามารถแยกเป็นปัญหาย่อย ๆ ที่มีโครงสร้างของปัญหาคล้ายคลึงกับปัญหาที่ตนเองคุ้นเคยหรือไม่ สามารถใช้ยุทธวิธีใดในการแก้ปัญหานี้ได้บ้าง นักเรียนที่มีทักษะในการการแก้ปัญหาจะสามารถวางแผนเพื่อกำหนดยุทธวิธีในการแก้ปัญหาได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสม

3. ความสามารถในการคิดคำนวณและความสามารถในการให้เหตุผล เพราะถึงแม้ว่าจะทำความเข้าใจปัญหาได้อย่างแจ่มชัดและวางแผนแก้ปัญหาได้เหมาะสม แต่เมื่องมือแก้ปัญหาแล้วคิดคำนวณไม่ถูกต้อง การแก้ปัญหานั้นก็ถือว่าไม่ประสบความสำเร็จ สำหรับปัญหาที่ต้องการคำอธิบายให้เหตุผล นักเรียนจะต้องอาศัยทักษะพื้นฐานในการเขียนและการพูด นักเรียนจะต้องมีความเข้าใจในกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ความหมายของการพิสูจน์ และวิธีพิสูจน์แบบต่าง ๆ เท่าที่จำเป็นและเพียงพอในการนำไปใช้แก้ปัญหาในแต่ละระดับชั้น

4. แรงขับ เนื่องจากปัญหาเป็นสถานการณ์ที่แปลกใหม่ ซึ่งนักเรียนไม่คุ้นเคยและไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที ผู้แก้ปัญหาจะต้องคิดวิเคราะห์อย่างเต็มที่เพื่อให้ได้คำตอบ นักเรียนจะต้องมีแรงขับที่สร้างพลังในการคิด ซึ่งแรงขับนี้เกิดขึ้นจากปัจจัยต่าง ๆ เช่น เจตคติ ความสนใจ แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ ความสำเร็จ ตลอดจนความซาบซึ้งในการแก้ปัญหา ซึ่งต้องใช้ระยะเวลายาวนานในการปลูกฝังให้เกิดขึ้นในตัวนักเรียนโดยผ่านทางกิจกรรมต่าง ๆ ในการเรียนการสอน

5. ความยืดหยุ่น ผู้แก้ปัญหาที่ดีจะต้องมีความยืดหยุ่นในการคิด คือ ไม่ยึดติดในรูปแบบที่ตนเองคุ้นเคย แต่จะยอมรับรูปแบบและวิธีการใหม่ ๆ อยู่เสมอ ความยืดหยุ่นเป็นความสามารถในการปรับกระบวนการคิดแก้ปัญหาโดยบูรณาการความเข้าใจ ทักษะและ

ความสามารถในการแก้ปัญหา ตลอดจนแรงขับที่มีอยู่เชื่อมโยงเข้ากับสถานการณ์ของปัญหาใหม่ สร้างเป็นองค์ความรู้ที่สามารถปรับใช้เพื่อแก้ปัญหาใหม่ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

กรมวิชาการ (2544, น. 38) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่ช่วยในการแก้ปัญหา มีดังนี้

1. ประสบการณ์ เช่น สิ่งแวดล้อมรอบ ๆ ตัว พื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ วิธีการแก้ปัญหาที่คุ้นเคย ลักษณะของโจทย์ปัญหาที่คุ้นเคย อายุ

2. จิตพิสัย เช่น ความสนใจ ความตั้งใจ ความอดทน ความกระตือรือร้น ความกลัว แต่นักเรียนก็รู้สึกว่าจำเป็นต้องทำ ความพยายาม

3. สติปัญญา เช่น ความสามารถทางการอ่าน ความสามารถในการให้เหตุผล ความจำ ความสามารถในการคิดคำนวณ ความสามารถในการวิเคราะห์ เป็นต้น

สมทรง สุวพานิช (2549, น. 32) กล่าวว่า การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบ ได้แก่ ความสามารถในการอ่านข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ แล้วสามารถตีความหมายหรือขยายความโจทย์ แปลงโจทย์ปัญหาจากรูปแบบหนึ่งไปยังอีกรูปแบบหนึ่ง รวมทั้งมีความสามารถในการจัดระบบข้อมูล จัดลำดับขั้นตอนในการวิเคราะห์รูปแบบและ หาข้อสรุป ทั้งยังต้องการทักษะในการคำนวณ ตลอดจนการมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์ด้วย

Polya (1957, p. 225) ได้กล่าวว่า สิ่งที่สัมพันธ์กับความสามารถในการแก้ปัญหาซึ่งเป็นสิ่งที่มีส่วนช่วยในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ คือ

1. ความสามารถในการอ่านเพื่อทำความเข้าใจปัญหา เมื่อนักเรียนอ่านโจทย์ปัญหาข้อนั้นแล้วจะต้องสามารถจับใจความได้ว่าโจทย์ปัญหาข้อนั้นต้องการให้หาคำตอบเกี่ยวกับอะไร โจทย์กำหนดข้อมูลอะไรให้บ้าง และข้อมูลที่กำหนดให้เงื่อนไขหรือข้อกำหนดอย่างไรบ้าง

2. ความสามารถในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของข้อมูลที่กำหนดไว้และประยุกต์ใช้ความรู้และประสบการณ์เดิมของตน เพื่อทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาให้ชัดเจนยิ่งขึ้น

3. ความสามารถในการแปลงสิ่งที่กำหนดให้ในโจทย์เป็นประโยคสัญลักษณ์

4. ความสามารถในการวางแผนเพื่อกำหนดแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา

5. ความสามารถในการคิดคำนวณ เพื่อหาคำตอบที่ถูกต้องของโจทย์ปัญหา นักเรียนจะต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับระบบจำนวน และตัวเลข ตลอดจนมีทักษะในการคำนวณต่าง ๆ อย่างคล่องแคล่ว

6 ความสามารถในการตรวจสอบคำตอบเพื่อให้มั่นใจว่า คำตอบที่คำนวณได้นั้นเป็นคำตอบที่ถูกต้องและสมบูรณ์ของโจทย์ปัญหาข้อนั้น

Adams, Ellis and Beeson (1977, pp. 174-175) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 3 ด้าน

1. สติปัญญา (Intelligencs) การแก้ปัญหาจำเป็นต้องใช้การคิดระดับสูง สติปัญญาเป็นสิ่งสำคัญยิ่งประการหนึ่งในการแก้ปัญหา องค์ประกอบของสติปัญญาที่มีส่วนสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้ปัญหา คือ องค์ประกอบทางปริมาณ (Quantitative Factors) ดังนั้นนักเรียนบางคนอาจมีความสามารถในองค์ประกอบทางด้านภาษา (Verball Factors) แต่อาจด้อยในความสามารถที่ไม่ใช่ภาษาหรือทางด้านปริมาณ

2. การอ่าน (Reading) การอ่านเป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการแก้ปัญหา เพราะการแก้ปัญหาต้องอ่านอย่างรอบคอบ อ่านอย่างวิเคราะห์ อันจะนำไปสู่การตัดสินใจว่าควรจะทำอะไรและอย่างไร มีนักเรียนจำนวนมากที่มีความสามารถในการอ่านแต่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้

3. ทักษะพื้นฐาน (Basis Skill) หลังจากการวิเคราะห์สถานการณและตัดสินใจว่าจะทำอะไรแล้วก็ยังเหลือขั้นตอนการได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องเหมาะสม นั่นคือนักเรียนจะต้องรู้การดำเนินการต่าง ๆ ที่จำเป็นซึ่งก็คือ ทักษะพื้นฐานนั่นเอง

Charles and Lester (1982, p. 45) แบ่งปัจจัยที่มีผลต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็น 3 ด้าน ดังนี้

1. องค์ความรู้ เช่น การให้เหตุผล การอ่าน และทักษะกระบวนการทางอภิปัญญา

2. อารมณ์ เช่น ความมั่นใจในตนเอง ความเครียด ความวิตกกังวล แรงจูงใจที่น่าสนใจ ความเชื่อ การเห็นคุณค่า

3. ประสบการณ์ เช่น อายุของนักเรียน กลยุทธ์ เทคนิค และความคุ้นเคยกับเนื้อหาของปัญหา

Baroody (1993, pp. 2-10) กล่าวถึงองค์ประกอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนไว้ 3 ประการ คือ

1. องค์ประกอบทางด้านความรู้ความคิด (Cognitive Factor) ซึ่งประกอบด้วยความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์และยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

2. องค์ประกอบทางด้านความรู้สึก (Affective Factor) ซึ่งจะเป็นแรงขับในการแก้ปัญหา และแรงขับนี้มาจากความสนใจ ความเชื่อมั่นใจตนเอง ความพยายามหรือความตั้งใจและความเชื่อของนักเรียน

3. องค์ประกอบทางด้านการสังเคราะห์ความคิด (Matacognitive Factor) เป็นความสามารถในการสังเคราะห์ความคิดของตนเองในการแก้ปัญหา ซึ่งจะสามารถสนองตอบได้ว่าทรัพยากรอะไรบ้างที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาและจะติดตามและควบคุมทรัพยากรเหล่านั้นได้อย่างไร

สรุปได้ว่า องค์ประกอบที่ช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ต้องอาศัยองค์ประกอบในหลาย ๆ ด้าน ที่เกี่ยวข้องกับตัวผู้แก้ปัญหา ได้แก่ สติปัญญา ประสบการณ์ของผู้แก้ปัญหา แรงขับ เช่น เจตคติ ความเชื่อ ความสนใจ ส่วนด้านทักษะกระบวนการแก้ปัญหาผู้แก้ปัญหาจะต้องมีองค์ประกอบด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา โดยผู้เรียนจะต้องมีทักษะการอ่านและการฟัง สามารถคิดคำนวณ คิดวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ วางแผน ให้เหตุผลและตรวจสอบคำตอบ ทั้งนี้เกิดจากการฝึกฝนและความชำนาญของตัวผู้แก้ปัญหา ซึ่งองค์ประกอบเหล่านี้จะช่วยให้ผู้แก้ปัญหาประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.8 ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ สำหรับเด็กควรจะเป็นรูปภาพ คำทายหรือ ข้อความ ที่ได้มาจากประสบการณ์ที่นักเรียนพบจริง ๆ จากการที่ได้ทำกิจกรรมต่าง ๆหรือ จากสภาพการณ์ที่นักเรียนนึกถึง หรือคิดถึงได้ ได้มีนักการศึกษาเสนอวิธีสร้างโจทย์ปัญหคณิตศาสตร์ให้มีลักษณะที่น่าสนใจไว้ดังนี้

สิริพร ทิพย์คง (2533, น. 10-11) กล่าวว่า ลักษณะของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ดีควรเป็นภาษาที่สามารถเข้าใจง่าย ไม่สั้นและยาวเกินไป และควรเป็นดังนี้

1. ช่วยกระตุ้นพัฒนาความคิด
2. ไม่ยากหรือง่ายเกินไปสำหรับความสามารถของเด็กในวัยนั้น ๆ
3. ให้ข้อมูลอย่างเพียงพอที่จะนำไปประกอบการพิจารณาแก้ปัญหาได้
4. ข้อมูลที่มีอยู่ต้องทันสมัยและเป็นเหตุการณ์ที่เป็นไปได้จริง
5. สามารถใช้การวาดแผนภาพไดอะแกรมหรือแผนภูมิช่วยในการแก้ปัญหา
6. ในการแก้ปัญหานั้นต้องอาศัยประสบการณ์หรือความรู้ที่เคยเรียนมาแล้ว
7. ก่อให้เกิดการวิเคราะห์และแยกแยะปัญหา ซึ่งเป็นขบวนการที่สำคัญในทางความคิด
8. คำตอบที่ได้ควรเป็นคำตอบที่มีเหตุผล ไม่ใช่คำตอบที่ได้จากการจำ

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537, น. 90) กล่าวว่า สิ่งที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่งในการจัดกิจกรรมการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์คือตัวปัญหาที่จะนำมาให้นักเรียนคิดหาคำตอบ ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดีมีลักษณะดังต่อไปนี้

1. ท้าทายความสามารถของนักเรียน ต้องเป็นปัญหาที่ไม่ยากหรือง่ายเกินไป ถ้าง่ายเกินไปอาจไม่ดึงดูดความสนใจ แต่ถ้ายากเกินไปอาจท้อถอยก่อนที่จะแก้ได้สำเร็จ

2. สถานการณ์ของปัญหาเหมาะกับวัยของนักเรียน สถานการณ์ของปัญหาควรเป็นเรื่องที่ไม่ห่างไกลเกินไปกว่าที่นักเรียนจะทำความเข้าใจปัญหาและรับรู้ได้ และนอกจากนี้ถ้าเป็นสถานการณ์ที่สามารถเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันได้ก็จะดีไม่น้อย

3. ควรเป็นปัญหาที่แปลกใหม่ โดยจะมีการชี้แนะนักเรียนที่ไม่เคยมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหานั้นมาก่อน

4. มีวิธีการหาคำตอบมากกว่า 1 วิธี เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดหาทางเลือกในการหาคำตอบได้หลายวิธี และได้พิจารณาเปรียบเทียบเลือกใช้วิธีที่เหมาะสมที่สุด

5. ใช้ภาษาที่กระชับ รัดกุมถูกต้องปัญหาที่ดีไม่ควรทำให้นักเรียนต้องมีปัญหากับภาษาที่ใช้ ควรเน้นอยู่ที่ความเป็นปัญหาที่ต้องการหาคำตอบของตัวปัญหามากกว่า

กรมวิชาการ (2544, น. 18) ได้อธิบายลักษณะของปัญหาที่ดีควรมีลักษณะ ดังนี้

1. ภาษาที่ใช้กระชับ รัดกุม ถูกต้อง สามารถเข้าใจได้ง่าย

2. แปลกใหม่สำหรับนักเรียน ช่วยกระตุ้นและพัฒนาความคิด ท้าทายความสามารถของนักเรียน

3. ไม่สั้นหรือยาวเกินไป

4. ไม่ยากหรือง่ายเกินไป สำหรับความสามารถของนักเรียนในวัยนั้น ๆ

5. สถานการณ์ของปัญหาเหมาะสมกับวัยของนักเรียน

6. ให้ข้อมูลอย่างเพียงพอที่จะนำไปประกอบพิจารณาการแก้ปัญหาได้

7. เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน

8. ข้อมูลที่มีอยู่จะต้องทันสมัย และเป็นเหตุการณ์ที่เป็นไปได้จริง

9. มีวิธีการหาคำตอบได้มากกว่า 1 วิธี

10. นักเรียนสามารถใช้การวาดภาพลายเส้น แผนภาพ หรือแผนภูมิช่วยในการแก้ปัญหา

สมทรง สุวพานิช (2549, น. 24) กล่าวว่าลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ แบ่งออกเป็น 2 ลักษณะใหญ่ ๆ ได้ดังนี้

1. เป็นโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีภาษา ระดับความยากง่ายเหมาะสมกับ ความรู้พื้นฐาน วัย ความสนใจ และวุฒิภาวะของผู้เรียน

2. เป็นโจทย์ปัญหาที่สัมพันธ์ และเกี่ยวกับชีวิตประจำวันของนักเรียนมีความทันสมัย ช่วยกระตุ้น ส่งเสริมกระบวนการคิดของนักเรียน มีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบ และเป็นโจทย์ปัญหาที่เอื้อให้นักเรียนได้ใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา

Clyde (1967, p. 47) ได้กล่าวว่า การสร้างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้น่าสนใจควรจะมีลักษณะ ดังนี้

1. มีความใกล้เคียงกับปัญหาในชีวิตประจำวัน และมีความสัมพันธ์กับผู้แก้ปัญหามากที่สุด โดยอาจเป็นเรื่องราว หรือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นกับผู้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันหรือมักจะเกิดกับบุคคลทั่ว ๆ ไป หรือมีลักษณะคล้ายกับสถานการณ์ในชีวิตจริง

2. สถานการณ์ที่สร้างขึ้นเป็นปัญหา ควรใช้ภาษาหรือการบรรยายในลักษณะที่ผู้แก้ปัญหามีประสบการณ์มาก่อนไม่ควรเป็นปัญหาทั่วไป

krulik and Rudnick (1993, p. 78) ได้กล่าวว่า การสร้างโจทย์ปัญหาที่ดี ควรมีลักษณะดังนี้

1. มีความน่าสนใจและท้าทายความคิดของนักเรียน

2. ต้องให้นักเรียนได้ใช้ทักษะในการคิดวิเคราะห์ และทักษะการสังเกต

3. ให้นักเรียนได้มีโอกาสในการอภิปรายเกี่ยวกับปัญหา

4. ให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับความคิดรวมยอดทางคณิตศาสตร์ และการนำทักษะทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้

5. ควรนำมาซึ่งหลักการเฉพาะและหลักการทั่วไปทางคณิตศาสตร์

6. เป็นโจทย์ปัญหาที่หลากหลายและมีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบ

สรุปได้ว่า ลักษณะของปัญหาที่ดีควรเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันหรือสถานการณ์จริงในชีวิตประจำวัน เป็นปัญหาที่น่าสนใจและท้าทายความสามารถของนักเรียน ซึ่งจะช่วยกระตุ้นพัฒนาความคิดของนักเรียนในการหาคำตอบ มีข้อมูลที่เพียงพอที่จะนำไปประกอบการพิจารณาการแก้ปัญหาได้ สามารถหาคำตอบได้หลายวิธี ควรใช้ภาษาที่เหมาะสม กระชับ รัดกุม ถูกต้อง ไม่เป็นปัญหาที่ยากหรือง่ายเกินไป เหมาะสม กับความสามารถของนักเรียนในวัยนั้น

2.9 การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของผู้เรียน เป็นเป้าหมายอย่างหนึ่งของการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้นนักการศึกษาได้เสนอวิธีการ เพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ในลักษณะต่าง ๆ กัน ดังนี้

Bitter (1990, pp. 43-44) วิธีการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียน ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ครูควรเลือกโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจมาให้นักเรียนฝึกทำ โดยมีความยากง่ายอยู่ในระดับที่เหมาะสมกับนักเรียน ไม่ยากเกินไป เกินความสามารถ หรือง่ายเกินไปจน ไม่ท้าทายความคิด

2. ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ครูควรแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ เพื่อให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็นในการแก้โจทย์ปัญหาและเป็นการฝึกให้นักเรียนรู้จักการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม

3. ครูควรฝึกให้นักเรียนรู้จักพิจารณาข้อมูลต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดมาให้ และสิ่งที่โจทย์ถาม ตลอดจนข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา เพื่อทำให้นักเรียนมีความเข้าใจโจทย์มากยิ่งขึ้น และสามารถหาคำตอบที่โจทย์ถามได้

4. ครูควรฝึกให้นักเรียนได้แก้โจทย์ปัญหาหลายรูปแบบ เพื่อให้นักเรียนไม่รู้สึกเบื่อหน่ายกับโจทย์ปัญหาลักษณะเดิม

5. ครูควรจัดกิจกรรมการเรียนให้นักเรียนได้มีการฝึกแก้ปัญหาบ่อยๆ จนนักเรียนมีความรู้สึกว่า การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้นเป็นส่วนหนึ่งของการเรียนการสอน

6. ในการแก้โจทย์ปัญหาแต่ละข้อนั้น ครูควรฝึกให้นักเรียนได้ใช้วิธีการหาคำตอบหลาย ๆ วิธี เพื่อแสดงให้เห็นว่ายังมีวิธีอื่นอีกที่สามารถใช้แก้โจทย์ปัญหาข้อนั้นได้

7. ครูควรช่วยเหลือและให้คำแนะนำ ในการเลือกวิธีการที่เหมาะสมมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาบางข้อที่ยาก และมีลักษณะเฉพาะ

8. ครูควรฝึกให้นักเรียนรู้จักสังเกตปัญหาที่มีลักษณะคล้าย ๆ กันเพื่อนำไปใช้แก้โจทย์ปัญหาครั้งต่อไป

9. ในการแก้โจทย์ปัญหานั้น ครูควรให้เวลาที่เหมาะสม โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปรายผล และวิธีการดำเนินการแก้โจทย์ปัญหาด้วย

10. ครูควรฝึกให้นักเรียนรู้จักการคาดเดาคำตอบที่โจทย์ถามอย่างมีเหตุผล เนื่องจากเป็นวิธีหนึ่งที่ช่วยในการหาคำตอบ

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537, น. 83 - 89) ได้กล่าวถึงการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ตามทัศนะของโดยนำขั้นตอนของการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน ของโพลยา มาเป็นแนวทางในการนำเสนอวิธีการพัฒนา ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. การพัฒนาความสามารถในการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา

1.1 การพัฒนาทักษะการอ่าน โดยให้นักเรียนฝึกอ่าน และทำความเข้าใจข้อความในโจทย์ปัญหาก่อนที่จะมุ่งไปที่วิธีทำเพื่อหาคำตอบ ซึ่งอาจจะฝึกเป็นรายบุคคล หรือฝึก

เป็นกลุ่ม โดยให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันถึงสาระสำคัญของโจทย์ปัญหา ความเป็นไปได้ของคำตอบที่ต้องการ ความพอเพียงหรือความเกินพอของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

1.2 ควรใช้ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเพื่อช่วยเพิ่มพูนความเข้าใจ ซึ่งมียุทธวิธีหลายยุทธวิธีที่ช่วยให้เข้าใจโจทย์ปัญหามากยิ่งขึ้น เช่น ใช้ยุทธวิธีวาดภาพ แผนภาพ และสร้างแบบจำลอง เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ที่โจทย์ปัญหากำหนดมาให้ ทำให้เห็นโจทย์ปัญหาเป็นรูปธรรมมากยิ่งขึ้นและช่วยให้เข้าใจโจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้น

1.3 ใช้โจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกับปัญหาในชีวิตจริงมาให้นักเรียนฝึกทำความเข้าใจปัญหาที่พบในชีวิตจริงนั้นมีปัจจัยที่เกี่ยวข้องมากมาย ผู้แก้ปัญหาจะต้องรู้จักเลือกเฉพาะปัจจัย ที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหาที่พิจารณา

2. การพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้โจทย์ปัญหา

2.1 ครูไม่ควรบอกวิธีการแก้โจทย์ปัญหากับนักเรียนโดยตรง แต่ควรใช้วิธีการกระตุ้นให้นักเรียนคิดด้วยตนเอง เช่น อาจใช้คำถามนำ โดยใช้ข้อมูลต่าง ๆที่โจทย์กำหนดให้ถามแล้วเว้นระยะให้นักเรียนคิดหาคำตอบ

2.2 ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนคิดออกมาดัง ๆ อาจอยู่ในการบอก หรือเขียนแบบแผนลำดับขั้นตอนการคิดออกมาให้ผู้อื่นรู้ ทำให้เกิดการอภิปรายเพื่อหาแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาที่เหมาะสม

2.3 ครูควรปลูกฝังลักษณะนิสัยของนักเรียน ให้ฝึกคิดวางแผนก่อนลงมือทำเสมอ เพราะจะทำให้เห็นภาพรวมของการแก้โจทย์ปัญหา และสามารถประเมินความเป็นไปได้ในการแก้โจทย์ปัญหา ควรเน้นว่าวิธีการแก้โจทย์ปัญหานั้นสำคัญกว่าคำตอบที่ได้ เพราะวิธีการสามารถนำไปใช้ได้กว้างขวางกว่า

2.4 ครูควรจัดหาโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจ และท้าทายความสามารถให้ นักเรียนฝึกคิดบ่อย ๆ

2.5 ในการแก้โจทย์ปัญหาแต่ละปัญหานั้น ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหามากกว่า 1 ยุทธวิธี เพื่อให้นักเรียนมีความยืดหยุ่นในการคิด ไม่ติดอยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งโดยเฉพาะ

3. การพัฒนาความสามารถในการดำเนินการตามแผน

ในขั้นลงมือปฏิบัติตามแผน มักจะมีปัญหาอยู่ที่การคิดคำนวณ ครูควรช่วยพัฒนาทักษะการคิดคำนวณให้กับผู้เรียนเพราะเป็นสิ่งที่ช่วยให้นักเรียนหาคำตอบตามแผนที่วางไว้

4. การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบ

4.1 ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการตรวจสอบคำตอบที่ได้ ให้เคยชินจนเป็นนิสัย นักเรียนไม่ควรพึงพอใจอยู่เพียงคำตอบที่ได้ แต่จะต้องฝึกตรวจสอบความถูกต้อง ทั้งในส่วนที่เป็นกระบวนการและคำตอบ

4.2 ควรฝึกให้นักเรียนคาดคะเนคำตอบสำหรับโจทย์ปัญหาที่มีการคิดคำนวณ หลังจากการวางแผน ก่อนลงมือคิดคำนวณ ควรฝึกให้นักเรียนกะประมาณ คาดคะเนคำตอบก่อน จากนั้นจึงลงมือคำนวณ แล้วเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับคำตอบที่คาดคะเนไว้

4.3 ครูควรฝึกแปลความหมายของคำตอบ เมื่อได้คำตอบของปัญหาแล้ว การตรวจสอบความถูกต้องของกระดาษคำตอบเพียงอย่างเดียวนั้นไม่เพียงพอ ครูต้องกระตุ้นให้นักเรียนรู้จักแปลความหมายของคำตอบว่าสอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์ถามหรือไม่

4.4 ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนฝึกแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้วิธีการหาคำตอบได้มากกว่า 1 วิธี เพื่อเป็นการตรวจสอบคำตอบของโจทย์ปัญหา ว่าถึงแม้ใช้วิธีการที่ต่างกัน คำตอบที่ได้ยังเป็นคำตอบเดียวกัน

4.5 ครูควรให้นักเรียนฝึกสร้างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียนจะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในโครงสร้างของปัญหา ซึ่งช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเป็นนักแก้ปัญหาที่มีความสามารถ

สิริพร ทิพย์คง (2539, น. 58-59) การพัฒนาทักษะการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน สรุปได้ดังนี้

1. ครูควรเลือกโจทย์ปัญหาที่ช่วยกระตุ้นความสนใจ และเป็นโจทย์ปัญหาที่นักเรียนมีประสบการณ์ในเรื่องเหล่านั้น มาใช้สอนนักเรียน

2. ครูควรทดสอบดูว่า นักเรียนมีพื้นฐานความรู้เพียงพอที่จะนำมาใช้แก้ปัญหาหรือไม่ ถ้ามีไม่เพียงพอครูจะต้องทบทวนความรู้ให้นักเรียนก่อน

3. ครูควรให้อิสระแก่นักเรียนในการใช้ความคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

4. ครูควรจัดแบบฝึกหัดที่มีทั้งข้อยาก ปานกลาง และง่าย เพื่อให้นักเรียนทุกคนมีโอกาสได้รับความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งจะเป็นการเสริมสร้างกำลังใจให้กับผู้เรียน

5. ครูควรทดสอบดูว่านักเรียนเข้าใจปัญหาข้อนั้น ๆ หรือไม่ โดยให้นักเรียนบอกสิ่งที่โจทย์ถามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

6. ครูควรฝึกให้นักเรียนรู้จักการประมาณคำตอบก่อนที่จะคิดคำนวณ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง

7. ครูควรช่วยฝึกให้นักเรียนคิดหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์ปัญหากำหนด โดยการแนะนำให้นักเรียนวาดภาพ หรือการเขียนแผนผัง จะทำให้นักเรียนเข้าใจโจทย์ปัญหาได้มากขึ้น

8. ครูควรช่วยให้นักเรียนฝึกวิเคราะห์ปัญหา โดยให้นักเรียนนึกถึงวิธีการหาคำตอบและลักษณะของโจทย์ปัญหาว่าคล้ายกับโจทย์ปัญหาที่พบหรือไม่ และลองให้นักเรียนแตกปัญหาออกเป็นปัญหาย่อย ๆ เพื่อสะดวกและง่ายในการหาคำตอบ

9. ครูควรฝึกให้นักเรียนคิดหาวิธีการอื่นๆ เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหาข้อนั้น ๆ รวมทั้งสนับสนุนให้นักเรียนตอบตามวิธีการที่นักเรียนคิด และทำในการแก้โจทย์ปัญหาข้อนั้น ๆ ตลอดจนให้นักเรียนคิดทบทวนวิธีการคิดแก้ปัญหาแต่ละขั้นตอน

10. ครูให้นักเรียนฝึกแก้โจทย์ปัญหาเป็นกลุ่มย่อย หรือให้นักเรียนนำโจทย์ปัญหามาเองเพื่อปรึกษากันภายในกลุ่ม

สรุปได้ว่า การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนนั้นสามารถทำได้ หลายแนวทาง ซึ่งสรุปได้ คือ โจทย์ปัญหาที่นำมาให้นักเรียนฝึกทำนั้น ต้องเป็นปัญหาที่น่าสนใจ มีหลายรูปแบบ มีหลายระดับ ให้เวลาที่เหมาะสม และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ ในการแก้โจทย์ปัญหา รวมไปถึงการพัฒนาตามขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งสิ่งต่างๆ เหล่านี้ จะช่วยส่งเสริมและพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ให้เป็นไปในแนวทางที่เหมาะสมอยู่ในระดับที่น่าพอใจและบรรลุจุดประสงค์ของการเรียนการสอน

2.10 อุปสรรคในการแก้โจทย์ปัญหา

ได้มีนักการศึกษากล่าวถึงอุปสรรคในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้หลายทัศนะ ดังนี้

Chase (1970, pp. 262-269) ในเรื่องการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ปัญหาที่พบมาก คือ นักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ เขากล่าวว่าที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากอุปสรรค ดังนี้

1. การสอนของครูเน้นการคิดคำนวณมากกว่าวิธีการ หรือกระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหา

2. นักเรียนขาดความสามารถในการอ่าน อ่านโจทย์แล้วไม่เข้าใจ

3. เวลาในการเรียนโจทย์ปัญหา ไม่เหมาะสม หรือไม่เพียงพอ

4. ภาษาและคำที่ใช้ในโจทย์ปัญหา ไม่กระตุ้นให้นักเรียนเกิดความคิด เชิงวิเคราะห์ หรือไม่เหมาะสมกับวัย และระดับสติปัญญาของเด็ก

5. นักเรียนไม่รู้จักคาดคะเน หรือประมาณคำตอบ

6. นักเรียนขาดความสามารถในการคิดคำนวณ ขาดทักษะในเรื่องการบวก ลบ คูณ และหาร

7. นักเรียนขาดการคิดหาเหตุผล มองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อที่จะบรรลุสิ่งที่ต้องการ

8. นักเรียนใช้วิธีการในการแก้โจทย์ปัญหาผิด เพราะไม่ได้นำเอาทฤษฎี หรือความรู้ที่เรียนไปแล้ว มาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา

9. นักเรียนขาดความตั้งใจที่จะแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งอาจเกิดจากบทเรียน ไม่น่าสนใจ และไม่จูงใจให้อยากทำ

10. นักเรียนมีความสะเพร่า นำจำนวนมาใช้อย่างผิด ตีความในโจทย์ปัญหาผิด ตลอดจนการคิดคำนวณผิด

Brueckner and Grossnickle (1974, pp. 452-453) ได้กล่าวว่า ในการทำโจทย์ปัญหานั้น นักเรียนจะต้องมีความเข้าใจ สถานการณ์ ในโจทย์ปัญหา และเล็งเห็นถึงกระบวนการที่จะต้องดำเนินไป เพื่อให้ได้คำตอบสำหรับปัญหานั้น ๆ เพราะหัวใจที่สำคัญของการทำโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ที่การใช้ความคิดหาวิธีการมาแก้ปัญหา มิใช่การคำนวณค่าตัวเลข เนื่องจากทักษะในการคำนวณ เป็นเพียงวิธีที่จะนำไปสู่จุดมุ่งหมายปลายทางเท่านั้น จุดหมายปลายทางของการทำโจทย์ปัญหาที่แท้จริง คือ ความสำเร็จในการหาวิธีการมาแก้ปัญหานั้น ความสามารถในการแก้ปัญหา จะเป็นประโยชน์อย่างมากในการดำรงชีวิต ดังนั้น นักเรียนทุกคนจึงต้องเรียนรู้วิธีการและฝึกฝนการแก้ปัญหาด้วยตนเอง แต่ในบางครั้งนักเรียนไม่สามารถจะประสบความสำเร็จ ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ เนื่องจากมีอุปสรรคหลายประการ ซึ่ง Brueckner และ Grossnickle ได้กล่าวถึงอุปสรรคในการทำโจทย์ปัญหาของนักเรียน มีดังนี้

1. นักเรียนไม่สามารถเข้าใจโจทย์ปัญหาทั้งหมดหรือบางส่วน เนื่องจากขาดประสบการณ์ และขาดความคิดรวบยอดสถานการณ์ในโจทย์ปัญหา

2. นักเรียนมีความบกพร่องในการอ่านและทำความเข้าใจ เช่น ไม่เข้าใจว่าโจทย์กำหนดอะไรให้ ไม่สามารถจดจำและจัดระบบซึ่งเขาได้อ่านมา และไม่สามารถจะอ่านเพื่อหารายละเอียดของเนื้อหา

3. นักเรียนไม่สามารถคิดคำนวณได้ ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจากการที่นักเรียนลืมวิธีทำหรือไม่เคยเรียนมาก่อน

4. นักเรียนขาดความเข้าใจกระบวนการและวิธีการ เป็นผลทำให้นักเรียนหาคำตอบโดยวิธีการเดาสุ่ม

5. นักเรียนขาดความรู้ในเรื่องความสำคัญ กฎเกณฑ์ สูตร เช่น ไม่ทราบว่า หนึ่งหลามีกี่นิ้ว หรือไม่ทราบกฎการหาความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เป็นต้น

6. นักเรียนขาดความเป็นระเบียบเรียบร้อยในการเขียนคำอธิบาย

7. นักเรียนไม่ทราบความสัมพันธ์เชิงปริมาณวิเคราะห์ ทั้งนี้มีสาเหตุมาจากการเรียนรู้ศัพท์เพียงจำนวนจำกัด หรือขาดความเข้าใจในหลักเกณฑ์ต่าง ๆ เช่น ความสัมพันธ์ในระหว่างราคาขาย ต้นทุน กำไร ขาดทุน เป็นต้น

8. นักเรียนขาดความสนใจ เนื่องจาก ขาดความสามารถในการทำโจทย์ปัญหา ซึ่งมีความยาก หรือโจทย์ปัญหาไม่จูงใจ และไม่ได้รับประโยชน์อะไรเป็นการตอบสนอง

9. ระดับสติปัญญาของนักเรียนต่ำเกินไปที่จะเข้าถึงความสัมพันธ์ต่าง ๆ ซึ่งปรากฏอยู่ในโจทย์ปัญหา

10. นักเรียนขาดการฝึกฝนในการทำโจทย์ปัญหา

สรุปได้ว่า การที่นักเรียนต้องประสบปัญหา ไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ เนื่องจากประสบการณ์ ความรู้ความเข้าใจในการคิดคำนวณ ความเข้าใจปัญหา การวิเคราะห์ตีความปัญหา กระบวนการและยุทธวิธีต่างๆในการแก้โจทย์ปัญหา ความตั้งใจ แรงจูงใจ ระยะเวลา และความรอบคอบสิ่งต่างๆ เหล่านี้ ล้วนเป็นอุปสรรคในการแก้โจทย์ปัญหาทั้งสิ้น

2.11 แบบทดสอบ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2555, น. 30-58) กล่าวไว้ว่า แบบทดสอบเป็นเครื่องมือวัดผลประเมินผลที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย เพื่อวัดและประเมินผู้เรียนเป็นรายบุคคลและเป็นกลุ่มในทุกรายวิชา ทุกกลุ่มสาระการเรียนรู้ และทุกระดับชั้น แบบทดสอบแต่ละฉบับประกอบด้วยชุดของข้อสอบจำนวนหลายข้อ เพื่อให้ใช้วัดและประเมินผู้เรียนได้ครอบคลุมกับสิ่งที่ต้องการ โดยรูปแบบของข้อสอบมีอยู่หลากหลาย เช่น ข้อสอบแบบเลือกตอบ ข้อสอบแบบถูกผิด ข้อสอบแบบจับคู่และเปรียบเทียบ และข้อสอบแบบเขียนตอบ ผู้สร้างแบบทดสอบจึงต้องศึกษาหลักการในการสร้างแบบทดสอบลักษณะของข้อสอบแต่ละรูปแบบ เพื่อให้สามารถสร้างแบบทดสอบที่มีคุณภาพ และใช้วัดผลประเมินผลได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2.11.1 หลักการในการสร้างแบบทดสอบ

จากแนวคิดและกระบวนการสร้างเครื่องมือวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์ สรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

2.11.1.1 ศึกษาจุดหมายของการวัดผลประเมินผล สาระการเรียนรู้ มาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และเนื้อหาที่ต้องการ

2.11.1.2 วิเคราะห์เนื้อหาและระดับพฤติกรรมที่ต้องการวัด

2.11.1.3 กำหนดรูปแบบของข้อสอบที่จะใช้ในแบบทดสอบให้สอดคล้องกับเนื้อหาและระดับพฤติกรรมที่ต้องการวัด และควรใช้รูปแบบที่หลากหลายเพื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสแสดงความรู้ความสามารถอย่างเต็มศักยภาพ

2.11.1.4 กำหนดจำนวนข้อสอบ การกระจายของเนื้อหาสาระที่ต้องการทดสอบ และเวลาที่ใช้ทดสอบ

2.11.1.5 สร้างข้อสอบตามที่กำหนด โดยคำนึงถึงเทคนิคของการสร้างข้อสอบ และความสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของการวัดผลประเมินผล

2.11.1.6 ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา ความเที่ยงตรง และความเป็นปรนัยของข้อสอบ

2.11.2 แบบทดสอบแบบเขียนตอบ

แบบทดสอบแบบเขียนตอบจะใช้คำถามเพื่อให้ผู้เรียนแสดงความรู้ความสามารถด้านการคิดวิเคราะห์ ให้เหตุผล แก้ปัญหา อธิบายหรือสื่อความหมาย ด้วยการเขียนตอบแบบทดสอบแบบเขียนตอบมีหลายลักษณะ เช่น การเติมคำตอบในช่องว่าง การเขียนตอบอย่างสั้น การแสดงวิธีทำและการเขียนตอบอย่างละเอียด การสร้างข้อสอบแบบเขียนตอบจะต้องคำนึงถึงระดับและความสามารถของผู้เรียน เนื้อหาสาระ พฤติกรรมที่ต้องการวัด และเวลาที่ใช้ในการตอบคำถาม และควรมีการบันทึกส่วนสำคัญของการสร้างข้อสอบ 2 ส่วน คือ 1) ส่วนของข้อสอบ ประกอบด้วยสถานการณ์และคำถามที่ใช้ในการประเมินผู้เรียน และ 2) ส่วนของแนวทางการให้คะแนน ประกอบด้วยแนวการตอบที่ถูกต้องและเกณฑ์การให้คะแนน เพื่อให้ผู้สอนให้เป็นแนวทางในการตรวจให้คะแนน ซึ่งจะช่วยให้การตรวจให้คะแนนมีความเป็นปรนัยมากขึ้น แบบทดสอบแบบเขียนตอบมี 3 ลักษณะคือ 1) แบบทดสอบแบบเติมคำตอบ 2) แบบทดสอบเขียนตอบแบบสั้น และ 3) แบบทดสอบแบบแสดงวิธีทำหรือเขียนอธิบาย

2.11.3 แบบทดสอบแบบเติมคำตอบ

แบบทดสอบแบบเติมคำตอบใช้วัดผลประเมินผลได้ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ความเข้าใจ และด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เช่นเดียวกับข้อสอบแบบ เลือกตอบ แต่ลักษณะการตอบจะเป็นการเขียนคำตอบที่เป็นผลลัพธ์ของปัญหาและ การเติมคำตอบเพื่อฝึกคิดเลขในใจ

2.11.4 แนวทางการสร้างแบบทดสอบแบบเติมคำตอบ เป็นดังนี้

2.11.4.1 สถานการณ์และคำถามมีความชัดเจนสั้น และใช้ภาษาที่เข้าใจได้ง่าย

2.11.4.2 ช่องว่างที่เว้นไว้ให้เติมต้องเหมาะสมกับคำตอบ

2.11.4.3 ข้อสอบข้อเดียวกัน ไม่ควรเว้นช่องว่างให้เติมตำตอบหลายแห่ง

2.11.4.4 การเติมคำตอบควรอยู่ท้ายข้อความ แต่ถ้าต้องการให้เติมคำตอบ ระหว่างข้อความ จะต้องเว้นช่องว่างให้พอดีกับคำตอบและควรมีความกว้างใกล้เคียงกันทุกข้อ

2.11.4.5 กำหนดคำตอบที่ถูกต้องและเกณฑ์การให้คะแนนไว้อย่างชัดเจน

2.11.5 เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบแบบเติมคำตอบ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2555, น. 30-58) ได้กล่าวถึงการให้คะแนนแบบทดสอบชุดข้อสอบแบบเลือกตอบ ทำได้ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2

เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบแบบเติมคำตอบ

ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
1	คำตอบถูกต้อง
0	คำตอบไม่ถูกต้อง

หมายเหตุ. ปรับปรุงมาจาก *การวัดและประเมินผลคณิตศาสตร์* (น. 35), โดย สถาบันส่งเสริมการสอนการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555, กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น.

2.11.6 ข้อดีของข้อสอบแบบเติมคำตอบ

2.11.6.1 เดาคำตอบได้ยาก จึงใช้ผลจากการทดสอบเพื่อจำแนกผู้เรียนได้

2.11.6.2 สร้างโจทย์ปัญหาได้ง่าย

2.11.6.3 สร้างเป็นข้อสอบแบบคู่ขนานได้

2.11.6.4 ผู้เรียนได้แสดงความรู้ความสามารถด้วยการเขียนตอบ

2.11.7 ข้อจำกัดของข้อสอบแบบเติมคำตอบ

2.11.7.1 ไม่สามารถใช้กับผู้เรียนที่มีความบกพร่องในการเขียน

2.11.7.2 การกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนไม่ชัดเจน จะทำให้การตรวจให้คะแนนทำได้ไม่ตรงกัน

2.12 บริบทของกลุ่มโรงเรียนห้วยน้ำหวาน

“กลุ่มโรงเรียนห้วยน้ำหวาน” เป็นกลุ่มโรงเรียนที่ตั้งอยู่ในบริเวณตำบลน้ำสุดและตำบลห้วยขุนราม อำเภอพัฒนานิคม จังหวัดลพบุรี ประกอบด้วยโรงเรียนจำนวน 8 โรงเรียน เป็นโรงเรียนขยายโอกาส จำนวน 3 โรงเรียน ได้แก่ โรงเรียนน้ำสุดวิไลประชาสรรค์ , โรงเรียนบ้านมะนาวหวาน และโรงเรียนวัดสี่ซับศรีเจริญธรรม เป็นโรงเรียนขนาดเล็ก จำนวน 5 โรงเรียน ได้แก่ โรงเรียนบ้านคลองสาริกา , โรงเรียนบ้านซับโศก , โรงเรียนบ้านสวนมะเดื่อ , โรงเรียนบ้านคลองกลุ่ม และโรงเรียนบ้านหนองปีกนก โดยแต่ละโรงเรียนจะมีห้องเรียนสำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 , 5 และ 6 ชั้นละ 1 ห้องเรียน ซึ่งจากการศึกษาผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 สามปีย้อนหลังของแต่ละโรงเรียน ในปีการศึกษา 2558 ปีการศึกษา 2559 และปีการศึกษา 2560 ตามลำดับ เป็นดังนี้

1. โรงเรียนน้ำสุดวิไลประชาสรรค์ มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 33.89 , 27.67 และ 35.00
2. โรงเรียนบ้านคลองสาริกา มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 38.13 , 46.67 และ 45.00
3. โรงเรียนวัดสี่ซับศรีเจริญธรรม มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 28.68 , 32.89 และ 25.00
4. โรงเรียนบ้านมะนาวหวาน มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 31.11 , 30.00 และ 34.78
5. โรงเรียนบ้านซับโศก มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 30.00 , 21.67 และ 29.62
6. โรงเรียนบ้านสวนมะเดื่อ มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 31.07 , 24.50 และ 25.28
7. โรงเรียนบ้านคลองกลุ่ม มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 22.14 , 33.50 และ 34.17
8. โรงเรียนบ้านหนองปีกนก มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 33.75 , 22.86 และ 29.38

และผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติ ขั้นพื้นฐาน (O-NET) วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ของกลุ่มโรงเรียนห้วยน้ำหวาน จังหวัดลพบุรี ในปีการศึกษา 2558 ปีการศึกษา 2559 และปีการศึกษา 2560 มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 31.09 , 29.97 และ 32.28 คะแนน ตามลำดับ

2.13 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.13.1 งานวิจัยในประเทศ

สุมาลี วงศ์ยะรา (2536, น. 62-67) ได้ศึกษาเรื่องการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยใช้ภาพกับไม่ใช้ภาพโดยวิธีสุ่มตัวอย่างแบบง่าย ได้ตัวอย่างประชากรจำนวน 60 คน แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งเรียนแก้

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพ อีกกลุ่มหนึ่งเรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยไม่ใช้ภาพ หลังการทดลอง ให้ทำแบบทดสอบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ ผู้วิจัยสร้างขึ้น และเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยการทดสอบ ค่าที (t - test) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพมี ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยไม่ใช้ภาพ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สมบัติ โพธิ์ทอง (2539, น. 56-59) ได้ศึกษาการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์คณิตศาสตร์ สำหร สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง โดยใช้เมตาตอคนิชัน (Meta cognition) พบว่า ค่าเฉลี่ยของคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง หลังได้รับการสอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้เมตาตอคนิชัน (Meta cognition) มีค่าสูงกว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ก่อนได้รับการสอนอย่าง มีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05

เจษฎ์สุดา จันทร์เอี่ยม (2542, น. 101-102) ได้ศึกษาความสามารถและกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นในโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัด กรมสามัญศึกษา เขตการศึกษา 7 พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น มีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ที่ต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ

สุขจิตร ตั้งเจริญ (2543, น. 36-40) ได้ศึกษาการใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์สมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่าผลสัมฤทธิ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการฝึกการใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่ไม่ได้รับการฝึกการใช้กลวิธีในการแก้ปัญหา อย่างมีนัยสำคัญที่ 0.05 และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงใช้กลวิธีในการแก้ปัญหามากกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ปานกลางและต่ำ และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ปานกลางใช้กลวิธีในการแก้ปัญหามากกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ต่ำ นอกจากนี้ในการเลือกใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาพบว่า นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำเลือกใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบมากที่สุด รองลงมาใช้กลวิธีทำย้อนกลับและกลวิธีวาดภาพ ตามลำดับ และใช้กลวิธีสร้างตารางน้อยที่สุด

สมทรง สุวพานิช (2544, น. 157-172) ได้ศึกษารูปแบบการคิดการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หนึ่งขั้นตอนที่เกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณและการหารของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2,3 และ 4 ของโรงเรียนสาธิตสถาบันราชภัฏมหาสารคาม พบว่า

1. รูปแบบการคิดการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หนึ่งขั้นตอนที่เกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณและการหารของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 , 3 และ 4 ของโรงเรียนสาธิตสถาบันราชภัฏมหาสารคาม เรียงตามลำดับจำนวนความถี่มากไปหาน้อยเป็นดังนี้คือ ยุทธวิธีการวาดรูปประกอบ , ยุทธวิธีการเดาแล้วตรวจสอบ และยุทธวิธีการหารูปแบบ

2. เมื่อทดสอบสมมติฐานเพื่อเปรียบเทียบรูปแบบการคิด การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์จากแบบทดสอบทุกข้อ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 , 3 และ 4 พบว่ามีความแตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ซึ่งเมื่อพิจารณายุทธวิธีที่นักเรียนใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์แต่ละข้อ แต่ละระดับชั้น พบว่ามีความแตกต่างกันอย่างชัดเจนคือในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ใช้ยุทธวิธีการวาดรูปประกอบมากที่สุด ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ใช้ยุทธวิธีการเดาแล้วตรวจสอบมากที่สุด และชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ใช้ยุทธวิธีการวาดรูปประกอบและยุทธวิธีการเดาแล้วตรวจสอบคละกัน

อเนก จันทรจรัญ (2545, น. 51) ได้ศึกษาการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้ชุดการเรียนการฝึกการแก้ปัญหาผ่านกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา และแนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตของวิลสัน เฟอร์นันเดซ และ ฮาคาเวย์ โดยใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหา 10 ยุทธวิธี ได้แก่ ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ ยุทธวิธีการหารูปแบบ ยุทธวิธีเขียนแผนภาพประกอบ ยุทธวิธีแจงกรณีที่เป็นไปได้ ยุทธวิธีการทำย้อนกลับ ยุทธวิธีการสร้างตารางและกราฟ ยุทธวิธีการให้เหตุผล ยุทธวิธีการพิจารณาในกรณีที่ง่ายกว่าหรือแบ่ง เป็นปัญหาย่อย ยุทธวิธีลงมือแก้ปัญหาเลย และยุทธวิธีการใช้แบบจำลอง พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังใช้ชุดการเรียนสูงกว่าก่อนใช้ชุดการเรียนการสอน อย่าง มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

ปิยะนาถ เหมวิเศษ (2551, น. 77-81) ได้สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลายเพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งกิจกรรมการเรียนการสอนให้นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาและกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่ ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มากกว่าร้อยละ 60 ของนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และเมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มากขึ้น นักเรียนสามารถพัฒนา ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ การเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา และการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน นอกจากนั้นนักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้

กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ปรับเปลี่ยนกลยุทธ์ที่ใช้ได้อย่างเหมาะสมและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดี

โสมจิรา พรหมบัวดี (2553, น. 87-90) ได้ศึกษาการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ศูนย์วิจัยและพัฒนาการศึกษา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวนนักเรียน 36 คน จำนวน 1 ห้องเรียน จากจำนวน 7 ห้องเรียน โดยการเลือกแบบ เฉพาะเจาะจง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยเน้นกระบวนการคิดและการใช้ยุทธวิธีที่หลากหลาย จำนวน 7 แผน ซึ่งในแต่ละ แผนประกอบด้วยแบบฝึกพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในแต่ละยุทธวิธี จำนวน 7 ยุทธวิธี ยุทธวิธีละ 2 ข้อและแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบพร้อมแสดงแนวคิด จำนวน 10 ข้อ พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โดยเน้นกระบวนการคิดและการใช้ยุทธวิธีที่หลากหลายหลังเรียนสูงกว่า ก่อนเรียนแต่ต่ำกว่าเกณฑ์ 60% อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ชญาภา ใจโปร่ง (2554, น. 86-87) ได้ศึกษาเรื่องกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 พบว่านักเรียน ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 และนักเรียนสามารถเลือกใช้กลยุทธ์ได้หลากหลาย สามารถเขียนคำอธิบายกระบวนการค้นหาคำตอบได้มากขึ้น และนักเรียนที่ตอบปัญหาได้ถูกต้องมีจำนวนมากขึ้น

จากการศึกษา งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในประเทศ พบว่า ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาที่หลากหลาย ได้แก่ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ ยุทธวิธีการหารูปแบบ ยุทธวิธีเขียนแผนภาพประกอบ ยุทธวิธีแจงกรณีที่เป็นไปได้ ยุทธวิธีการทำย้อนกลับ ยุทธวิธีการสร้างตารางและกราฟ ยุทธวิธีการให้เหตุผล ยุทธวิธีการพิจารณาในกรณีที่ง่ายกว่าหรือแบ่ง เป็นปัญหาย่อย ยุทธวิธีลงมือแก้ปัญหาเลย และยุทธวิธีการใช้แบบจำลอง เป็นต้น จะทำให้นักเรียนความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์มากขึ้น มีความสามารถในการเลือกใช้ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาที่หลากหลาย ปรับเปลี่ยนยุทธวิธีที่ใช้ได้อย่างเหมาะสม นำไปสู่การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดียิ่งขึ้น

2.13.2 งานวิจัยต่างประเทศ

Fortunato (1991, pp. 38-40) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับกระบวนการตรวจสอบการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนระดับ 7 แห่งเมืองนิวยอร์กจำนวน 165 คนพบว่า นักเรียนร้อยละ 60 ที่สามารถสะท้อนความคิดเห็นออกมาได้นั้นอาจจะเป็นเพราะข้อคำถามไม่ท้าทายให้ต้องคิดก็ได้และสรุปว่าข้อคำถามต้องท้าทายเพื่อนักเรียนจะได้สะท้อนการรับรู้เรียนรู้ออกมาเพื่อตีความแปลความหรือขยายความเพื่อให้ได้คำตอบและคำถามจะส่งผลกระทบต่อความตระหนักในการแก้ปัญหา

Lembke (1991, pp. 2057-A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการพัฒนามโนทัศน์และยุทธวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องร้อยละ พบว่า นักเรียนที่อยู่ในระดับเกรด 5 และเกรด 7 ใช้วิธีการหรือยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ยังไม่เป็นแบบแผนโดยใช้การเดาคำตอบช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาส่วนนักเรียนเกรด 9 และเกรด 11 ยังมีวัยและวุฒิภาวะสูงกว่าจะใช้วิธีการเขียนความสัมพันธ์ของข้อมูลในรูปแบบของสมการและใช้เหตุผลประกอบในการแก้โจทย์ปัญหา

Baker (1992, pp. 2762-A) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการสอนโดยใช้ยุทธวิธีวาดภาพของนักเรียนระดับประถมศึกษาที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ พบว่ากลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หลังการสอนไม่แตกต่างกัน แต่ทั้งสองกลุ่มมีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาหลังการสอนสูงกว่าก่อนได้รับการสอน และกลุ่มทดลองมีการใช้ยุทธวิธีในวาดภาพหรือใช้การวาดภาพ แสดงข้อมูลที่โจทย์ปัญหากำหนดให้มากขึ้นกว่าก่อนได้รับการสอน

Mattingly (1992, pp. 434-A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการเปรียบเทียบผลของการสอนโดยใช้และไม่ใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และการใช้ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนพบว่านักเรียนเกรด 4 และเกรด 6 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลางและนักเรียนเกรด 5 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูงและต่ำกลุ่มกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ ส่วนนักเรียน เกรด 4และเกรด 6ที่มีความสามารถสูงและต่ำและ นักเรียนเกรด 5 ที่มีความสามารถปานกลาง กลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกับกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติส่วนการใช้ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น พบว่านักเรียนเกรด 4 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูงและนักเรียนเกรด 6 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลางกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีการใช้ยุทธวิธีช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มากกว่านักเรียนที่อยู่ในระดับชั้นและความสามารถทางคณิตศาสตร์ระดับเดียวกัน และนักเรียนเกรด 5 ทั้ง

กลุ่มที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูงปานกลางและต่ำโดยกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้วิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีการใช้ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกับกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

Subramaniam (1993, pp. 13-29) ได้ศึกษาสำรวจกระบวนการตรวจสอบการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนเพื่อแยกแยะหาจุดอ่อนในการใช้ในหลายยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 รัฐปีนัง พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่จะอ่านโจทย์ปัญหามากกว่า 1 ครั้ง เกือบร้อยละ 50 เมื่อจะแก้ปัญหาแต่ละขั้นตอน และพยายามกลับไปตรวจครรภ์ขั้นตอนกระบวนการ คำตอบที่ผ่านมาเสมอ โดยบางคนจะวาดรูปและดึงข้อมูลสำคัญจะโดยออกมาเพื่อช่วยในการพิจารณา

Burks (1994, pp. 4019-A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนที่ใช้กระบวนการและยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนทั้งกลุ่มที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง ในกลุ่มทดลอง ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

Finkal (1995, pp. 1064-A) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลการเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า หลังการเรียนการสอนนักเรียนที่เป็นประชากรจะมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงขึ้น และมีความถี่ของการใช้ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาหลังการเรียนสูงขึ้น

Christou and Phillipou (1998, pp. 436) ได้ทำการวิจัยเรื่องธรรมชาติพัฒนาการของความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาหนึ่งขั้นตอนเกี่ยวกับการบวกการลบและการคูณการหารของนักเรียนเกรด 2 3 และ 4 จำนวน 450 คนจาก 7 โรงเรียนในกรุงไซปรัส ประเทศกรีก พบว่า รูปแบบพัฒนาการของการคิดของนักเรียน ขึ้นอยู่กับลักษณะและสถานการณ์ของโจทย์ปัญหานั้นๆ

Riasat (2010, pp. 67-72) ได้ศึกษาผลของการใช้วิธีการแก้ปัญหาในการเรียน การสอนคณิตศาสตร์เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน เพื่อการตรวจสอบผลของการใช้วิธีการแก้ปัญหาเกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนในการ เรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา ผลการวิจัยพบว่า มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างประสิทธิภาพของวิธีการสอนแบบดั้งเดิมและวิธีการสอนแก้ปัญหา นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยวิธีการแก้ปัญหาประสบความสำเร็จดีกว่า การสอนโดยวิธีการแบบดั้งเดิม และความแตกต่างระหว่างระดับความสำเร็จเป็นเพราะยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

จากการศึกษา งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในต่างประเทศ พบว่า ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย จะทำให้นักเรียนมีวามสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และมี

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงขึ้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะและสถานการณ์ของโจทย์ปัญหานั้นๆ

สรุป จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศ พบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนและพัฒนากระบวนการคิด ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วการยเลือกใช้ยุทธวิธีที่หลากหลาย จะทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น และมีความสามารถในการปรับเปลี่ยนยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม ตลอดจนประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์อีกด้วย ซึ่งความแตกต่างระหว่างระดับความสำเร็จนั้นเป็นเพราะยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหา

2.14 กรอบการวิจัย

กรอบการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยคือยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของกลุ่มเป้าหมายจากแบบทดสอบที่พัฒนามาจากงานของสมทรง สุวพานิช (2549, น. 188-196) , Christou and Philippou (1998, pp. 441-442) โดยศึกษาจากร่องรอยการคิดในการแก้โจทย์ปัญหา ของกลุ่มเป้าหมายเพื่อค้นหายุทธวิธีที่ใช้