

บทที่ 2

การทบทวนวรรณกรรม

ในการวิจัยเรื่อง การศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยใช้แนวคิดของ Usiskin เรื่องการแก้สมการ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนคอนบอสโกวิทยา อำเภอเมือง จังหวัดอุดรธานีผู้วิจัยได้ดำเนินการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6
2. การแก้สมการ
3. ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์
4. แนวคิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของ Usiskin
5. แบบทดสอบ
6. แบบสัมภาษณ์
7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
8. กรอบแนวคิดการวิจัย

2.1 หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6

กระทรวงศึกษาธิการ (2551, น.1-5) กล่าวว่า หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้กล่าวถึงรายละเอียดเนื้อหาตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน รอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เปิดโอกาสให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง ตามศักยภาพ โดยกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคนดังนี้

1. จำนวนและการดำเนินการ ความคิดรวบยอดและความรู้ลึกเชิงจำนวน ระบบจำนวนจริง สมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริง การดำเนินการของจำนวน อัตราส่วน ร้อยละ การแก้ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน และการใช้จำนวนในชีวิตจริง

2. การวัด ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตร และความจุ เงิน และเวลา หน่วยวัด ระบบต่าง ๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ

3. เรขาคณิต รูปเรขาคณิตและสมบัติของรูปเรขาคณิตหนึ่งมิติสองมิติและสามมิติการนิยามแบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิต (Geometric Transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation)

4. พีชคณิต แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ฟังก์ชัน เซตและการดำเนินการของเซต การให้เหตุผล นิพจน์สมการ ระบบสมการ อสมการ กราฟ ลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต อนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต

5. การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น การกำหนดประเด็น การเขียนข้อคำถาม การกำหนดวิธีการศึกษา การเก็บรวบรวมข้อมูล การจัดระบบข้อมูล การนำเสนอข้อมูล ค่ากลางและการกระจายของข้อมูล การวิเคราะห์และการแปลความข้อมูล การสำรวจความคิดเห็น ความน่าจะเป็น การใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นในการอธิบายเหตุการณ์ต่าง ๆ และช่วยในการตัดสินใจในการดำเนินชีวิตประจำวัน

6. ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่าง ๆ และสามารถใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำเสนอบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 2 การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด

มาตรฐาน ค 2.2 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนิกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial Reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric Model) ในการแก้ปัญหา

สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมาย และนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล

มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหาการให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

3. คุณภาพผู้เรียนเมื่อเรียนจบชั้นประถมศึกษาปีที่ 6

กระทรวงศึกษาธิการ (2551, น.56-57) กล่าวว่า คุณภาพผู้เรียนเป็นเป้าหมายในการจัดการเรียนรู้การศึกษาขั้นพื้นฐานได้กำหนดคุณภาพผู้เรียนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เมื่อเรียนจบชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ดังนี้

1. มีความรู้ความเข้าใจและความรู้ลึกเชิงจำนวนเกี่ยวกับจำนวนนับและศูนย์ เศษส่วน ทศนิยมไม่เกินสามตำแหน่ง ร้อยละ การดำเนินการของจำนวน สมบัติเกี่ยวกับจำนวน สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนนับ เศษส่วน

ทัศนียมไม่เกินสามตำแหน่ง และร้อยละ พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ สามารถหาค่าประมาณของจำนวนนับและทัศนียมไม่เกินสามตำแหน่งได้

2. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตร ความจุ เวลา เงิน ทิศ แผนที่ และขนาดของมุม สามารถวัดได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม และนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้

3. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะและสมบัติของรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปวงกลม ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทรงกระบอก กรวย ปริซึม พีระมิด มุม และเส้นขนาน

4. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูปและอธิบายความสัมพันธ์ได้ แก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป สามารถวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหาพร้อมทั้งเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นที่มีตัวไม่ทราบค่าหนึ่งตัวและแก้สมการนั้นได้

5. รวบรวมข้อมูล อภิปรายประเด็นต่าง ๆ จากแผนภูมิรูปภาพ แผนภูมิแท่ง แผนภูมิแท่ง เปรียบเทียบ แผนภูมิรูปวงกลม กราฟเส้น และตาราง และนำเสนอข้อมูลในรูปของแผนภูมิรูปภาพ แผนภูมิแท่ง แผนภูมิแท่งเปรียบเทียบ และกราฟเส้น ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นเบื้องต้นในการคาดคะเนการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้

6. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

4. เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการและการแก้สมการ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการและการแก้สมการ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สอดคล้องกับมาตรฐาน ค.4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้ ซึ่งสาระการเรียนรู้แกนกลางชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ประกอบด้วยเนื้อหาคณิตศาสตร์ ดังแสดงในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1

เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสมการและการแก้สมการ

| สาระ/มาตรฐาน | ตัวชี้วัด | สาระการเรียนรู้แกนกลาง |
|--|---|--|
| สาระที่ 4 พีชคณิต | | |
| มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมาย และนำไปใช้แก้ปัญหาได้ | 1.เขียนสมการจาก สถานการณ์หรือ ปัญหา และแก้สมการพร้อมทั้ง ตรวจคำตอบ | 1.สมการเชิงเส้นที่มีตัวไม่ทราบ ค่าหนึ่งตัว 2.การแก้สมการโดยใช้สมบัติ ของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ หรือการหาร 3.การแก้โจทย์ปัญหาด้วยสมการ |

จากการวิเคราะห์หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 สาระที่ 4 พีชคณิตพบว่าเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับเรื่องการแก้สมการ ได้แก่ สมการเชิงเส้นที่มีตัวไม่ทราบค่าหนึ่งตัว การแก้สมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ หรือการหารและการแก้โจทย์ปัญหาด้วยสมการซึ่งผู้วิจัยใช้เป็นกรอบด้านเนื้อหาในการวิจัยครั้งนี้

2.2 การแก้สมการ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ (2557, น.125-137) กล่าวว่า ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องสมการถือว่าเป็นเรื่องที่สำคัญมากเรื่องหนึ่งเนื่องจากเป็นพื้นฐานของการแสดงขั้นตอนการคำนวณและเนื้อหา ดังนั้นการทำความเข้าใจในเรื่องของสมการและการแก้สมการนี้จึงเป็นเรื่องที่มีความจำเป็น ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

สมการ

ความหมายของสมการ

สมการ หมายถึง ประโยคที่แสดงการเท่ากันของจำนวน โดยมีสัญลักษณ์ = บอการเท่ากันของจำนวน

พิจารณาประโยคสัญลักษณ์ต่อไปนี้

$$1. 35 \div 7 = 5 \quad 2. 25 + 12 \neq 25 \times 12$$

$$3. 7 \times 8 > 50 \quad 4. 20 + 17 = \square + 20$$

ประโยคสัญลักษณ์ในข้อ 1 และ 4 มีเครื่องหมาย=

ดังนั้นประโยคสัญลักษณ์ในข้อ 1 และข้อ 4 เป็นสมการ

สมการที่เป็นจริงและสมการที่เป็นเท็จ

สมการที่เป็นจริง คือสมการซึ่งจำนวนที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมาย=กับจำนวนที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมาย = เท่ากัน เช่น

$$9 + 6 = 15 \quad 8 \times 5 = 40 \quad 15 \div 1 = 15$$

สมการที่เป็นเท็จ คือสมการซึ่งจำนวนที่อยู่ข้างซ้ายของเครื่องหมาย=กับจำนวนที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมาย=ไม่เท่ากันเป็นสมการที่เป็นเท็จ เช่น

$$18 - 9 = 8 \quad 35 \div 7 = 7 \div 35 \quad 40 \times 2 = 42$$

สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า

สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า คือสมการที่มีมีการใช้ตัวอักษรหรือสัญลักษณ์อื่นแทนจำนวนเรียกตัวอักษรหรือสัญลักษณ์อื่นแทนจำนวนในสมการว่าตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปรเรียกสมการนี้ว่าสมการที่มีตัวไม่ทราบค่าหรือสมการที่มีตัวแปร เช่น

$$ก + 7 = 17$$

$$ข - 5 = 8$$

$$25 \times a = 125$$

$$\square \div 4 = 13$$

ตัวไม่ทราบค่าที่ใช้แทนจำนวนในสมการจะใช้สัญลักษณ์แบบใดก็ได้เช่น ก , a , \square

คำตอบของสมการ

คำตอบของสมการ คือ จำนวนที่แทนตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปรในสมการแล้วได้สมการที่เป็นจริงคือคำตอบของสมการ เช่น

$$\text{พิจารณาสมการ} \quad ก + 5 = 7$$

แทน ก ด้วย 1 จะได้ $1 + 5 = 7$ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นเท็จ

แทน ก ด้วย 2 จะได้ $2 + 5 = 7$ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง

2 เป็นคำตอบของสมการ $ก + 5 = 7$

การแก้สมการ

การแก้สมการ เป็น การหาคำตอบของสมการโดยวิธีการลองแทนค่าตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปร แล้วพบว่าบางครั้งอาจมีปัญหาในการใช้วิธีนี้ เมื่อสมการมีความยุ่งยากซับซ้อนมากขึ้นจึงจำเป็นต้องมีวิธีการหาคำตอบของสมการ โดยวิธีสะดวกและรวดเร็วกว่านี้ ดังนั้น เพื่อช่วยในการ

แก้สมการ เพื่อความสะดวกและรวดเร็ว ในการหาคำตอบของสมการ โดยไม่ต้องใช้วิธีการลองแทนค่าตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปร ตลอดจนสามารถใช้กับสมการที่มีความยุ่งยากซับซ้อน นักเรียนจำเป็นต้องมีความรู้เกี่ยวกับ สมบัติของการเท่ากันในการหาคำตอบ

สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวกและการลบ

สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก คือ จำนวนที่เท่ากัน 2 จำนวนเมื่อนำมาจำนวนอีกจำนวนหนึ่งมาบวกแต่ละจำนวนที่เท่ากันผลบวกย่อมเท่ากัน เช่น

พิจารณาสมการ $3 + 2 = 5$ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง

นำ 4 มาบวกกับจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

$$(3 + 2) + 4 = 5 + 4$$

$$5 + 4 = 9$$

$$9 = 9$$

ดังนั้น $3 + 2 + 4 = 5 + 4$ เป็นสมการที่เป็นจริง

สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการลบ คือ จำนวนที่เท่ากัน 2 จำนวนเมื่อนำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งมาลบแต่ละจำนวนที่เท่ากันผลลบย่อมเท่ากัน เช่น

พิจารณาสมการ $4 + 3 = 7$ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง

นำ 2 มาลบออกจากจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

$$(4 + 3) - 2 = 7 - 2$$

$$7 - 2 = 5$$

$$5 = 5$$

ดังนั้น $4 + 3 - 2 = 7 - 2$ เป็นสมการที่เป็นจริง

การแก้สมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวกหรือการลบ

ตัวอย่างที่ 1 $ก + 3 = 7$

พิจารณาการแก้สมการ $ก + 3 = 7$

นำ 3 มาลบออกจากจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย = เพื่อให้จำนวนข้างซ้ายของเครื่องหมาย = หรือตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวเท่านั้น

$$ก + 3 - 3 = 7 - 3$$

$$ก = 4$$

เมื่อแทน ก ในสมการ $ก + 3 = 7$ ด้วย 4

จะได้ $4 + 3 = 7$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 4 เป็นคำตอบของสมการ $ก + 3 = 7$

การแก้สมการที่ไม่มีตัวทราบค่าบวกกับจำนวนใด ๆ อาจทำได้โดยใช้สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการลบด้วยการนำจำนวนที่เท่ากันหรือจำนวนที่บวกตัวไม่ทราบค่าเป็นลบออกจากจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

$$\text{ตัวอย่างที่ 2 } k - 4 = 3$$

$$\text{พิจารณาการแก้สมการ } k - 4 = 3$$

นำ 4 มาบวกกับจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย = เพื่อให้จำนวนข้างซ้ายของเครื่องหมาย = เหลือตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวเท่านั้น

$$k - 4 + 4 = 3 + 4$$

$$k = 7$$

เมื่อแทน k ในสมการ $k - 4 = 3$ ด้วย 7

จะได้ $7 - 4 = 3$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 7 เป็นคำตอบของสมการ $k - 4 = 3$

การแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าลบด้วยจำนวนใด ๆ อาจทำได้โดยใช้สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวกด้วยการนำจำนวนที่เท่ากับจำนวนที่ลบตัวไม่ทราบค่าไปบวกกับจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

ถ้าจำนวนที่หาได้ไปแทนตัวไม่ทราบค่าในสมการแล้วได้สมการที่เป็นเท็จแสดงว่าจำนวนนั้นไม่ใช่คำตอบของสมการ

การแก้สมการและตรวจคำตอบ

$$\text{ตัวอย่างที่ 1 } k + 8 = 20$$

$$\text{วิธีทำ } k + 8 = 20$$

นำ 8 มาลบออกจากจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

$$k + 8 - 8 = 20 - 8$$

$$k = 12$$

ตรวจสอบ นำ 12 ไปแทน k ในสมการ

จะได้ $12 + 8 = 20$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 12 เป็นคำตอบของสมการ $k + 8 = 20$

ตอบ 12

ตัวอย่างที่ 2 $m - 6 = 13$

วิธีทำ $m - 6 = 13$

นำ 6 มาบวกกับจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

$$m - 6 + 6 = 13 + 6$$

$$m = 19$$

ตรวจสอบนำ 19 ไปแทน m ในสมการ

จะได้ $19 - 6 = 13$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 19 เป็นคำตอบของสมการ $m - 6 = 13$

ตอบ 19

สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณและการหาร

สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณ คือ จำนวนที่เท่ากัน 2 จำนวนเมื่อนำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งมาคูณแต่ละจำนวนที่เท่ากันผลคูณย่อมเท่ากัน

พิจารณาสมการ $1 + 3 = 4$ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง

นำ 2 มาคูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

$$(1 + 3) \times 2 = 4 \times 2$$

$$4 \times 2 = 8$$

$$8 = 8$$

ดังนั้น $(1 + 3) \times 2 = 4 \times 2$ เป็นสมการที่เป็นจริง

สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการหาร คือ จำนวนที่เท่ากัน 2 จำนวนเมื่อนำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งซึ่งไม่เท่ากับศูนย์หารแต่ละจำนวนที่เท่ากันผลหารย่อมเท่ากัน

พิจารณาสมการ $2 + 4 = 6$ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง

นำ 2 มาหารจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

$$(2 + 4) \div 2 = 6 \div 2$$

$$6 \div 2 = 3$$

$$3 = 3$$

ดังนั้น $(2 + 4) \div 2 = 6 \div 2$ เป็นสมการที่เป็นจริง

การแก้สมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณหรือการหาร

ตัวอย่างที่ 1 $x \div 4 = 12$

พิจารณาการแก้สมการ $x \div 4 = 12$

$$x \div 4 = 12 \text{ หรือ } \frac{x}{4} = 12$$

นำ 4 มาคูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

เพื่อให้จำนวนข้างซ้ายของเครื่องหมาย = เหลือตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวเท่านั้น

$$\frac{x}{4} \times 4 = 12 \times 4$$

$$x = 48$$

เมื่อแทน x ในสมการ $x \div 4 = 12$ ด้วย 48

จะได้ $48 \div 4 = 12$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 48 เป็นคำตอบของสมการ $x \div 4 = 12$

การแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าหารด้วยจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์อาจทำได้โดยใช้สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณด้วยการนำตัวคูณที่เท่ากับจำนวนที่เป็นตัวหารไม่ทราบค่าไปคูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

ตัวอย่างที่ 2 $5 \times n = 10$

พิจารณาการแก้สมการ $5 \times n = 10$

นำ 5 มาหารจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

เพื่อให้จำนวนข้างซ้ายของเครื่องหมาย = หรือตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวเท่านั้น

$$\frac{5 \times n}{5} = \frac{10}{5}$$

$$n = 2$$

เมื่อแทน n ในสมการ $5 \times n = 10$ ด้วย 2

จะได้ $5 \times 2 = 10$ เป็นสมการที่เป็นจริง

เมื่อแทน n ในสมการ $5 \times n = 10$

การแก้สมการที่ไม่ทราบค่าคูณด้วยจำนวนใด ๆ อาจทำได้โดยใช้สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการหารด้วยการนำจำนวนที่เท่ากับจำนวนที่คูณตัวไม่ทราบค่าไปหารจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับการแก้สมการและตรวจคำตอบ

ตัวอย่างที่ 1 $x \div 5 = 30$

วิธีทำ $\frac{x}{5} = 30$

นำ 5 มาคูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =

$$\frac{x}{5} \times 5 = 30 \times 5$$

$$x = 150$$

ตรวจสอบนำ 150 ไปแทน x ในสมการ

จะได้ $150 \div 5 = 30$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 150 เป็นคำตอบของสมการ $x \div 5 = 30$

ตอบ 150

ตัวอย่างที่ 2 $m \times 12 = 120$

วิธีทำ $m \times 12 = 120$

นำ 12 มาหารจำนวนทั้งสองข้าง

$$\frac{m \times 12}{12} = \frac{120}{12}$$

$$m = 10$$

ตรวจสอบนำ 10 ไปแทน m ในสมการ

จะได้ $10 \times 12 = 120$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 10 เป็นคำตอบของสมการ $m \times 12 = 120$

ตอบ 10

การแก้โจทย์ปัญหาสมการ

การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ความรู้เรื่องสมการ

การเขียนสมการจากข้อความที่กำหนดให้ พิจารณาข้อความที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 1 สมศักดิ์มีเงิน ก บาท พ่อให้อีก 10 บาท

สมศักดิ์มีเงิน ก บาท

พ่อให้อีก 10 บาท

ดังนั้นสมศักดิ์มีรวม ก+10 บาท

สมศักดิ์มีเงิน ก บาท พ่อให้อีก 10 บาท สมศักดิ์มีเงินรวม 30 บาท

สมศักดิ์มีเงินรวม ก+10 บาท

สมศักดิ์มีเงินรวม 30 บาท

ดังนั้นเขียนสมการ ก+10 = 30

ตัวอย่างที่ 2 แม่ค้าขายไข่ได้ 50 ถัง แต่ละถังมีไข่ a ฟอง

แม่ค้าขายไข่ได้ 50 ถัง

แต่ละถังมีไข่ 4 ฟอง

ดังนั้นแม่ค้าขายไข่ได้ทั้งหมด $50 \times a$ ฟอง

แม่ค้าขายไข่ได้ 50 แต่ละถังมีไข่ a ฟองแม่ค้าขายไข่ได้ทั้งหมด 600 ฟอง

แม่ค้าขายไข่ได้ทั้งหมด $50 \times a$ ฟอง

แม่ค้าขายไข่ได้ทั้งหมด 600 ฟอง

ดังนั้นเขียนสมการ $50 \times a = 600$

การแก้โจทย์ปัญหาเมื่อโจทย์กำหนดตัวไม่ทราบค่า

ตัวอย่างที่ 1 ธนุมีเงิน 100 บาท คุณแม่ให้อีก ก บาท ธนุมีเงินรวม 175 บาท คุณแม่ให้เงิน

ธนุกี่บาท

วิธีทำ ธนุมีเงิน 100 บาท

คุณแม่ให้อีก ก บาท

ธนุมีเงินรวม $100 + k$ บาท

ธนุมีเงินรวม 175 บาท

เขียนเป็นสมการได้ $100 + k = 175$

$$100 + k - 100 = 175 - 100$$

$$k = 75$$

ดังนั้น คุณแม่ให้เงินธนุ 75 บาท

ตรวจคำตอบแทน ก ด้วย 75 ในโจทย์ปัญหา

จะได้ว่าถ้าธนุมีเงิน 100 บาท คุณแม่ให้อีก 75 บาท

ธนุมีเงินรวม $100 + 75$ เท่ากับ 175 บาท ถูกต้องตามที่โจทย์กำหนด

ตอบ คุณแม่ให้เงินธนุ 75 บาท

ตัวอย่างที่ 2 สุภาณีมะม่วง m ผลแบ่งเป็นกองกองละ 5 ผลได้ทั้งหมด 20 กองสุภาณีมะม่วงทั้งหมดกี่ผล

| | | |
|--------------------------|--------------------------------------|-----|
| วิธีทำ สุภาณีมะม่วง | m | ผล |
| แบ่งเป็นกองกองละ | 5 | คน |
| สุภาแบ่งมะม่วงได้ | $m \div 5$ | กอง |
| สุภาแบ่งมะม่วงได้ทั้งหมด | 20 | กอง |
| เขียนเป็นสมการได้ | $m \div 5 = 20$ | |
| | $\frac{m}{5} \times 5 = 20 \times 5$ | |
| | $m = 100$ | |

ดังนั้น สุภาณีมะม่วงทั้งหมด 100 ผล

ตรวจคำตอบแทน m ด้วย 100 ในโจทย์ปัญหา

จะได้ว่าสุภาณีมะม่วง 100 ผลแบ่งเป็นกอง กองละ 5 ผล

แบ่งได้ $100 \div 5 = 20$ กองถูกต้องตามที่โจทย์กำหนด

ตอบ สุพรรณมีมะม่วงทั้งหมด 100 ผล

การแก้โจทย์ปัญหาเมื่อโจทย์ไม่กำหนดตัวไม่ทราบค่าพิจารณาโจทย์ปัญหาต่อไปนี้

ในกระเป๋าสตางค์มีเหรียญอยู่จำนวนหนึ่งเมื่อนับรวมกับเปลี่ยนที่อยู่นอกกระเป๋าก็ 5 เหรียญจะรวมเรียนได้ทั้งหมด 30 เหรียญจงหาว่ามีเหรียญอยู่ในกระเป๋าสตางค์กี่เหรียญ

โจทย์ให้หาจำนวนเหรียญที่อยู่ในกระเป๋าสตางค์ซึ่งยังไม่ทราบว่าเท่าใดจึงสมมุติให้ k แทนจำนวนเหรียญในกระเป๋าสตางค์

| | | |
|--------------------------|------------|--------|
| นอกกระเป๋าสตางค์มีเหรียญ | 5 | เหรียญ |
| ดังนั้นมีเรียนทั้งหมด | $k+5$ | เหรียญ |
| มีเหรียญทั้งหมด | 30 | เหรียญ |
| เขียนเป็นสมการ | $k+5 = 30$ | |

ตัวอย่างที่ 1 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีความยาวรอบรูป 42 เซนติเมตร ด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมยาวเท่าใด

วิธีทำ สมมติให้ด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ละด้านยาวกเซนติเมตรรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีความยาวรอบรูป $n + n + n = 3 \times n$ เซนติเมตรแต่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีความยาวรอบรูป 42 เซนติเมตร

$$\begin{aligned} \text{เขียนเป็นสมการได้} \quad 3 \times n &= 42 \\ \frac{3 \times n}{3} &= \frac{42}{3} \\ n &= 14 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ ด้าน 1 ด้านยาว 14 เซนติเมตร ด้าน 3 ด้าน $3 \times 14 = 42$ เซนติเมตรตรงตามที่โจทย์กำหนด

ดังนั้น ด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมยาว 14 เซนติเมตร

ตอบ ด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมยาว 14 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 จำนวนใดมากกว่า 8 อยู่ 25

วิธีทำ สมมติให้จำนวนนั้นคือ C

C มากกว่า 8 อยู่ 25

$$\begin{aligned} \text{เขียนสมการได้} \quad C - 8 &= 25 \\ C - 8 + 8 &= 25 + 8 \\ 4 &= 33 \end{aligned}$$

ดังนั้นจำนวนนั้นคือ 33

ตรวจคำตอบ $33 - 8 = 25$ ตรงตามที่โจทย์กำหนด

ตอบ 3

สรุปได้ว่า การแก้สมการ เป็น การหาคำตอบของสมการโดยวิธีการลองแทนค่าตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปร และการแก้โจทย์ปัญหาสมการ ซึ่งนักเรียนจะต้องมีความสามารถตีความ แปลความ สรุปความและขยายความ ในการนำความรู้ที่เรียนมาไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนจะต้องมีความเข้าใจในความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ ทักษะ กระบวนการในการหาคำตอบ, ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติคณิตศาสตร์ เช่น สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ หรือการหาร, ความเข้าใจเกี่ยวกับการนำไปใช้ และความเข้าใจในการนำเสนอ ซึ่งอาจแนะนำเสนอในรูปแบบที่เป็นรูปธรรมหรือนามธรรมก็ได้

2.3 ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Understanding) เป็นจุดมุ่งหมายที่สำคัญของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ ในที่นี้จะกล่าวถึงความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ดังหัวข้อต่อไปนี้

1. ความหมายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นการรู้แจ้งหรือกระทำในข้อความรู้นั้น ๆ ซึ่งผู้เรียนจะตอบสนองหรือแสดงออกมาผ่านการลงมือแก้ปัญหา การแสดงแนวคิด การแสดงแทน และการให้เหตุผล หรือการพูด และนอกจากนี้ยังมีนักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังต่อไปนี้

พร้อมพรรณ อุดมสิน (2544, น.62) ได้กล่าวถึงความหมายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในการนำความรู้ที่รู้มาสัมพันธ์กับโจทย์หรือปัญหาใหม่ ตลอดจนสามารถตีความ แปลความ สรุปความ และขยายความได้

Bloom (1956, p.71) ได้กล่าวว่า ความเข้าใจเป็นความสามารถหนึ่งซึ่งมีหกชั้นของความรู้ออกเป็น 6 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ความรู้ (Knowledge) หมายถึง ความสามารถในการจำความรู้ต่าง ๆ ที่ได้เรียนรู้มา

ขั้นที่ 2 ความเข้าใจ (Comprehension) หมายถึง ความสามารถในการแปลความขยายความในสิ่งที่ได้เรียนรู้

ขั้นที่ 3 การนำไปใช้ (Application) หมายถึง ความสามารถในการใช้สิ่งที่ได้เรียนรู้มาก่อนให้เกิดสิ่งใหม่

ขั้นที่ 4 การวิเคราะห์ (Analysis) หมายถึง ความสามารถในการแยกความรู้ออกเป็นส่วนทำความเข้าใจในแต่ละส่วนที่สัมพันธ์หรือแตกต่างกันอย่างไร

ขั้นที่ 5 การสังเคราะห์ (Synthesis) หมายถึง ความสามารถในการรวมความรู้ต่าง ๆ หรือประสบการณ์ต่าง ๆ ให้เกิดเป็นสิ่งแปลกใหม่

ขั้นที่ 6 การประเมินค่า (Evaluation) หมายถึง ความสามารถในการตัดสินคุณค่าอย่างมีเหตุผล

โครงการคณิตศาสตร์ในโรงเรียนของมหาวิทยาลัยชิคาโก (โครงการคณิตศาสตร์ในโรงเรียนของมหาวิทยาลัยชิคาโก. 1990, p.192) แบ่งความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 4 ด้าน

1. ทักษะ ความเข้าใจขั้นตอนกระบวนการคิด ประกอบด้วยองค์ความรู้ที่ก่อให้เกิดผลสัมฤทธิ์แก่ผู้เรียน 3 ด้านคือ

1.1 ด้านความรู้ (Knowledge : K) แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1.1.1 เนื้อหาสาระของวิชานักคิด คือ สาระวิชาที่ผู้เรียนต้องเรียนรู้ ประกอบด้วยเครื่องมือช่วยคิด กระบวนการคิด ทักษะการคิด

1.1.2 ความรู้บูรณาการ คือ สาระเรื่องราวต่าง ๆ ที่เป็นสภาพการณ์ที่กำหนดสภาพแวดล้อมรอบตัว ปัญหาในชีวิตประจำวัน ที่ถูกนำมาคิด ซึ่งเนื้อหาจะเป็นสาระของวิชาใดก็ได้จึงเป็นความรู้เชิงบูรณาการ

1.2 ด้านกระบวนการ (Process : P) คือ กระบวนการจัดการเรียนการสอน เพื่อพัฒนากระบวนการคิดที่เน้นการฝึกปฏิบัติจริง ได้สร้างผู้เรียนให้เกิดทักษะชีวิตพื้นฐาน 7 ประการ ได้แก่ ทักษะการรู้จักตนเอง ทักษะการคิด การตัดสินใจและการแก้ปัญหา ทักษะการแสวงหาข้อมูล ข่าวสารความรู้ ทักษะการปรับตัว ทักษะการสื่อสารและสร้างสัมพันธภาพ ทักษะการวางแผน และการจัดการ ทักษะการทำงานเป็นทีม

1.3 เจตคติ (Attitude : A) คือ คุณลักษณะที่ปลูกฝังของรายวิชา ได้แก่ ใจกว้าง ขยัน ใฝ่เรียนใฝ่รู้ กระตือรือร้น ช่างคิดผสมผสาน ขยัน ต่อสู้ อดทน เป็นธรรมชาติ มั่นใจในตนเอง ช่างวิเคราะห์ กล้าคิดกล้าเสี่ยง มีน้ำใจ

2. สมบัติความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ใน โลกยุคปัจจุบันเมื่อเราเรียนคณิตศาสตร์เราควรได้คุณสมบัติต่อไปนี้จากการเรียน

2.1 ความสามารถในการสำรวจ

2.2 ความสามารถในการคาดเดา

2.3 ความสามารถในการให้เหตุผล

2.4 ความสามารถในการนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาที่ไม่เคยพบได้อย่างมีประสิทธิภาพ

คุณสมบัตินี้เรียกว่า ศักยภาพทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Power) ไม่ว่าเราจะมีอาชีพอะไร ถ้าเรามีคุณสมบัตินี้ เรียกได้ว่าเป็นคนที่มีศักยภาพทางคณิตศาสตร์

3. การใช้งาน-ความเข้าใจเกี่ยวกับการนำไปใช้

3.1 มีความรู้ในคำศัพท์ บทนิยาม หลักการ ทฤษฎีบท โครงสร้าง วิธีการ มีความเข้าใจในความคิดรวบยอดจนสามารถอธิบายได้ หรือเขียนได้ หรือยกตัวอย่างได้ แปลงปัญหาจากรูปหนึ่งไปสู่รูปหนึ่ง ประมาณคำตอบได้ ระบุความสัมพันธ์ได้ ตรวจสอบผลที่เกิดได้

3.2 มีทักษะต่าง ๆ ดังนี้ ทักษะการแก้ปัญหา การนำความรู้ไปใช้ในชีวิตจริง การคิดอย่างมีเหตุผล การคิดคำนวณ การวัด การประมาณ การอ่านและแปลผลข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การทำนาย และการใช้คอมพิวเตอร์

3.3 มีความสามารถในการวิเคราะห์และประยุกต์ใช้

4. ความเข้าใจผ่านการนำเสนอ การนำเสนอ เป็นกระบวนการถ่ายทอดข่าวสารจากผู้ส่งสารไปยังผู้รับสาร โดยแสดงแทนผ่านช่องทางการสื่อสารต่าง ๆ ได้แก่ การฟัง การพูด การอ่าน การเขียน การดู การแสดงท่าทาง โดยมีการใช้สัญลักษณ์ ตัวแปร ตาราง กราฟ สมการ อสมการ ฟังก์ชันและแบบจำลอง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มาช่วยในการสื่อความหมาย

Wilson (1971,p.661) ได้กล่าวถึง ความหมายของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ว่า ความสามารถในการแปลความ (Translation) ตีความ (Interpretation) และขยายความ (Extrapolation) ในปัญหาใหม่ ๆ โดยการนำเอาความรู้ที่ได้เรียนมา ไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

Hiebert and Carpenter (1992,p.67) ได้กล่าวถึง ความหมายของเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยสรุปว่า เป็นการสร้างการเชื่อมโยงระหว่างความคิด ความจริง และกระบวนการทางคณิตศาสตร์

Crowley (2000,p.1) ได้กล่าวว่าความมากหรือน้อยของกระบวนการเชื่อมโยงอยู่ในโครงสร้างความรู้ไม่ได้เป็นตัวบ่งบอกถึงการทำบุคคลนั้นจะมีความเข้าใจหรือมีโน้ตทัศน์หรือประสบความสำเร็จในการแก้สถานการณ์ปัญหาที่เผชิญแต่ความเข้าใจมีโน้ตทัศน์หรือความสำเร็จในการแก้ปัญหานั้นจะขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพและคุณภาพในการเชื่อมโยงมากกว่า

สรุปได้ว่าความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ หมายถึง เป็น ความสามารถในการแปลความ (Translation) ตีความ (Interpretation) และสามารถสร้างการเชื่อมโยงระหว่างความคิดความจริง และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จนสามารถในการนำความรู้เดิมที่มีอยู่มาสัมพันธ์กับสถานการณ์ใหม่จนสามารถแก้สถานการณ์ปัญหานั้นๆได้ และสามารถสรุปความหรือขยายความคิดโดยอาศัยความสัมพันธ์เกี่ยวกับสถานการณ์ต่างๆ แล้วนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล

2. ความสำคัญของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มีความจำเป็นมากที่จะต้องทำให้เกิดขึ้นกับผู้เรียน ดังที่นักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวไว้ดังนี้

อัมพร ม้าคนอง (2547, น.29) ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และนักเรียนสามารถนำความรู้ที่มีอยู่นั้น ไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์หรือปัญหาที่ซับซ้อนได้

ไพฑูถ นารคร (2549, น.93-102) การพัฒนาให้นักเรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์นั้นทำให้นักเรียนสามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์โดยใช้ยุทธวิธีหรือประยุกต์ความเข้าใจนั้นไปใช้ในการแก้ปัญหาและตัดสินใจกับสิ่งต่าง ๆ ได้อย่างมีเหตุผล

Sheffield and Cruikshank (2005, p.24) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จะทำให้นักเรียนมีความสามารถและความคงทนยาวนานกว่าการสอนชนิดอื่น ๆ

สรุปได้ว่า ความสำคัญของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ คือ ปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และนักเรียนสามารถนำความรู้ที่มีอยู่นั้นไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์หรือปัญหาที่ซับซ้อนได้ และความคงทนยาวนานกว่าการสอนชนิดอื่น ๆ

3. ลักษณะของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาได้ให้ทัศนะเกี่ยวกับลักษณะของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ไว้หลายท่าน ดังต่อไปนี้

สุวิทย์ มูลคำและอรทัย มูลคำ (2545, น.128-129) โดยทั่วไปคนมองข้ามความเข้าใจทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน คนทั่วไปมองข้ามความเข้าใจว่าเป็นการทำได้ เช่น ผู้เรียนเข้าใจเรื่องเศษส่วน ถ้าเขาทำเศษส่วนได้ (คิดคำนวณเศษส่วนได้) ในขณะที่นักคณิตศาสตร์มองความเข้าใจที่แท้จริง เป็นความสามารถที่ผู้เรียนสามารถนำสมบัติต่าง ๆ ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ สำหรับกลุ่มที่ใช้คณิตศาสตร์มากมักคิดว่าผู้เรียนไม่เข้าใจคณิตศาสตร์อย่างแท้จริงหากเขาไม่ได้ใช้ พวกเขาที่ศึกษาเกี่ยวกับการเรียนรู้คิดว่าความเข้าใจที่แท้จริงต้องสะท้อนวิธีที่สมองทำงานหรือพัฒนาการของผู้เรียน เช่นเดียวกับนักประวัติศาสตร์และวัฒนธรรมที่คิดว่าประวัติศาสตร์และวัฒนธรรมจำเป็นต่อความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง จะเห็นว่ามุมมองความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของคนแต่ละกลุ่ม แต่ละอาชีพ นั้นแตกต่างกัน ซึ่งบางครั้งก็ขึ้นอยู่กับบริบทของตนเองและบางครั้งก็ไม่ได้ตระหนักถึงคุณค่าของความเข้าใจในมุมมองของผู้อื่นเลย แล้วอะไรที่เป็นความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่แท้จริง

Bruner (1976, p.98) เห็นว่า ประสบการณ์เดิมของผู้เรียนจะมีบทบาทในการส่งเสริมการเรียนรู้ และเชื่อว่าวุฒิภาวะอย่างเดียวไม่เพียงพอต่อการพัฒนาโครงสร้างความรู้ใหม่ ต้องมีองค์ประกอบอื่นเกี่ยวข้อง เช่นการพัฒนาทางด้านภาษา และประสบการณ์เดิมเข้ามามีส่วนสำคัญในการเพิ่มความเจริญงอกงามทางสติปัญญา

Ausubel (1977, p.90) ที่เชื่อว่าการเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้เมื่อผู้เรียนมีความรู้พื้นฐานการเรียนรู้ที่มีความหมายที่สามารถเชื่อมโยงความรู้ใหม่ได้กับโครงสร้างความรู้เดิมที่มีอยู่นำมาจัดเป็นการเรียนรู้ที่มีความหมาย แต่ถ้าผู้เรียนไม่สามารถนำสิ่งใหม่ไปสัมพันธ์กับความรู้เดิมได้ เรียกว่าเป็นการเรียนรู้ที่ไม่มี ความหมาย หรือเรียนแบบท่องจำ

Vygotsky (1978, p.86) ได้เน้นบริบททางสังคม เรียกว่า Social constructivism เชื่อว่าผู้เรียนเป็นผู้สร้างความรู้โดยผ่านทาง การมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคมกับผู้อื่น ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการพัฒนาด้านพุทธิปัญญา สำหรับ John Dewey ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนรู้ Learning by Doing ที่เชื่อว่าผู้เรียนต้องเรียนรู้ควบคู่ไปกับการกระทำ และผู้เรียนต้องมีการทำความเข้าใจ ความรู้ใหม่โดยอาศัยประสบการณ์เดิมที่สั่งสมมาเป็นพื้นฐานการเรียนรู้ อันเป็นความพยายามเชิงสังคม ก่อให้เกิดรูปแบบการเรียนการสอนที่เรียกว่า การเรียนรู้แบบร่วมมือ ที่เน้นความสำคัญของการสร้างความรู้โดยกลุ่มคนในสังคม

Hiebert and Catpenter (1992, p.1) การเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Understanding) ตรงกันข้ามกับการท่องจำ (Rote Learning) การเรียนรู้เพื่อให้สามารถนำไปใช้ได้ นั้น จำเป็นต้องรู้กระบวนการที่เกิดขึ้นในตัวเองของผู้เรียนที่เน้นวิธีการเรียนรู้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยให้ผู้เรียนสามารถคิดไตร่ตรองได้อย่างสร้างสรรค์ ช่วยพัฒนาสังคมและสิ่งแวดล้อม และนำความรู้ที่ได้รับไปบูรณาการในการดำรงชีวิตได้อย่างมีความสุข ตามหลักการของทฤษฎีนี้ผู้เรียนเป็นผู้สร้างความรู้จาก ความสัมพันธ์ระหว่าง สิ่งที่พบเห็นกับความรู้ความเข้าใจเดิมที่มีมาก่อน นำความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเหตุการณ์ และปรากฏการณ์ที่พบเห็นมาสร้างเป็นโครงสร้างใหม่ทางสติปัญญา

สรุปได้ว่า ลักษณะความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Understanding) ตรงกันข้ามกับการท่องจำ (Rote Learning) ในการเรียนรู้เพื่อให้สามารถนำไปใช้ได้ นั้น จำเป็นต้องรู้กระบวนการที่เกิดขึ้นในตัวเองของผู้เรียนที่เน้นวิธีการเรียนรู้ด้วยตนเอง เป็นความสามารถที่ผู้เรียนสามารถนำสมบัติต่าง ๆ ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ ความเข้าใจที่แท้จริงต้องสะท้อนวิธีที่สมองทำงานหรือพัฒนาการของผู้เรียน ประสบการณ์เดิมของผู้เรียนจะมีบทบาทในการส่งเสริมการเรียนรู้ วุฒิภาวะอย่างเดียวนั้นไม่เพียงพอต่อการพัฒนาโครงสร้างความรู้ใหม่ ต้องมีองค์ประกอบอื่นเกี่ยวข้อง เช่นการพัฒนาทางด้านภาษา และประสบการณ์เดิมเข้ามามีส่วนสำคัญในการเพิ่มความเจริญงอกงามทางสติปัญญา ผู้เรียนต้องมีการทำความเข้าใจความรู้ใหม่โดยอาศัยประสบการณ์เดิมที่สั่งสมมาเป็นพื้นฐานการเรียนรู้ อันเป็นความพยายามเชิงสังคม ก่อให้เกิดรูปแบบการเรียนการสอนที่เรียกว่า การเรียนรู้แบบร่วมมือ ที่เน้นความสำคัญของการสร้างความรู้โดยกลุ่มคนในสังคม

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นการศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในเรื่องการแก้สมการ และ โจทย์ปัญหาสมการการหาคำตอบของสมการโดยวิธีการลงแทนค่าตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปร และ ใช้สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ หรือการหาร โดยต้องอาศัยความสามารถในการแปลความ (Translation) ดีความ (Interpretation) และสามารถสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน ซึ่งอาจจะนำเสนอในรูปแบบที่เป็นรูปธรรมหรือนามธรรมก็ได้

4. พฤติกรรมที่แสดงถึงความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

อนันต์จันทร์กวี (2537, น.256) กล่าวว่า การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นั้น ครูผู้สอนจำเป็นต้องรู้ว่าผู้เรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาที่ครูสอนให้หรือไม่ ครูจึงจำเป็นต้องศึกษาถึงพฤติกรรมที่จะแสดงถึงความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ นักเรียนที่มีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จะแสดงออกดังนี้

1. สรุปหรือบอกความหมายของเรื่องราวที่เคยเรียนมาแล้ว โดยใช้คำพูดของตนเองหรือเลือกความหมายที่กำหนดให้ซึ่งเขียนขึ้นในรูปใหม่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนมาในชั้นเรียน
2. สรุปความหมายของเรื่องให้เป็นกฎ หลักการ หรือสรุปเป็นกรณีทั่วไปหรือหาค่าสัญลักษณ์โดยอาศัยโครงสร้างทางคณิตศาสตร์
3. แปลงหรือเปลี่ยนรูป จากข้อความที่เป็นภาษา ให้เป็นสัญลักษณ์หรือภาพ หรือจากสัญลักษณ์ให้เป็นภาพหรือกลับกัน
4. ชี้บ่งความสมเหตุสมผลของข้อความทางคณิตศาสตร์ได้
5. แปลความหรือตีโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ไว้ว่า ข้อความนั้น ๆ กำหนดอะไรให้ และต้องการถามเรื่องอะไร

สรุปได้ว่า พฤติกรรมที่แสดงถึงความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ สามารถสรุปหรือบอกความหมายของเรื่องราวที่เคยเรียนมาแล้ว โดยใช้คำพูดของตนเองหรือเลือกความหมายที่กำหนดให้ซึ่งเขียนขึ้นในรูปใหม่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนมาในชั้นเรียนให้เป็นกฎ หลักการ หรือสรุปเป็นกรณีทั่วไปหรือหาค่าสัญลักษณ์โดยอาศัยโครงสร้างทางคณิตศาสตร์จากข้อความที่เป็นภาษา ให้เป็นสัญลักษณ์หรือภาพ หรือจากสัญลักษณ์ให้เป็นภาพหรือกลับกัน แล้วแปลความหรือตีโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ไว้ว่า ข้อความนั้น ๆ กำหนดอะไรให้และต้องการถามเรื่องอะไร

5. การวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาหลายท่านให้ความหมายของการวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

อนันต์ จันทร์กวี (2545, น.256) กล่าวว่า การวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. สรุปหรือบอกความหมายของเรื่องราวที่เคยเรียนมาแล้ว โดยใช้คำพูดของตนเองหรือเลือกความหมายที่กำหนดให้ซึ่งเขียนในรูปแบบใหม่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนมาในชั้นเรียน
2. สรุปความหมายของเรื่องให้เป็นกฎ หลักการ หรือสรุปเป็นกรณีทั่วไปหรือหาค่าสัญลักษณ์โดยอาศัยโครงสร้างทางคณิตศาสตร์
3. แปลงหรือเปลี่ยนรูป จากข้อความที่เป็นภาษา ให้เป็นสัญลักษณ์หรือภาพ ซึ่งชี้บ่งความสมเหตุสมผลของข้อความและแปลความหรือตีโจทย์ปัญหา

Perkins (1993, p.35) ได้กล่าวว่า การวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหา ที่เรียนอย่างแท้จริงนั้น ควรคำนึงถึงข้อเสนอแนะต่อไปนี้

1. ควรเรียนรู้ด้วยกระบวนการคิดเป็นศูนย์กลาง ให้นักเรียนได้ปฏิบัติมากกว่าครู
2. เตรียมการประเมินผลที่ต่อเนื่อง
3. ควรสนับสนุนการแสดงออกของนักเรียน ให้นักเรียนได้ใช้จินตนาการ เพราะการแสดงออกจะบ่งบอกถึงความเข้าใจในทางปฏิบัติของนักเรียน

สรุปได้ว่า การวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ สามารถในการแปลความ (Translation) ตีความ (Interpretation) และสามารถสร้างการเชื่อมโยงระหว่างความคิดความจริง และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จนสามารถในการนำความรู้เดิมที่มีอยู่มาสัมพันธ์กับสถานการณ์ใหม่จนสามารถแก้สถานการณ์ปัญหานั้นๆ ได้ และสามารถสรุปความหรือขยายความคิดโดยอาศัยความสัมพันธ์เกี่ยวกับสถานการณ์ต่างๆ แล้วนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล และนักเรียนสามารถนำความรู้ที่มีอยู่นั้น ไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์หรือปัญหาที่ซับซ้อนได้ และความคงทนยาวนานกว่าการสอนชนิดอื่น ๆ เพื่อให้สามารถนำไปใช้ได้ นั้น จำเป็นต้องรู้กระบวนการที่เกิดขึ้นในตัวเองของผู้เรียนที่เน้นวิธีการเรียนรู้ด้วยตนเอง เป็นความสามารถที่ผู้เรียนสามารถนำสมบัติต่าง ๆ ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ ความเข้าใจที่แท้จริงต้องสะท้อนวิธีที่สมองทำงานหรือพัฒนาการของผู้เรียน ประสบการณ์เดิมของผู้เรียนจะมีบทบาทในการส่งเสริมการเรียนรู้ ภูมิภาคจะอย่างเดียวไม่เพียงพอต่อการพัฒนาโครงสร้างความรู้ใหม่ ต้องมีองค์ประกอบอื่นเกี่ยวข้อง เช่นการพัฒนาทางด้านภาษา และประสบการณ์เดิมเข้ามามีส่วนสำคัญในการเพิ่มความเจริญงอกงามทางสติปัญญา ผู้เรียนต้องมีการทำความเข้าใจความรู้ใหม่โดยอาศัยประสบการณ์เดิมที่สั่งสมมาเป็นพื้นฐานการเรียนรู้ อันเป็นความพยายามเชิงสังคม ก่อให้เกิดรูปแบบการเรียนการสอนที่เรียกว่า การเรียนรู้แบบร่วมมือ ที่เน้นความสำคัญของการสร้างความรู้โดยกลุ่มคนในสังคม สามารถสรุปหรือ

บอกความหมายของเรื่องราวที่เคยเรียนมาแล้ว โดยใช้คำพูดของตนเองหรือเลือกความหมายที่กำหนดให้ซึ่งเขียนขึ้นในรูปแบบใหม่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนมาในชั้นเรียนให้เป็นกฎ หลักการ หรือสรุปเป็นกรณีทั่วไปหรือหาค่าสัญลักษณ์โดยอาศัยโครงสร้างทางคณิตศาสตร์จากข้อความที่เป็นภาษา ให้เป็นสัญลักษณ์หรือภาพ หรือจากสัญลักษณ์ให้เป็นภาพหรือกลับกัน แล้วแปลความหรือตีโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ไว้ว่า ข้อความนั้น ๆ กำหนดอะไรให้และต้องการถามเรื่องอะไร

2.4 ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของ Usiskin

Usiskin (2001, pp.14-22) เป็นครูที่รู้จักกันเป็นอย่างดีในฐานะผู้อำนวยการโครงการคณิตศาสตร์โรงเรียนของมหาวิทยาลัยชิคาโก เป็นอาจารย์ประจำสาขาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2512 เขายังได้สอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมต้นและระดับมัธยมศึกษาตอนปลายและได้ประพันธ์และร่วมประพันธ์ตำราหลายเล่มรวมถึงชุดหนังสือหกลเล่มที่ใช้เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรมัธยมศึกษาของโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย เขาได้รับรางวัล Lifetime Achievement Award จาก National Council of Teachers of Maths

Usiskin กล่าวว่า กว่า 35 ปีที่ผ่านมาได้มีการเคลื่อนไหวของสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาในระดับประถมศึกษาแห่งหนึ่งได้กล่าวว่า บุคลากรครูที่สอนในระดับประถมศึกษาในหลาย ๆ พื้นที่ ได้พูดถึงการสอนเรื่องเกี่ยวกับรูปทรงเรขาคณิตนั้น จะต้องเป็นหลักสูตรของมัธยมศึกษาเท่านั้น เพราะจะเป็นนามธรรมและจะมีบทพิสูจน์ได้ เพื่อใช้ในการทำแบบทดสอบต่าง ๆ กล่าวคือการสอนเรื่องเรขาคณิตให้กับเด็ก ๆ ระดับประถมศึกษานั้นเป็นสิ่งที่ไม่เหมาะสมกับความเป็นธรรมชาติของเด็กในระดับนี้นั่นเอง จนในขณะเดียวกัน โรงเรียนประถมในหลายแห่งเริ่มให้ครูกลับมาตระหนักถึงการสอนเรื่องเรขาคณิตและให้มีแนวโน้มกลับมาใช้เรื่อง ขนาด รูปร่าง การวาดภาพ และจำนวนนับจากเรื่องเรขาคณิตแล้ว ดังนั้นจึงเห็นได้ว่าไม่มีเพียงแต่การคำนวณเท่านั้นที่จะมีความสำคัญต่อหลักสูตรการสอน เรขาคณิตยังเป็นหลักสูตรการสอนอีกอย่างหนึ่งที่สามารถนำไปใช้ในสังคมได้ กล่าวคือ การใช้รูปเรขาคณิตต่าง ๆ สามารถนำไปใช้วิชาอื่น ๆ เช่นวิชา ศิลปศึกษาและสังคมศึกษาได้เช่นการวาด วงกลม สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยมหรือแม้แต่การวาดมุมต่าง ๆ ซึ่งเราได้พบเห็นในชีวิตประจำวันได้

ปัจจุบันนี้ พิชคณิตยังเป็นแรงบันดาลใจอย่างมากในการหาคำตอบของการแก้ปัญหาต่าง ๆ อย่างง่าย ๆ ให้เหมือนราวกับการใช้รูปทรงเรขาคณิต ในปี พ.ศ.2503 นั้นเอง แม้แต่ครูที่มั่นใจในการสอนมโนทัศน์หรือแนวคิดทักษะทางคณิตศาสตร์ก็ยังไม่สามารถจะแก้ปัญหาของสมการที่ซับซ้อนยุ่งยากได้ ดังนั้นการแก้ปัญหาของสมการที่ค่อนข้างจะยุ่งยากและซับซ้อนก็ยังสามารถใช้

พีชคณิตมาเป็นสัญลักษณ์ในการแก้ปัญหาก็อีกทางหนึ่งด้วย ในระดับประถมศึกษาสามารถใช้แนวคิดของพีชคณิตในการแก้โจทย์ปัญหาให้กับนักเรียนได้เช่นกัน

จากบทความของวิทยานิพนธ์เล่มหนึ่งได้กล่าวถึง 5 ลักษณะภาษาที่ใช้ในพีชคณิตก็คือ
 1) การใช้สัญลักษณ์แทนจำนวนที่เราไม่ทราบค่า 2) การใช้สูตร 3) การใช้รูปแบบทั่ว ๆ ไป 4) การใช้ตัวอักษรแทนตัวเลขที่กำหนดและ 5) การใช้ความสัมพันธ์แทนค่าจำนวนตัวเลข

1. การใช้สัญลักษณ์แทนจำนวนที่เราไม่ทราบค่า

พิจารณาจากคำถามดังต่อไปนี้

อะไรคือจำนวนที่บวกกับ 3 แล้ว ได้ผลลัพธ์คือ 7

เติมค่าในช่องว่าง คือ $3 + \underline{\quad} = 7$

เติมตัวเลขในช่องสี่เหลี่ยมให้ถูกต้อง $3 + \square = 7$

หาคำตอบของ $3 + ? = 7$

จงหาค่าของ $3 + X = 7$

คำถามของแต่ละจำนวนที่เราไม่ทราบค่า เราสามารถใช้ คำ ช่องว่าง รูปสี่เหลี่ยม เครื่องหมายคำถาม หรือสัญลักษณ์ตัวอักษร X แทนตัวเลขในจำนวนนั้น ๆ ได้ กล่าวคือเราสามารถ ใช้รูปทรงเรขาคณิตแทนได้นั่นเอง แต่การที่เราจะใช้ X ใช้ \square แทนจำนวนที่เราไม่ทราบนั้น เรา จะต้องมีการบรรยายสถานการณ์ ตอนแรกก่อน กล่าวคือ เราต้องถามว่า 3 บวกอะไรแล้วได้ 7 ก่อน เราจึงจะใช้สัญลักษณ์ทางเรขาคณิตแทนค่านั้นได้ แต่ในหลาย ๆ สิ่งนักเรียนส่วนมากได้ใช้ เรขาคณิตก่อนที่จะใช้สัญลักษณ์ต่างแทนในปี พ.ศ.2133 (การใช้อักษร X หรือ อักษร Y แทน จำนวนที่เราไม่ทราบค่านั้นเกิดขึ้นก่อนปี พ.ศ.2143 โดย Descartes นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส จากประโยคในข้างต้นที่กล่าวมานี้ ทำให้เห็นได้ว่าการใช้รูปเรขาคณิตสามารถทำให้นักเรียนแก้ โจทย์ปัญหาในการหาคำตอบได้ง่ายขึ้น

2. การใช้สูตร

ถ้าเรามีสูตร $A = LW$ สำหรับการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และเราจะให้นักเรียน หาสูตรดังกล่าวโดยให้หาว่า A มีค่าเท่าไร โดย ให้ L (Long = ยาว) = 5 และ W (Wild = กว้าง) = 7 เราจะทำโดยวิธีของเรขาคณิต ถ้าเราถามนักเรียนว่าให้ค่า n (n คือจำนวนใดจำนวนหนึ่ง) เมื่อ $5 \times 7 = n$ นั่นก็จะไม่ได้คำตอบที่ต้องการ

ถ้าครูผู้สอนถามนักเรียนว่า จำนวนอะไรที่จะเป็นคำตอบของ n ได้ถูกต้องที่สุด คุณครูก็จะใช้เรขาคณิตในการหาคำตอบและจะรู้ว่าคำตอบนั้นคืออะไร ดังนั้นเมื่อครูสอนการหาค่าของ ตัวเลขต่าง ๆ ที่แทนค่าด้วยตัวอักษรได้แล้วนั้น ครูก็จะสามารถให้นักเรียนหาคำตอบเป็นตัวเลขที่ถูกต้อง

ตัวอักษรนั้น ๆ แทนค่าอยู่ได้อย่างไม่ยากและจะสามารถใช้รูปทรงเรขาคณิตหาคำตอบได้อย่างง่ายดายอีกด้วย

3. การใช้รูปแบบทั่ว ๆ ไป

พ่อของผมเป็นนักบัญชีมีอาชีพและเขาก็หาวิธีคำนวณแบบลัดเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์เวลาที่ท่านได้สอนผม ยกตัวอย่างเช่น มีเลขจำนวนหนึ่งคูณด้วย 19 และเลขอีกจำนวนหนึ่งคูณด้วย 20 โดยการแทนจำนวนตัวเลขที่ต้องการหาด้วย n ด้วยการอธิบายสั้น ๆ ว่า ถ้า n คือเลขจำนวนหนึ่ง จะได้ว่า $19n = 20n - n$ ซึ่งจำนวนของสมการนี้เรียกว่า สมบัติการกระจาย เป็นสมบัติการกระจายแบบสั้น ๆ จะสังเกตได้ว่าการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาได้อย่างง่ายกว่าที่ผ่านมา หารู้ไม่ว่าการใช้พีชคณิตมาอธิบายก็มีความคล้ายคลึงกับการแก้โจทย์ปัญหาโดยตรง

ตัวอย่าง ถ้าคุณซื้อโน้ตบุ๊ก 19 เครื่อง เครื่องละ 98.35 บาท (แทนค่าเงิน 1 ดอลลาร์ = 33.34 บาท) ใช้ 33.34 บาท แทนด้วย n

$$\text{จะได้ } 19 \times 98.35 \text{ บาท} = 20 \times 98.35 - 98.35$$

หลายคนจะใช้เครื่องคิดเลขหาคำตอบนั้นได้เลยทันที คือ เท่ากับ $1,967.06 - 98.35$ หรือ $1,868.70$ เป็นต้น

การให้พีชคณิตอธิบายก็เช่นเดียวกัน โดยการใช้พีชคณิตอธิบายโดยใช้ตัวอักษรแทนค่าในตัวเลขจะเป็นการเหมาะสมที่สุด คุณครูก็สามารถบอกเด็กนักเรียนของตัวเองได้ว่า อะไรที่คุณกัน 2 จำนวน แล้วได้คำตอบเหมือน ๆ กันและคุณครูยังสามารถเขียนตัวอย่างได้ดังนี้ จำนวน a และ b คือ $a \times b = b \times a$ ตัวอย่างเช่น 6×12 จะได้ผลลัพธ์ เท่ากับ 12×6 ด้วย

ดังนั้นคุณครูสามารถใช้พีชคณิตในรูปแบบทั่วไปในการแก้ปัญหาของสมการได้ ตัวอย่างคือ 0 บวกกับจำนวนใดจำนวนหนึ่งผลลัพธ์ที่ได้ก็จะเป็นจำนวนนั้น แต่ทว่าถ้าคุณครูเขียนให้อยู่ในรูปของรูปแบบทั่ว ๆ ไปโดยการใช้สัญลักษณ์ตัวอักษรของพีชคณิตจะได้ว่า $(0 + n = n; t + t = 2t)$ เป็นต้น

4. การใช้ตัวอักษรแทนตัวเลขที่กำหนด

หลาย ๆ คนคงจะเคยเล่นเกมเศรษฐีที่วางอยู่บนกระดานเกม ซึ่งแบ่งออกเป็นหลายประเภทให้ได้เล่นกัน โดยจะเป็นการเดินหมากรอบ ๆ กระดานที่วางไว้ อย่างไรก็ตามตัวเลขที่เราเดินอยู่บนกระดานนั้นก็ยังมีช่องว่างเว้นไว้ด้วยในทางพีชคณิตก็เช่นเดียวกัน ถ้าคุณรอบเดินคุณเป็น d พอคุณเดินมาครบรอบแล้วเริ่มเดินครั้งที่ 2 ก็จะเป็น $2d$

โปรแกรมของตารางตัวเลขที่จัดไว้ก็สามารถใช้ได้กับพีชคณิต โดยให้ตัวเลขจำนวนแถวหนึ่งของตารางที่หนึ่งลบด้วยจำนวนแถวตัวเลขหนึ่งของตารางที่สอง และผลลัพธ์จะอยู่ในตารางที่สาม รวากับสถานการณ์ของลูกเต๋า เราไม่สามารถคาดเดาได้ว่าตัวเลขของจำนวนนั้นจะออกมาเป็นจำนวนอะไร ถ้าจำนวนแรกของตารางคือ จำนวน x และจำนวนที่สองของตารางคือ จำนวน y ดังนั้นเราจะได้จำนวนที่สามของตารางเท่ากับ $y - x$ นั่นเอง

สรุปได้ว่า เมื่อไหร่ก็ตามที่คุณเล่นเกมโดยมีตัวเลขจำนวนใดจำนวนหนึ่งโดย จำนวนนั้น $___ + 3$ แล้วเท่ากับ 5 คุณก็จะสามารถใช้พีชคณิตที่เป็นตัวอักษรมาแทนที่ตัวเลขนั้น ๆ ได้อย่างถูกต้องและแม่นยำในการคิดแต่ละครั้ง

5. การใช้ความสัมพันธ์แทนค่าจำนวนตัวเลข

บ๊อบมีอายุมากกว่ามาริสสา 2 ปี อยากทราบว่าพวกเขาเมื่อไหร่ ถ้ามาริสสาอายุ 7 ปี บ๊อบก็ต้องมีอายุ 9 ปีถ้ามาริสามีอายุ 4 ปี บ๊อบก็ต้องมีอายุ 6 ปี เราไม่สามารถทราบได้เลยว่าพวกเขาทั้ง 2 คนมีอายุที่แท้จริงเท่าไรถ้าเราใช้สัญลักษณ์ของพีชคณิตแทนอายุบ๊อบคือ B และอายุของมาริสสาคือ M ดังนั้นเราจะได้สมการดังนี้

$$B = M + 2 \text{ (ซึ่งบ๊อบมีอายุมากกว่ามาริสสา 2 ปี)}$$

$$B - M = 2 \text{ (ซึ่งอายุของพวกเขาห่างกัน 2 ปี)}$$

$$M = B - 2 \text{ (ซึ่งอายุของมาริสสา น้อยกว่าบ๊อบ 2 ปี)}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าการแทนที่ด้วยการใช้พีชคณิตจะสามารถหาคำตอบของสมการได้ถูกต้องกว่าตลอดทั้งสามหาความสัมพันธ์ของตัวเลขจำนวนเยอะได้ถูกต้องอีกด้วย ดังนั้นระหว่าง B และ M เรียกว่าการสมมูล การสมมูลจะกำหนดมาให้สามารถใช้ได้ง่ายกว่าในพีชคณิตและอธิบายให้ได้ง่ายกว่าโดยการใช้ภาษามาแทนตัวเลขจำนวนนั้น

2.4.1 ความหมายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของ Usiskin

Usiskin (2001, pp.15-22) ให้ความหมายของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นความสามารถในการเรียนรู้ที่ทำให้นักเรียนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในเรื่องการแก้สมการ และ โจทย์ปัญหาสมการ อย่างลึกซึ้ง จนเกิดความเข้าใจในทักษะและกระบวนการ การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน และสามารถนำเสนอคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งทำให้นำไปสู่ความคิดสร้างสรรค์ในระดับสูง การสร้างกระบวนการ การพิสูจน์ การค้นพบ การนำไปใช้และการพัฒนาการนำเสนอใหม่ ๆ

2.4.2 ลักษณะของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของ Usiskin

Usiskin (2002, p.1) มีความเห็นว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์นั้น ไม่ได้ขึ้นอยู่กับตัวเป็นตนแต่ มันมีอยู่และสัมพันธ์กับสิ่งที่เรารู้ หากเราเข้าใจเรื่องใดและสามารถแสดงให้คนอื่นทราบได้ว่าเรารู้ ในเรื่องนั้น คนเหล่านั้นก็จะเข้าใจเรื่องนั้นด้วย ในทางตรงกันข้ามหากเรารู้สิ่งที่คนอื่นไม่รู้ เราสามารถบอกได้ว่าพวกเขายังไม่เข้าใจอย่างแท้จริง มิติของความเข้าใจที่ได้เสนอไปแล้วนั้นก็เพื่อให้เห็นว่าแนวคิดในเรื่องความเข้าใจนี้มีหลากหลายและขึ้นอยู่กับความเข้าใจของคนที่มีอาชีพต่างกัน และเราก็ไม่สามารถสอนผู้เรียนให้เกิดความเข้าใจที่แท้จริงได้ เพราะว่ามันไม่มี อย่างไรก็ตามไม่ว่าจะเป็นการศึกษาคณิตศาสตร์ในสมัยก่อนหรือสมัยนี้ เรายังจำเป็นที่จะต้องสอนคณิตศาสตร์เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ

2.4.3 ประเภทของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของ Usiskin

Usiskin (2001, pp.15-22) ได้แบ่งความเข้าใจที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เป็น 4 ลักษณะดังนี้

1. ความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (Skill – Algorithm Understanding) หรือที่เรียกว่าความเข้าใจด้านทักษะ เช่น ความเข้าใจเกี่ยวกับทักษะการคูณเศษส่วน นักเรียนจะแสดงความเข้าใจประเภทนี้เมื่อได้ลงมือทำงาน ความเข้าใจด้านนี้ประกอบด้วย

1.1 ความชำนาญในการตัดสินใจ การคิดในรูปแบบที่ง่ายกว่าการคิดในรูปแบบเดิม หรือใช้วิธีการที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาที่คล้ายคลึงกัน

1.2 ความสามารถในการตรวจสอบขั้นตอนวิธีการ หรือกระบวนการที่นำมาซึ่งผลลัพธ์

1.3 การสร้างขั้นตอนวิธีการหรือกระบวนการใหม่สำหรับการหาคำตอบ

2. ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติคณิตศาสตร์ (Properties - Mathematical Understanding) เป็นความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติที่เป็นโครงสร้างพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เป็นความเข้าใจแสดงถึงรูปแบบทั่วไปของสิ่งที่นักเรียนเผชิญ สื่อได้ด้วยภาษาที่ถูกต้อง เช่น การสอนในชั้นเรียนเรื่อง การคูณเศษส่วน การที่ครูใช้คำว่า “ตัดทิ้ง” และ “ตัดตอน” บ่งบอกว่าครูไม่ได้ส่งเสริมความเข้าใจ แต่ถ้าครูใช้ “การคูณจำนวนใด ๆ กับหนึ่ง” และ “เลือกเศษส่วนที่มีค่าเท่าเดิม” ได้ถ่ายทอดความเข้าใจให้กับนักเรียน งานที่แสดงถึงความเข้าใจสมบัติคณิตศาสตร์นี้ได้แก่

2.1 งานระดับล่าง เช่น การระบุสมบัติทางคณิตศาสตร์

2.2 งานระดับกลาง เช่น การอธิบายความสำคัญของสมบัติ

2.3 งานระดับสูง เช่น การเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

3. ความเข้าใจเกี่ยวกับการนำไปใช้ (Use - Application Understanding) ซึ่งเป็นความเข้าใจที่แท้จริง เพราะนักเรียนจะต้องนำความรู้ที่มีอยู่ไปใช้อย่างสมเหตุสมผล นักเรียนต้องรู้ว่าเมื่อใดควรใช้คณิตศาสตร์ ใช้อะไร และใช้อย่างไร ความเข้าใจลักษณะนี้รวมการใช้งานของคณิตศาสตร์ทุกประเภท

4. ความเข้าใจในการนำเสนอ (Understanding through Representation) นักเรียนที่มีความเข้าใจต้องสามารถนำเสนอสิ่งที่ตนเข้าใจให้ผู้อื่นทราบด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งหรือหลายวิธีโดยจะใช้สื่อ วัสดุอุปกรณ์ประกอบการนำเสนอ ซึ่งอาจจะนำเสนอในรูปแบบที่เป็นรูปธรรมหรือนามธรรมก็ได้ ทั้งนี้จะเน้นที่ความสามารถในการถ่ายทอดสิ่งที่ตนเข้าใจผู้อื่นได้เข้าใจด้วย

2.4.4 แนวทางการวัดและประเมินผลความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Usiskin

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Usiskin โดยใช้แบบวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เป็นเครื่องมือในการวิจัย ซึ่งพัฒนามาจากแนวคิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของ Usiskin มีการกำหนดเกณฑ์การประเมินแบบรูปรีค (NCTM, 2000, pp.60-63) โดยมีรายละเอียด ดังแสดงตารางในที่ 2.2 และตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.2

เกณฑ์การให้คะแนนรายชื่อของแบบทดสอบ ของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยใช้แนวคิดของ Usiskin

| คะแนน | ความเข้าใจทางทางคณิตศาสตร์ โดยใช้แนวคิดของ Usiskin |
|---------|--|
| 1คะแนน | ไม่นำเสนอ หรือ ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ถูกต้องบางส่วน หรือ นำเสนอเป็นไม่เป็นลำดับขั้นตอน ไม่ชัดเจน และขาดรายละเอียด |
| 2 คะแนน | ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ถูกต้องบางส่วน หรือ นำเสนอเป็นลำดับขั้นตอน ขาดความชัดเจน และขาดรายละเอียด |
| 3คะแนน | ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ถูกต้องเป็นส่วนมาก หรือ นำเสนอเป็นลำดับขั้นตอน ถูกต้อง ชัดเจน ขาดรายละเอียดที่สมบูรณ์ |
| 4คะแนน | ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ถูกต้อง หรือ นำเสนอเป็นลำดับขั้นตอน ถูกต้อง ชัดเจน มีรายละเอียดที่สมบูรณ์ |

ตารางที่ 2.3

เกณฑ์การแปลความหมายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ใช้แนวคิดของ *Usiskin*

| ลักษณะความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยใช้แนวคิดของ Usiskin | คะแนน | คำอธิบาย |
|---|-------|---|
| ลักษณะที่ 1 ความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ | 1-6 | นักเรียนไม่มีความเข้าใจในการสร้างขั้นตอนหรือวิธีการหรือกระบวนการสำหรับการหาคำตอบ |
| | 7-12 | นักเรียนมีความเข้าใจในการสร้างขั้นตอนหรือวิธีการหรือกระบวนการสำหรับการหาคำตอบ |
| ลักษณะที่ 2 ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติคณิตศาสตร์ | 1-6 | นักเรียนไม่มีความเข้าใจในการระบุสมบัติทางคณิตศาสตร์, การอธิบายความสำคัญของสมบัติ และการเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ |
| | 7-12 | นักเรียนมีความเข้าใจในการระบุสมบัติทางคณิตศาสตร์, การอธิบายความสำคัญของสมบัติ และการเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ |
| ลักษณะที่ 3 ความเข้าใจเกี่ยวกับการนำไปใช้ | 1-6 | นักเรียนไม่สามารถนำความรู้ที่มีอยู่ไปใช้อย่างสมเหตุสมผล ความเข้าใจลักษณะนี้รวมการใช้งานของคณิตศาสตร์ประเภทตั้งแต่ในห้องเรียนจนถึงในชีวิตจริง |
| | 7-12 | นักเรียนสามารถนำความรู้ที่มีอยู่ไปใช้อย่างสมเหตุสมผล ความเข้าใจลักษณะนี้รวมการใช้งานของคณิตศาสตร์ประเภทตั้งแต่ในห้องเรียนจนถึงในชีวิตจริง |
| ลักษณะที่ 4 ความเข้าใจในการนำเสนอ | 1-6 | นักเรียนไม่สามารถนำสิ่งที่ตนเข้าใจให้ผู้อื่นทราบด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งหรือหลายวิธี โดยจะใช้สื่อวัสดุอุปกรณ์ประกอบการนำเสนอในรูปแบบที่เป็นรูปธรรมหรือนามธรรมก็ได้ |
| | 7-12 | นักเรียนสามารถนำสิ่งที่ตนเข้าใจให้ผู้อื่นทราบด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งหรือหลายวิธี โดยจะใช้สื่อวัสดุอุปกรณ์ประกอบการนำเสนอในรูปแบบที่เป็นรูปธรรมหรือนามธรรมก็ได้ |

หมายเหตุ เกณฑ์การพิจารณาของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยใช้ใช้แนวคิดของ Usiskin

1-6 คะแนนหมายถึง มีความไม่เข้าใจทางคณิตศาสตร์

7-12 คะแนนหมายถึง มีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

2.5 แบบทดสอบ

แบบทดสอบเป็นเครื่องมือชนิดหนึ่งที่ใช้สำหรับวัดความรู้ทางด้านพุทธิพิสัย ของนักเรียน ว่านักเรียนได้ความรู้อะไรบ้างจากการเรียนรู้ของตนเอง ซึ่งแบบทดสอบจะแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ แบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้น และแบบทดสอบมาตรฐาน โดยแบบทดสอบที่ดีนั้น จะต้องผ่านการวิเคราะห์หาค่าความเชื่อมั่น ประสิทธิภาพ ความยาก อำนาจจำแนก ฯลฯ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้กล่าวถึงแบบทดสอบแบบอัตนัย ในหัวข้อที่สำคัญ ดังนี้

2.5.1 ความหมายของแบบทดสอบอัตนัย

มีนักวิชาการหลายท่านได้ให้ความหมายของแบบทดสอบอัตนัยไว้หลายทัศนะ ดังนี้

ชาญชัย ยมดิษฐ์ (2548, น.34-38) กล่าวว่า แบบทดสอบแบบอัตนัยเป็นแบบทดสอบที่ให้ผู้ตอบได้แสดงความคิดเห็น เหมาะสำหรับการวัดความรู้ขั้นสูงกว่าความจำและความเข้าใจ

Mehrens and Lehmann (1969, pp.206-227) กล่าวถึงแบบทดสอบอัตนัยว่ามีลักษณะของคำถามที่แตกต่างจากคำถามชนิดอื่น ดังนี้

1. ไม่มีคำตอบเพียงคำตอบเดียวที่สมบูรณ์และถูกต้อง
2. ผู้สอบได้ตอบอย่างอิสระ
3. คุณภาพของคำตอบมีระดับต่างกัน

Hopkins and Antes (1990, pp.231-232) ได้เสนอรูปแบบของแบบทดสอบอัตนัยว่า ข้อสอบประเภทนี้ต้องการคำตอบที่เป็นประโยชน์หลายประโยชน์ต่อกัน ซึ่งแสดงความสมเหตุสมผล ผู้ตรวจความถูกต้องและคุณภาพของข้อสอบแบบนี้ ต้องเป็นผู้ที่มีความรู้ในวิชาที่สอบ

สรุปได้ว่า แบบทดสอบอัตนัย คือ แบบทดสอบที่ให้ผู้ตอบได้แสดงความคิดเห็น แสดงสถานการณ์ปัญหาต่าง ๆ โดยเหมาะสำหรับการวัดความรู้ขั้นสูงกว่าความจำและความเข้าใจ ไม่มีข้อจำกัดในการเขียนคำตอบ

2.5.2 ประเภทของแบบทดสอบอัตนัย

มีนักการศึกษาหลายท่านได้แบ่งประเภทของแบบทดสอบอัตนัย ไว้ดังนี้

ชาลซ์ ยมคิชู้ (2548, น.34-38) กล่าวว่า ข้อสอบแบบอัตนัยแบ่งเป็น 2 แบบคือ แบบไม่จำกัดคำตอบ (Extended Response) และแบบจำกัดคำตอบ (Restricted Response) ซึ่งขึ้นอยู่กับ การให้อิสระแก่นักเรียนในการตอบ จากการศึกษาพบว่าเด็กระดับประถมศึกษาเขียนตอบแบบ กำหนดโครงสร้างให้ตอบได้ดี ส่วนนักเรียนในระดับสูงเขียนตอบแบบไม่กำหนดโครงสร้างให้ ตอบได้ดี

1. แบบไม่จำกัดคำตอบ (Extended Response) ข้อสอบแบบอัตนัยแบบไม่จำกัด คำตอบนี้ให้อิสระแก่นักเรียนอย่างเต็มที่ ในการอภิปรายแสดงความคิดเห็นและรวบรวมข้อมูล ที่จริงต่าง ๆ มาใช้ในการสอน โดยทั่วไปข้อสอบแบบนี้จะให้นักเรียนแสดงความสามารถ ซึ่งจำเป็นต้องอาศัย การสังเคราะห์และการประเมินผล ข้อสอบนี้นับว่าคุณค่าอย่างยิ่งในการวัด ขบวนการทางสมองที่สูงขึ้นตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ระลึกถึงความรู้ที่เรียนไป เช่น จงอธิบายทฤษฎีกำเนิดชนชาติไทยมา 1 ทฤษฎี จงอธิบายเกี่ยวกับการสอนแบบบรรยากาศกับการสอนแบบสืบสวน โดยให้บอกถึงหลัก สำคัญที่ใช้ในการสอนแต่ละวิธี และข้อดี – ข้อเสีย ของการสอนทั้งสองแบบ

ขั้นที่ 2 ประเมินค่าความรู้ที่จำได้ เช่น จงเปรียบเทียบข้อดี – ข้อเสียของการ ประเมินผลแบบอิงเกณฑ์และแบบอิงกลุ่มมาอย่างละเอียด เพราะเหตุใดเอ็ดสันจึงได้รับการยกย่อง เป็นอย่างมากจากการทดลองเรื่องอากาศมีไอน้ำ

ขั้นที่ 3 รวบรวมความรู้และความคิดให้เป็นระบบ เช่น จงกล่าวถึงความ คล้ายคลึงกันในการที่สหรัฐอเมริกาเข้าไปมีส่วนพัวพันกับความขัดแย้งในประเทศเกาหลีและ เวียดนามมา 3 ประเภท

ขั้นที่ 4 แสดงความคิดเห็นออกมาอย่างมีเหตุผล เช่น จงเปรียบเทียบและอธิบาย เหตุผลการปกครองระบอบประชาธิปไตยของอังกฤษกับสหรัฐอเมริกา

ข้อเสียของข้อสอบประเภทนี้คือ มีความเชื่อมั่นค่อนข้างต่ำ แต่มีข้อดีคือ นักเรียนมีโอกาสแสดงความคิดเห็นได้อย่างเสรี

2. แบบจำกัดคำตอบ (Restricted Response) ข้อสอบแบบนี้มักจะกำหนดขอบเขต แบบฟอร์มและเนื้อหาที่เฉพาะให้นักเรียนไม่มีอิสระในการตอบมากนัก แบบทดสอบนี้ให้ตอบสั้น กว่าแบบแรก คำตอบอยู่ภายในขอบเขตที่กำหนดไว้ในวงจำกัด โดยทั่วไปแล้วจะกำหนดขอบข่าย และความยาวในการตอบไว้ด้วย ตัวอย่างเช่น ลักษณะภูมิอากาศ การปกครอง อาชีพของพลเมือง

จงอธิบายสาเหตุของการเกิดสงครามโลกครั้งที่ 2 มา 3 ประการ จงยกตัวอย่างการกระทำที่แสดงถึงความรักชาติมา 5 ข้อ

Mehrens and Lehmann (1969,pp.206-277) กล่าวถึงแบบทดสอบ โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ตามลักษณะของควมมีอิสระในการตอบดังนี้

1. แบบตอบขยาย (Extended Response) หรือแบบไม่จำกัดคำตอบ (Unrestricted Response) ข้อสอบแบบนี้จะถามความรู้ความสามารถต่าง ๆ โดยให้อิสระในการตอบแก่นักเรียน หรือผู้สอบมาก เปิดโอกาสให้เขียนแสดงความคิดเห็น อธิบาย อภิปรายได้อย่างเต็มที่ทุกแง่มุม ตามที่ต้องการไม่จำกัด ลักษณะคำถามจึงกว้างขวาง เหมาะกับการวัดความสามารถด้านความคิด ริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะคิด และการประเมินค่า (Evaluation) เพราะข้อสอบแบบนี้ส่งเสริมให้นักเรียน รู้จักรวบรวมความคิดต่าง ๆ การประเมินคุณค่าของสิ่งเหล่านั้นและการใช้วิธีการต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา ด้วยเหตุผลนี้ ปริมาณคำตอบของข้อสอบแบบนี้จึงขึ้นอยู่กับคำถามและความรู้ที่สั่งสมไว้ว่ามีมากน้อยเพียงใด ประกอบกับความสามารถในการจัดระบบการตอบ และความสามารถในการใช้ภาษาของนักเรียนแต่ละคนเป็นสำคัญ จุดอ่อนของการถามแบบนี้อยู่ที่ การให้คะแนน เพราะยากที่จะหาเกณฑ์ในการให้คะแนนที่ถูกต้องเที่ยงตรงได้ คำถามที่ใช้มักจะเป็นคำถามประเภท “จงอภิปราย , เปรียบเทียบ , แสดงความคิดเห็น” เป็นต้น

2. แบบทดสอบจำกัด (Restricted Response หรือ Short – Essay Item) ข้อสอบนี้สามารถจุดจุดอ่อนของคำถามแบบแรกได้ ทั้งนี้เนื่องจากข้อสอบแบบขยายคำตอบเป็นแบบทดสอบที่ให้อิสระในการตอบโดยไม่จำกัด ทำให้ได้คำตอบที่แตกต่างกันมาก จึงมักมีปัญหาในการตรวจคะแนน โดยเฉพาะในแง่ของการเปรียบเทียบกันในกลุ่ม ข้อสอบแบบนี้จึงถามแบบเจาะจง ผู้เขียนข้อจะกำหนดขอบเขต ลักษณะการตอบตลอดจนเนื้อหา ทิศทางการตอบและความยาวในการตอบไว้ด้วยคำตอบจึงสั้นและอยู่ภายใต้ขอบเขตที่กำหนดไว้ ผู้ตอบต้องจัดเรียงเรียงความคิดเห็นให้เป็นระเบียบแล้วตอบให้ตรงประเด็นของคำถามเพียงสั้น ๆ โดยไม่มีโอกาสอภิปรายแสดงความคิดเห็น นอกเหนือที่กำหนดไว้ให้ ข้อสอบแบบนี้จึงมีความสะดวกในการให้คะแนนมากกว่าแบบแรก เพราะมีเกณฑ์ต่าง ๆ ที่จะตัดสินใจให้คะแนนมากขึ้น ผู้เขียนข้อสอบจึงจำเป็นต้องระมัดระวังในเรื่องคำสั่ง โจทย์ ขอบเขตเนื้อหา และเวลาที่กำหนดให้นักเรียนตอบคำถามที่ใช้มักอยู่ในรูป “จงนิยาม, ตอบสั้น ๆ, อธิบายสั้น ๆ” อย่างไรก็ตาม ข้อสอบแบบนี้ให้ออกสแก่นักเรียนน้อยมากในการแสดงความสามารถเกี่ยวกับการจัด การรวบรวม การแสดงความคิดเห็น และการจัดหาสิ่งต่าง ๆ ที่จำเป็นเกี่ยวกับการตอบ จึงมีประโยชน์สำหรับการวัดผลการเรียนรู้ระดับความเข้าใจ การนำไปใช้ และการวิเคราะห์แต่จะมีคุณค่าน้อยมากถ้าจะนำไปใช้ในระดับการสังเคราะห์และการประเมินค่า

Hopkins and Antes (1990, pp.231-232) แบ่งประเภทของแบบทดสอบอัตนัยออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

1. แบบที่มีขอบเขตกว้างแต่ใช้เวลาจำกัด (Extended-Response) ข้อสอบลักษณะนี้จะทดสอบทักษะของผู้เขียนในการเลือกว่าเขียนอะไรและจะเขียนมากน้อยแค่ไหนในแต่ละส่วน รวมทั้งความสามารถในการจัดระเบียบและแสดงความคิดในเชิงตรรกะ ข้อสอบเขียนบรรยายแบบขยายความนี้เป็นข้อสอบประเภทปลายเปิด (Open-Ended) และไม่ได้จำกัดความคิดของนักเรียน ข้อสอบแบบนี้มีประโยชน์ในการประเมินการเขียน โดยเฉพาะศิลปะเกี่ยวกับการใช้ภาษา

2. แบบจำกัดคำตอบ (Limited-Response) จะมีขอบเขตกว้างหรือแคบก็ได้ แต่นักเรียนควรจะรู้อย่างแน่ชัดว่าขีดจำกัดนั้นคืออะไร ข้อสอบนี้จะให้ขีดจำกัดที่ระบุได้อย่างชัดเจน เพื่อสร้างขอบเขตในการตอบให้นักเรียน กล่าวคือนักเรียนต้องตอบในกรอบเนื้อหา ที่จำกัดข้อสอบแบบนี้มีประโยชน์ต่อครูผู้สอนที่ต้องการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งต่างจากแบบทดสอบอัตนัยแบบที่มีขอบเขตกว้างที่ต้องการ วัดด้านทักษะการเขียนผู้สอบควรพิจารณาถึงจุดมุ่งหมายในการวัดผลก่อนตัดสินใจเลือกว่าจะใช้รูปแบบใด

สรุปได้ว่า ประเภทของแบบทดสอบอัตนัยมี 2 ประเภท คือ แบบขยายเป็นการทดสอบให้ผู้เขียนตอบได้อย่างอิสระสามารถอภิปรายได้อย่างไม่จำกัด และแบบจำกัดคำตอบเป็นการระบุอย่างชัดเจนหรือสร้างขอบเขตในการตอบของนักเรียน

2.5.3 หลักสำคัญในการสร้างข้อคำถามแบบอัตนัย

แบบทดสอบอัตนัย เป็นแบบทดสอบที่กำหนดปัญหาหรือเรื่องราวให้ โดยให้ผู้ตอบ อธิบายหรือบรรยายแสดงความคิดเห็น หรือวิพากษ์วิจารณ์อย่างอิสระในเวลาที่กำหนดให้ ในการสร้างข้อคำถามแบบอัตนัยต้องพิจารณาหลายสิ่งอย่างเพื่อตรงตามจุดประสงค์ เนื้อหา และการวัดประเมินผลให้สอดคล้องกันทั้งระบบ โดยมีหลักสำคัญในการสร้างข้อคำถามดังต่อไปนี้

1. ต้องดูจุดประสงค์ของการสอบก่อน แล้วจึงเขียนข้อคำถาม เพื่อให้ตรงจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัด
2. ควรใช้คำถามที่มีความกระชับ ด้วยหลักการถามและหลักภาษา
3. คำถามหนึ่ง ๆ ควรเป็นเรื่องเดียว เพื่อให้ผู้ตอบตอบได้ตรงเป้าหมายที่ผู้ถามต้องการ
4. คำถามควรคำนึงถึงเวลาที่ให้ผู้ตอบทำการตอบ
5. คำถามทุกคำถามผู้สอบควรทำเฉลยไว้ และวางแผนการให้คะแนนแต่ละส่วนว่าเป็นเท่าไร เพื่อเปรียบเทียบ นอกจากนั้นต้องพิจารณาคำตอบที่มีโอกาสเป็นไปได้ที่ไม่จำเป็นจะต้องตรงกับเฉลยทุกตัว แต่ก็จะต้องถูกสามารถได้คะแนนได้ด้วยลักษณะของแบบทดสอบอัตนัย

2.5.4 การตรวจให้คะแนนแบบทดสอบอัตนัย

นักวัดผลการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายและวิธีการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบอัตนัย วิเคราะห์ย่อย และวิธีประเมินรวมไว้มากมาย เช่น

เยาดี วิบูลย์ศรี (2545, น.132-138) การสร้างข้อสอบแบบอัตนัยวัดความสามารถของนักเรียนมิได้จับสั้นลงเพียงนำข้อสอบไปทดสอบนักเรียนเท่านั้น แต่ยังนำเอากระดาษคำตอบมาตรวจให้คะแนนตามวิธีการตรวจที่มีระบบ เพื่อให้คะแนนที่ได้มีความเที่ยงตรง และเชื่อถือได้ หลังจากเราพอใจกับคำถามหรือข้อสอบซึ่งสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของการสอนและแบบทดสอบที่สร้างอย่างดีแล้ว งานถัดไป คือการตรวจให้คะแนนกระดาษคำตอบของนักเรียน ปัญหาในขั้นนี้คือ จะตรวจกระดาษคำตอบของนักเรียนด้วยวิธีการอย่างไร

1. กำจัดความลำเอียงลงไปให้น้อยที่สุด
2. สนใจแต่เฉพาะคำตอบที่สำคัญและเกี่ยวข้องกับคำถามเท่านั้น
3. ระวังอิทธิพลอันเกิดจากความคิดเห็นส่วนตัวเข้าไปมีส่วนเกี่ยวข้องกับการให้

คะแนน

4. นำวิธีการที่เป็นมาตรฐานให้การตรวจเป็นไปอย่างเสมอต้นเสมอปลายแก่นักเรียนทุกคน สำหรับการตรวจที่จะทำให้เกิดความยุติธรรมเป็นไปอย่างคงเส้นคงวาเป็นปัญหาที่สำคัญของการตรวจข้อสอบแบบนี้ ถ้าหากการตรวจขาดความคงเส้นคงวา เราก็ไม่สามารถนำคะแนนมาเปรียบเทียบกันได้ มีวิธีการตรวจสอบแบบอัตนัยที่นิยมใช้กันมากที่สุด ในปัจจุบันมี 2 วิธีคือ

4.1 การตรวจแบบวิธีเทียบเกณฑ์ (Analytical Method หรือ Point Method) การตรวจข้อสอบอัตนัย โดยวิธีเทียบเกณฑ์นั้น ครูต้องกำหนดแนวการตอบไว้ก่อนโดยแยกแนวคำตอบออกเป็นตอนย่อย ๆ ตามความสำคัญ ฉะนั้น ในการตรวจให้คะแนนโดยวิธีนี้ ผู้ตรวจจะต้องกำหนดรายละเอียดของคำตอบไว้ก่อนที่จะทำการตรวจในการตรวจให้คะแนนผู้ตรวจจะนำเอากระดาษมาเทียบกับเกณฑ์ หรือแนวคำตอบที่ได้กำหนดแนวทางคำตอบนั้นครูผู้ออกข้อสอบควรจะทำไว้พร้อม ๆ กับการเขียนข้อคำถามเลย ไม่ควรจะมากำหนดแนวการตอบเมื่อจะเริ่มตรวจการให้คะแนนแบบนี้เหมาะสมสำหรับข้อสอบแบบกำหนดขอบเขตของการตอบ มากกว่าแบบไม่กำหนดขอบเขตของการตอบ

4.2 การตรวจโดยวิธีจัดอันดับคุณภาพการตรวจข้อสอบอัตนัยโดยวิธีจัดอันดับคุณภาพนั้น ผู้ตรวจจะอ่านกระดาษคำตอบของผู้เข้าสอบทุกคนเสียก่อนทีละข้อ แล้วจึงนำคำตอบนั้นมาจัดเป็นกลุ่ม ๆ ตามความสามารถ เช่น กลุ่มดีมาก ดี ปานกลาง พอใช้ หรือใช้ไม่ได้ แล้วจึงตรวจคุณภาพของคำตอบในแต่ละกลุ่มอีกที เช่น ในกลุ่มตอบดีมากนั้น ต้องพิจารณากันอีกทีว่า

ใครตอบดีกว่ากัน ให้เรียงอันดับของกระดาษคำตอบให้ติดต่อกันไป แล้ว จึงให้คะแนน ใครอยู่ อันดับแรกก็ได้คะแนนสูงสุดลดน้อยลงไปตามลำดับ การตรวจแบบนี้จะทำให้คะแนนมีความ เชื่อมั่นมากยิ่งขึ้น

Ebel (1972, pp.149-152) ได้ให้ข้อเสนอแนะสำหรับการตรวจให้คะแนนไว้ 2 รูปแบบ คือ การให้คะแนนด้วยวิธีวิเคราะห์ และวิธีประเมินคุณภาพโดยรวม (Analytic Scoring or Global-quality Scaling)

1. วิธีวิเคราะห์ วิธีนี้ส่วนประกอบที่สำคัญต่าง ๆ ของคำตอบจะเป็นตัว กำหนดการให้คะแนนมากน้อยอย่างอิสระ การพิจารณาจะพิจารณาทั้งส่วนประกอบที่สำคัญของ คำตอบ และความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบเหล่านั้นด้วยว่าเป็นองค์ประกอบเดียวกันของ คำตอบหรือไม่ แต่ถ้าความสัมพันธ์นั้นซับซ้อนและเข้าใจยากวิธีการเทียบเกณฑ์ก็อาจจะทำได้ไม่ สะดวกและใช้เวลานาน

2. วิธีประเมินคุณภาพโดยรวม วิธีนี้ผู้ตรวจให้คะแนนจะอ่านคำตอบโดยรวมและ พิจารณาความประทับใจ แล้วจึงเปลี่ยนความประทับใจนั้นเป็นระดับคะแนนบันทึกไว้ทำแบบนี้ ทุก ๆ ข้อ วิธีการที่ดีกว่า เพื่อควบคุมความสม่ำเสมอ หรือมาตรฐานในการตรวจกระดาษคำตอบที่ ต่างกัน คือ การแบ่งกลุ่มคำตอบเป็นคล้าย ๆ กัน เมื่อแบ่งกลุ่มแล้ว ผู้ตรวจให้คะแนนจึงมาพิจารณา ตัดสินใจใหม่อีกครั้งว่าแต่ละกองเหมาะสมหรือยัง

ผู้ให้คะแนนจำกัดขนาดของแต่ละกองไว้ล่วงหน้าและพยายามแบ่งให้มีการแจก แจงใกล้เคียงกับที่กำหนดไว้ใน การแบ่งกลุ่มนั้นอาจแบ่งได้ดังนี้

1. แบ่งเป็น 3 กอง

| ระดับต่ำ | ระดับปานกลาง | | ระดับสูง | |
|-----------|--------------|---------|----------|-----------|
| 25% | 50% | | 25% | |
| ต่ำที่สุด | ต่ำกว่า | ปานกลาง | สูงกว่า | สูงที่สุด |
| 5% | 25% | 40% | 25% | 5% |

2. ตรวจให้คะแนนคำตอบแบบคำถามต่อคำถาม มากกว่า คนต่อคน

3. ถ้าเป็นไปได้ ควรปิดบังชื่อของนักเรียนที่ทำข้อสอบไม่ให้ผู้ตรวจให้คะแนน

ทราบ

4. ถ้าเป็นไปได้ ควรจัดให้มีการตรวจให้คะแนนอย่างอิสระ

Meherns and Lehmann (1973, pp.229-238) ได้อธิบายถึงการตรวจให้คะแนนด้วยวิธี ประเมินรวม (Holistic Method) ว่าวิธีนี้คำตอบจะไม่ถูกแบ่งออกเป็น ส่วน ๆ แต่ผู้ตรวจจะอ่านอย่าง รวดเร็วแล้วใช้ความประทับใจและใช้มาตรฐานบางอย่างกำหนดระดับของคำตอบ การตรวจคำตอบ

จะขึ้นอยู่กับระดับของการแบ่ง อาจแบ่งข้อสอบเป็น 2 กลุ่ม คือ “กลุ่มที่ยอมรับได้ – กลุ่มที่ยอมรับไม่ได้” หรือ 5 กลุ่ม คือ “ดีมากจนถึงต่ำกว่ามาตรฐาน” โดยมากจะแบ่งประมาณ 4 หรือ 5 กลุ่ม และอธิบายถึงการตรวจโดยวิธีวิเคราะห์ย่อย (Analytic Method) ว่าการให้คะแนนวิธีวิเคราะห์เป็นวิธีที่มีรูปแบบคำตอบประกอบด้วยประเด็นเฉพาะที่กำหนดไว้ก่อนแล้ว คะแนนของนักเรียนที่ได้จะขึ้นอยู่กับจำนวนประเด็นที่เขาตอบ รวมไปถึงส่วนอื่น ๆ เช่น แสดงความคิดเห็นได้ชัดเจน การให้เหตุผล และการยกตัวอย่างสนับสนุนในประเด็นคำตอบ และการกำหนดคะแนนในแต่ละประเด็นจะขึ้นอยู่กับเวลาที่ใช้ในการตอบ ความซับซ้อนของคำถาม และเนื้อหาที่ครูสอน

Whitney and Sabers (1976, p.5) ได้เสนอการตรวจให้คะแนนข้อสอบแบบอัตนัยจำนวน 2 วิธี คือวิธีเทียบกับเกณฑ์กับวิธีจัดอันดับคุณภาพ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. การตรวจสอบโดยวิธีเทียบกับเกณฑ์ (Analytic Method หรือ Point Method) การตรวจให้คะแนนวิธีนี้ครูจะต้องกำหนดแนวการตอบไว้ล่วงหน้า โดยแยกแนวคำตอบออกเป็นตอนย่อย ๆ ตามองค์ประกอบของการตอบ เช่น การจัดเรียงความคิด หลักฐาน ที่ยกมาอ้าง ตัวอย่างประกอบ เป็นต้น จากนั้นก็กำหนดคะแนนเต็มของแต่ละตอนย่อย เมื่อครูอ่านข้อสอบของนักเรียนก็จะให้คะแนนแต่ละตอนย่อย ๆ มารวมกันเป็นคะแนนที่ได้รับทั้งข้อ

2. การตรวจโดยวิธีการจัดอันดับคุณภาพ (Rating Method หรือ Holistic Method หรือ Scoring Method หรือ Global Scoring) การตรวจให้คะแนนวิธีนี้ ครูจะอ่านคำตอบของนักเรียนทีละคน เมื่ออ่านกระดาษคำตอบแล้วก็จะแยกกระดาษคำตอบเป็นกลุ่มหรือเป็นกอง ตามระดับคุณภาพของการตอบ เช่น แยกกระดาษคำตอบออกเป็น 5 กอง ดังเช่น ดีมาก ดี พอใช้ เกือบพอใช้ อ่อน เมื่อครูอ่านกระดาษคำตอบแล้วก็จะจัดกองใดกองหนึ่งในห้ากองนี้หลังจากนั้นครูก็จะพิจารณากระดาษในแต่ละกอง โดยพิจารณาว่าใครตอบดีกว่ากัน แล้วเรียงกระดาษคำตอบตามลำดับของคุณภาพ แล้วให้คะแนนตามลำดับของคุณภาพอีกทีหนึ่ง

Wiersma and Jurs(1985, pp.175-177) กล่าวว่า การให้คะแนนแบบทดสอบอัตนัยว่าเป็นแบบทดสอบที่มีความเคร่งครัดในการให้เกณฑ์การให้คะแนนอย่างมาก เพราะว่าเป็นการยากที่จะให้คะแนน กล่าวคือ จะมีความเชื่อถือได้ยาก ซึ่งมีจุดสำคัญอยู่ที่กระบวนการให้คะแนนของผู้ตรวจ วิธีการนี้จะช่วยเพิ่มความเป็นปรนัยในการให้คะแนนเพิ่มขึ้น อย่างไรก็ตามต้องอาศัยเวลาที่มากขึ้นในการตรวจ ที่ก่อนจะให้คะแนนครูจะต้องมีวิธีการหรือกำหนดกรอบของคำตอบไว้ล่วงหน้า เรียกว่า โมเดลคำตอบ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นการกำหนดค่าให้ประเด็นสำคัญ ๆ ที่จะทำให้การตรวจแตกต่างกันน้อยที่สุด วิธีการให้คะแนนมี 2 วิธี คือ

1. การให้คะแนนวิธีวิเคราะห์ห้อย (Analytic Scoring) จุดสำคัญของการให้คะแนนคำตอบอยู่ที่การจำแนกและกำหนดขอบเขตของคำตอบเป็นรายละเอียด มีความชัดเจนมาก จึงง่ายต่อการตรวจและมีความเชื่อถือได้

2. การให้คะแนนวิธีการให้คุณภาพโดยรวม หรือวิธีการประเมินรวม (Holistic Scoring) เป็นวิธีที่อาศัยความประทับใจกับคำตอบ คำตอบจะถูกมองในภาพรวมมากกว่าจะแยกออกมาเป็นส่วนย่อย โดยจะแยกกระดาษคำตอบออกเป็น 2 กองหรือมากกว่า เช่น กองดีมาก กองดี กองพอใช้ กองแย่มาก การตรวจจะรวดเร็วและง่ายกว่า แต่ทำให้ไม่มีความเป็นปรนัย มีความเชื่อถือได้น้อย

สรุปได้ว่าการตรวจแบบวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะเป็นแบบทดสอบอัตนัย มีการตรวจให้คะแนนตามวิธีการตรวจที่มีระบบ เพื่อให้คะแนนที่ได้มีความเที่ยงตรง และเชื่อถือได้ จุดสำคัญของการตรวจอยู่ที่กระบวนการให้คะแนนของผู้ตรวจ แบ่งออกเป็น 2 วิธี คือ วิธีเทียบกับเกณฑ์ และ วิธีการจัดอันดับคุณภาพ โดยมีรายละเอียด ดังนี้

1. การตรวจสอบโดยวิธีเทียบกับเกณฑ์การตรวจให้คะแนนวิธีนี้ครูจะต้องกำหนดแนวการตอบไว้ล่วงหน้า โดยแยกแนวคำตอบออกเป็นตอนย่อย ๆ ตามองค์ประกอบของการตอบ

2. การตรวจสอบโดยวิธีการจัดอันดับคุณภาพ การตรวจให้คะแนนวิธีนี้ ครูจะอ่านคำตอบของนักเรียนทีละคน เมื่ออ่านกระดาษคำตอบแล้วก็จะแยกกระดาษคำตอบเป็นกลุ่มหรือเป็นกอง ตามระดับคุณภาพของการตอบ

2.6 แบบสัมภาษณ์

การสัมภาษณ์ (Interview) เป็นการสนทนาหรือการพูดโต้ตอบกันอย่างมีจุดมุ่งหมาย เพื่อค้นหาความรู้ ความจริง ตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้ล่วงหน้า การสัมภาษณ์เป็นวิธีการที่สำคัญวิธีหนึ่งในการรวบรวมข้อมูลเพราะการสัมภาษณ์นอกจากจะทำให้ผู้สัมภาษณ์ ได้ข้อมูลที่ต้องการแล้วยังช่วยให้ทราบข้อเท็จจริงเกี่ยวกับผู้ให้สัมภาษณ์ในด้านบุคลิกภาพอีก และที่สำคัญทำให้ทราบความเข้าใจในการเรียนของนักเรียนอย่างแท้จริง ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. ความหมายของการสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง

กิตติพัฒน์ นนทปัทมะคุณ (2554, น.119-157) กล่าวว่า การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างหรือบางครั้งนิยมเรียกว่า การสัมภาษณ์แบบชี้นำ (Guided Interview) เป็นประเภทที่อยู่ตรงกลางระหว่างการสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้างและการสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง โดยการ

สัมภาษณ์แต่ละประเภทก็มีจุดแข็งจุดอ่อนทั้งสิ้น การสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้างดูหยาบและแข็งกระด้าง ขณะเดียวกันการสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้างยืดหยุ่นและเปิดกว้างมาก ต้องอาศัยนักวิจัยหรือผู้สัมภาษณ์ที่มีประสบการณ์ความชำนาญพอสมควร การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างหรือแบบชี้นำนี้ โดยปกตินักวิจัยจะกำหนดคำถามที่พอจะตัดสินใจได้ว่าจะถามอะไรบ้าง หรือใช้คำสำคัญ (Keywords) เป็นเครื่องชี้นำการสัมภาษณ์ ตัวอย่างเช่น ในการวิจัยเพื่อศึกษาคุณภาพชีวิตของผู้พิการทางสายตาที่เป็นนิพถยานท่าพระจันทร์ นักวิจัยกำหนดคำถามที่ไม่แน่นอนตายตัว แต่เป็นคำถามที่มีคำสำคัญเกี่ยวกับสภาพของสภาพการของผู้มีส่วนร่วมในการวิจัย ประวัติและสาเหตุที่พิการ ประวัติครอบครัว การประกอบอาชีพ การได้รับสวัสดิการจากรัฐ องค์กรของคนพิการ องค์กรเอกชน เป็นต้น นักวิจัยที่ศึกษาเรื่องนี้ค่อนข้างเป็นนักวิจัยมือใหม่ทว่าไม่ได้สร้างแบบสัมภาษณ์ที่มีโครงสร้าง ขณะเดียวกันก็ไม่ได้ใช้การสัมภาษณ์ที่ไม่มีโครงสร้าง นักวิจัยไม่ได้ร่างคำถามที่ชัดเจนแน่นอนในแต่ละประเด็น ทว่าสิ่งที่นักวิจัยดำเนินการก่อนการสัมภาษณ์คือการเตรียมหัวข้อคำถามอย่างหลวม ๆ ในลักษณะกึ่งโครงสร้าง คือการร่างคำถามปลายเปิดที่มีคำสำคัญที่ต้องการ พร้อมกับมีความยืดหยุ่น พร้อมจะปรับเปลี่ยนถ้อยคำให้สอดคล้องกับผู้มีส่วนร่วมในการวิจัยแต่ละคน และสถานการณ์สัมภาษณ์ที่เปลี่ยนแปลงไป

สรุปได้ว่า การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างหรือแบบชี้นำจึงเป็นประโยชน์อย่างมากสำหรับนักวิจัยที่ต้องการเปรียบเทียบข้อมูลจากผู้มีส่วนร่วมในการวิจัยหลาย ๆ คน พร้อมกับต้องการความเข้าใจลึกซึ้งใน โลกและประสบการณ์ของแต่ละคน การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างเป็นการจุดจุดอ่อนของการสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้างและแบบไม่มีโครงสร้าง การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างหรือแบบชี้นำจึงเป็นที่นิยมในหมู่นักวิจัยเชิงคุณภาพไม่น้อยไปกว่าการสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง ส่วนการสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้างน่าจะเหมาะกับการเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยเชิงปริมาณมากกว่าในการวิจัยเชิงคุณภาพ

2. ส่วนประกอบของแบบสัมภาษณ์

แบบสัมภาษณ์โดยทั่วไป จะประกอบไปด้วยส่วนที่สำคัญ 3 ส่วน คือ

1. ส่วนแรก เป็นส่วนที่ใช้บันทึกข้อมูลเกี่ยวกับการสัมภาษณ์ เช่น ชื่อ โครงการวิจัย วัน เดือน ปี ที่สัมภาษณ์ ชื่อหมู่บ้าน ตำบล อำเภอ จังหวัด ฯลฯ ในส่วนนี้ ผู้สัมภาษณ์ควรกรอกไว้ล่วงหน้า

2. ส่วนที่สอง เป็นส่วนที่ใช้บันทึกรายละเอียดส่วนตัวของผู้ให้สัมภาษณ์ เช่น เพศ อายุ อาชีพ ศาสนา สถานภาพสมรส จำนวนบุตร ฯลฯ

3. ส่วนที่สาม เป็นส่วนที่เป็นข้อความ และที่จะเป็นคำตอบตามจุดมุ่งหมายของการสัมภาษณ์

3. หลักในการสัมภาษณ์

เพื่อให้การรวบรวมข้อมูลโดยการสัมภาษณ์ดำเนินไปได้อย่างดี ได้ข้อมูล ที่ถูกต้อง
เที่ยงตรง ควรมีหลักดังนี้

1. การเตรียมตัวก่อนไปสัมภาษณ์

ผู้สัมภาษณ์ต้องเข้าใจจุดประสงค์ของการวิจัยอย่างชัดเจน

1.1 ทำการนัดแนะเวลาและสถานที่สัมภาษณ์กับกลุ่มตัวอย่างที่จะไปสัมภาษณ์
กรณีที่จะไปสัมภาษณ์กับประชาชนในหมู่บ้าน ควรทำหนังสือขออนุญาตไปยัง ฝ่ายปกครอง เช่น
นายอำเภอ กำนัน ไร่ล่องหน้า อาจันต์สัมภาษณ์ร่วมกันที่วัด หรือไปสัมภาษณ์ตามบ้านของกลุ่ม
ตัวอย่าง ซึ่งจะต้องศึกษาแผนที่หมู่บ้านและกำหนดเขตสัมภาษณ์ของแต่ละคนให้ชัดเจน จะได้ไม่
สัมภาษณ์ซ้ำซ้อนกันในกรณีสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง ผู้วิจัยเข้าไปคลุกคลีอยู่ในบ้าน อยู่แล้ว
และจะพบปะพูดคุยกันตามโอกาสที่เหมาะสม จึงไม่จำเป็นต้องดำเนินการตามข้อ 2)

1.2 กรณีสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้าง จะต้องเตรียมแบบสัมภาษณ์ไว้ล่วงหน้า

1.3 ทำการซักซ้อมการสัมภาษณ์รวมทั้งวิธีบันทึกข้อมูลไว้ล่วงหน้า ให้คล่องแคล่ว
ไม่ประหม่าหรือเก้อเขิน ถ้าเป็นไปได้ควรท่องจำคำถามต่าง ๆ ไว้ ซึ่งจะช่วยให้ดำเนินการสัมภาษณ์
ไปได้อย่างราบรื่น

2. การเริ่มต้น

2.1 ก่อนเริ่มสัมภาษณ์ ผู้สัมภาษณ์ควรแนะนำตนเอง บอกจุดมุ่งหมายของการ
สัมภาษณ์ให้ผู้ที่จะให้สัมภาษณ์เข้าใจ

2.2 สร้างความคุ้นเคย ความเป็นมิตร โดยสนทนาในเรื่องที่คาดว่าผู้ให้สัมภาษณ์จะ
สนใจ โดยใช้เวลาเล็กน้อย

3. การดำเนินการสัมภาษณ์

3.1 ผู้สัมภาษณ์ต้องมีกิริยาสุภาพเรียบร้อย ยิ้มแย้มแจ่มใส

3.2 ใช้ภาษาที่เข้าใจง่าย ชัดเจน ไม่แปลได้หลายทาง เหมาะสำหรับระดับผู้ให้
สัมภาษณ์

3.3 ใช้คำถามที่สามารถตอบได้ทันที

3.4 สัมภาษณ์ทีละคำถาม

3.5 ผู้สัมภาษณ์ต้องมีพื้นฐานความรู้ที่ดีในเรื่องที่จะสัมภาษณ์

3.6 ถ้าผู้ให้สัมภาษณ์ไม่เข้าใจคำถาม ก็ตั้งคำถามใหม่หรืออธิบายคำถามให้เข้าใจ

3.7 การจดบันทึกคำตอบควรทำอย่างรวดเร็ว

3.8 ไม่เร่งรัดหรือคาดคั้นคำตอบจากผู้ให้สัมภาษณ์

3.9 ไม่ใช่คำถามที่เป็นการชี้แนะคำตอบ

3.10 ไม่วิพากษ์วิจารณ์หรือชุดในลักษณะที่เป็นการสั่งสอนผู้ให้สัมภาษณ์

3.11 กล่าวแสดงความขอบคุณผู้ให้สัมภาษณ์ หลังจากสัมภาษณ์เสร็จแล้ว

4. คุณสมบัติของผู้สัมภาษณ์ที่ดี

สัมภาษณ์ที่ดีควรมีคุณสมบัติ ดังนี้

4.1 มีบุคลิกภาพที่ดี ผู้สัมภาษณ์ควรมีิริยามารยาทสุภาพ เรียบร้อย นุ่มนวล แจ่มใส ซึ่งจะช่วยให้บรรยากาศการสัมภาษณ์เป็นไปด้วยดี โน้มน้าวให้ผู้สัมภาษณ์อยากให้ความร่วมมืออย่างจริงใจ

4.2 มีมนุษยสัมพันธ์ดี ผู้สัมภาษณ์ควรเป็นผู้มีมนุษยสัมพันธ์ที่ดี สามารถติดต่อสื่อสารกับคนอื่นได้อย่างคล่องแคล่ว

4.3 มีไหวพริบดี ผู้สัมภาษณ์ที่ดีควรรับรู้สิ่งต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็ว แก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้อย่างมีประสิทธิภาพและทันต่อเหตุการณ์

4.4 เป็นคนช่างสังเกต ในการสัมภาษณ์ถ้าผู้สัมภาษณ์เป็นคนช่างสังเกต จะช่วยให้ได้ข้อมูลเกี่ยวกับผู้ให้สัมภาษณ์และเกี่ยวกับสภาพแวดล้อม ซึ่งช่วยในการตัดสินใจ และนำมาประกอบการแปลความหมายข้อมูล

4.5 มีความซื่อสัตย์ ผู้สัมภาษณ์จะต้องมีความซื่อสัตย์ต่อข้อมูล ไม่ทำการบิดเบือน แปลความ ตีความหรือสรุป ขัดแย้งไปจากข้อความจริงที่ตนได้รับ

4.6 มีความรับผิดชอบในการสัมภาษณ์ ทำการสัมภาษณ์ด้วยความสนใจใคร่รู้มีความตั้งใจให้ได้ข้อมูลที่ถูกต้อง เทียงตรง

4.7 มีความอดทน ในการสัมภาษณ์บุคคลอื่น บางครั้งต้องเดินทางไปสัมภาษณ์คนที่ไม่รู้จักและอยู่ห่างไกล ใช้เวลาสัมภาษณ์นาน ผู้ให้สัมภาษณ์บางคนอาจมีกริยาอาการหรือบุคลิกภาพที่ไม่ค่อยเหมาะสมในสายตาของผู้สัมภาษณ์การแต่งกายไม่สะอาด ฯลฯ ซึ่งผู้สัมภาษณ์จะต้องใช้ความอดทนมีความเห็นอกเห็นใจคนอื่น

5. ข้อดีและข้อจำกัดของการสัมภาษณ์

5.1 ข้อดีของการสัมภาษณ์

5.1.1 เป็นเทคนิคที่ใช้รวบรวมข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างตั้งแต่วัยเด็กถึงวัยชรา เหมาะอย่างยิ่ง สำหรับผู้ที่อ่านไม่ออกเขียนไม่ได้หรือมีปัญหาในการอ่านและเขียน

5.1.2 สามารถปรับคำถามให้ชัดเจนขึ้นได้ ถ้าผู้ให้สัมภาษณ์ไม่เข้าใจก็เปลี่ยนคำถามให้เกิดความเข้าใจได้

5.1.3 ผู้ให้สัมภาษณ์จะให้ความร่วมมือมากกว่าวิธีส่งแบบสอบถามไปให้ตอบ

5.1.4 ระหว่างการสัมภาษณ์สามารถสังเกตความจริงใจในการตอบของผู้ถูกสัมภาษณ์จาก กิริยา ท่าทางได้

5.1.5 ระหว่างการสัมภาษณ์ตรวจสอบคำตอบได้และสามารถหาข้อมูลได้ลึกขึ้นเมื่อเกิดข้อสงสัยในคำตอบ

5.2 ข้อจำกัดของการสัมภาษณ์

5.2.1 ต้องใช้เวลาในการเก็บรวบรวมข้อมูลมาก การสัมภาษณ์แต่ละครั้งจะต้องใช้เวลาในการเดินทางไปกลับ ในการสัมภาษณ์แต่ละคน ดังนั้นจึงต้องใช้ความพยายามและค่าใช้จ่ายสูง

5.2.2 ผู้ให้สัมภาษณ์อาจตอบไม่ตรงกับข้อความจริงของตนด้วยความจงใจ

5.2.3 คุณภาพข้อมูลที่ได้อาจขึ้นอยู่กับคุณภาพของผู้สัมภาษณ์

2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษาการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ มีนักการศึกษาได้ทำการศึกษาไว้ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. งานวิจัยในประเทศ

รสอบล ธรรมพานิชวงศ์ (2545, น.49-52) ได้ศึกษาผลของการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กรุงเทพมหานครเรื่องระบบจำนวนเต็มเศษส่วนและทศนิยมโดยนักเรียนในกลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยเน้นการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์และนักเรียนในกลุ่มควบคุมได้รับการสอนแบบปกติผลการวิจัยพบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างจากนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แต่นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์มีความคงทนในการเรียนรู้คณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

วิรัชดา ทานิล (2553, น.57-69) ได้ศึกษาการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎี Pirie และ Kieren เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 กลุ่มเป้าหมายของการวิจัยครั้งนี้เป็น ครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 1 คน และนักเรียนชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 3 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ แบบทดสอบ เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ผลการวิจัย พบว่า ครูใช้การนำเสนอภายนอกที่หลากหลายในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้แก่ ภาษาพูดและภาษาเขียน สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ การใช้ตัวอย่างที่หลากหลายประกอบการอธิบาย สถานการณ์จริง แบบฝึกหัด และพบว่า ครูใช้แผนภาพ ตาราง และรูปภาพ เพื่อแสดงการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา และระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎี Pirie และ Kieren เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่า นักเรียนพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎี Pirie และ Kieren เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงระดับการมีมโนภาพ ระดับการสังเกตคุณสมบัติ และระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม และนักเรียนพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงระดับการมีมโนภาพ และระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม และนักเรียนพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวถึงระดับการมีมโนภาพ และระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม

มลิวรรณ พวงจำปี (2555, น.70-81) ได้ศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบทฤษฎี Action-Process-Structure (APS) เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6/1 โรงเรียนนาคุณประชาสรรค์ จังหวัดมหาสารคาม ที่เรียนในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2554 จำนวนนักเรียน 45 คนแล้วคัดเลือกจำนวน 6 คน มาเป็นกรณีศึกษาเพื่อสัมภาษณ์ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบ ถอดเทปจากการบันทึกเสียง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ แบบทดสอบวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เป็นแบบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ข้อที่ 1 มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำร้อยละ 88 และระดับกระบวนการร้อยละ 85 ข้อที่ 2 มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำร้อยละ 85 และระดับกระบวนการร้อยละ 67 ข้อที่ 3 มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำร้อยละ 84 ระดับกระบวนการร้อยละ 66 และระดับโครงสร้างร้อยละ 23 ข้อที่ 4 มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำร้อยละ 86 ระดับกระบวนการร้อยละ 65 และระดับโครงสร้างร้อยละ 27 และข้อที่ 5 มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำร้อยละ 80 ระดับกระบวนการร้อยละ 68 และระดับโครงสร้างร้อยละ 20

ธวัตร ชัยเคนซา (2558, น.1719-1734) ได้สำรวจระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเรื่อง เลขยกกำลัง ในชั้นเรียนที่ใช้การสอนด้วยวิธีการแบบเปิดกลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/15 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557 โรงเรียนผดุงนารี อำเภอเมืองจังหวัดมหาสารคาม 6 คน (3 คู่) ผู้วิจัยจัดการเรียนการสอนตาม 4 ขั้นตอนของวิธีการเปิดตามแนวคิดของ Inprasitha (2010) จากการสอนในหน่วยการเรียนรู้เรื่อง เลขยกกำลัง จำนวน 6 แผน 6 ชั่วโมง ผู้วิจัยทำการเก็บรวบรวมข้อมูลในชั้นเรียนด้วยแผนการจัดการเรียนรู้แบบสำรวจระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เครื่องบันทึกวีดิทัศน์ ผลงานนักเรียน และการสัมภาษณ์นักเรียน และวิเคราะห์ข้อมูลด้วยการวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) โดยอาศัยกรอบ APOS Theory ของ Dubinsky & McDonald (2001) มาใช้ในการดำเนินการวิจัยและวิเคราะห์ข้อมูลผลการวิจัยพบว่า ชั้นการนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด นักเรียนมีความเข้าใจในระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการขั้นการเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน นักเรียนมีความเข้าใจในระดับการจัดกระทำ ระดับกระบวนการ และระดับวัตถุขั้นการอธิบายและเปรียบเทียบแนวคิดร่วมกันทั้งชั้นเรียนนักเรียนมีความเข้าใจในระดับกระบวนการและระดับวัตถุและขั้นการสรุปโดยการเชื่อมโยงแนวคิดของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน นักเรียนสามารถเชื่อมโยง ระดับกระบวนการ และความเข้าใจในระดับวัตถุ ให้เป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างเชิงการรู้ได้ นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังพบว่าชั้นเรียนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่ใช้การสอนด้วยวิธีการแบบเปิดทำให้ครูมีวิธีการและแนวทาง “How to” เข้าถึงความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้อย่างใกล้ชิด

2. งานวิจัยต่างประเทศ

Copi and Cohen (1990, p.16) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการเรียนการสอนแบบใช้ทักษะโดยตรงในการหารเศษส่วนฐานสิบกับความเข้าใจคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามทฤษฎีปฏิสัมพันธ์ทางสังคมของ Vygotsky โดยศึกษากับนักเรียน 9 คนที่มีอายุ 11 ปีและ 12 ปีด้วยการสัมภาษณ์การแก้ปัญหาที่ได้รับมอบหมายในบทเรียนจากการวิเคราะห์การสัมภาษณ์แสดงความเข้าใจไม่ได้มีความคิดเดียวแต่ประกอบด้วย 3 แนวทางคือ 1) ความเข้าใจด้านกระบวนการซึ่งรวมถึงความคิดเกี่ยวกับการใช้วิธีการใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ (Algorithms) 2) ความเข้าใจด้านภาษาซึ่งประกอบด้วยการควบคุมตัวเองด้านภาษาซึ่งช่วยให้จำลำดับขั้นตอนและวลีอธิบายที่ใช้ในการอธิบายขั้นตอน 3) ความเข้าใจด้านความสัมพันธ์ซึ่งรวมถึงความสัมพันธ์เรื่องค่าของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการความเข้าใจของนักเรียนมี 2 ประเภทคือผู้ที่ทำตามกฎและผู้ที่มิใช่หวอพิบผู้ที่ทำตามกฎใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพแต่ขาดความสามารถในการยืดหยุ่นในการใช้แนวทางทำความเข้าใจไม่ได้มีการประสมประสานและแนวทางที่สัมพันธ์กันยังไม่ได้รับการพัฒนาผู้ที่มิใช่หวอพิบใช้กลวิธีมากกว่าและประยุกต์ใช้กับปัญหาที่ไม่คุ้นเคย

แนวทางการทำความเข้าใจมีการประสมประสานดีกว่าความสามารถในการหารของนักเรียนไม่มีความแตกต่างเมื่อจบหน่วยการเรียนรู้หน่วยการเรียนการสอนประกอบด้วย 5 บทเรียนแต่ละบทเรียนมีทักษะและอธิบายด้วยจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมโดยครูใช้เทคนิคการสอน 6 ชนิดคือ 1) เน้นวิธีการทางคณิตศาสตร์ 2) การควบคุมตัวเองด้านภาษา 3) ช่องทางสู่ความเข้าใจเดี่ยว 4) ภาษาในการอธิบาย 5) การอ้างการเรียนการสอนที่ผ่านมา 6) การอ้างกฎใช้เทคนิคเหล่านี้เพื่อเพิ่มทักษะและความเข้าใจผลการวิจัยนำไปสู่การเสนอแนะการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่อยู่บนฐานของการให้ความหมาย

Pinzka (1999, pp.1491A) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความเข้าใจมโนทัศน์เรื่องฟังก์ชัน กับความเข้าใจและการประยุกต์ใช้มโนทัศน์เรื่องอนุพันธ์ ในวิชาแคลคูลัสของนักศึกษาระดับอุดมศึกษา ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีความเข้าใจ เรื่อง ฟังก์ชันและมโนทัศน์เรื่องอนุพันธ์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นักเรียนมีกระบวนการและแนวคิดในแต่ละมโนทัศน์แตกต่างกัน นอกจากนี้นักเรียนมีความเข้าใจมโนทัศน์ เรื่อง อนุพันธ์เกี่ยวกับเรขาคณิต สามารถตีความหมายและอธิบายกราฟของฟังก์ชัน สามารถเชื่อมโยงการนำเสนอรูปแบบต่าง ๆ ของฟังก์ชันเข้าใจถึงการใช้เครื่องหมาย กระบวนการ โดเมนของฟังก์ชัน และสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

Rittle-Johnson (1999, pp.121-123) ได้ทำการศึกษาการเสนอรูปแบบซ้ำเพื่อความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในการพัฒนาความรู้ด้านมโนทัศน์และรู้ด้านการดำเนินการและรวมไปถึงการเปลี่ยนแปลงการนำเสนอปัญหา โดยทำการศึกษาให้นักเรียนเกรด 6 ผลการวิจัยพบว่าความรู้ด้านมโนทัศน์ที่มีอยู่ก่อนของนักเรียนจะสนับสนุนประโยชน์ของความรู้ด้านการดำเนินการ และความรู้ด้านการดำเนินการก็ส่งเสริมการปรับปรุงความรู้ด้านมโนทัศน์ด้วยดังนั้น การนำเสนอปัญหาที่ถูกต้องจึงเป็นสื่อสัมพันธ์ระหว่างความรู้ด้านมโนทัศน์ และความรู้ด้านการดำเนินการได้รับการปรับปรุงผลการทดลองนักเรียนเกรด 6 พบว่ามีการเชื่อมโยงการนำเสนอปัญหาที่ได้รับการปรับปรุงไปสู่ความรู้ด้านการดำเนินการที่ปรับปรุงแล้วนักเรียนได้รับการส่งเสริมให้แสดงออกจะนำเสนอปัญหาที่ถูกต้องมากกว่าและได้รับประโยชน์จากความรู้ด้านการดำเนินการมากกว่าด้วย

Usiskin (2001, pp.14-22) ได้ทำการศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งทำให้นักเรียนมีความคิดที่ลึกซึ้ง จนเกิดความเข้าใจในทักษะและกระบวนการ การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน และสามารถนำเสนอคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งทำให้นำไปสู่ความคิดสร้างสรรค์ในระดับสูง การสร้างกระบวนการ การพิสูจน์ การค้นพบ การนำไปใช้และการพัฒนาการนำเสนอใหม่ ๆ ซึ่ง Usiskin ได้แบ่งความเข้าใจเป็น 4 ลักษณะดังนี้ 1. ความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (Skill – Algorithm Understanding) หรือที่เรียกว่าความเข้าใจด้านทักษะ 2.ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติคณิตศาสตร์ (Properties - Mathematical Understanding)

เป็นความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติที่เป็นโครงสร้างพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เป็นความเข้าใจแสดงถึงรูปแบบทั่วไปของสิ่งที่นักเรียนเผชิญ สื่อได้ด้วยภาษาที่ถูกต้อง 3.ความเข้าใจเกี่ยวกับการนำไปใช้ (Use - Application Understanding) ซึ่งเป็นความเข้าใจที่แท้จริง เพราะนักเรียนจะต้องนำความรู้ที่มีอยู่ไปใช้อย่างสมเหตุสมผล และ4.ความเข้าใจในการนำเสนอ (Understanding through Representation) นักเรียนที่มีความเข้าใจต้องสามารถนำเสนอสิ่งที่ตนเข้าใจให้ผู้อื่นทราบด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งหรือหลายวิธีโดยจะใช้สื่อ วัสดุอุปกรณ์ประกอบการนำเสนอ ซึ่งอาจจะนำเสนอในรูปแบบที่เป็นรูปธรรมหรือนามธรรมก็ได้ ทั้งนี้จะเน้นที่ความสามารถในการถ่ายทอดสิ่งที่ตนเข้าใจผู้อื่นได้ เข้าใจด้วย

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศสรุปได้ว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานสำคัญที่จะนำไปต่อยอดในการศึกษาระดับที่สูงขึ้นและยังเป็นส่วนหนึ่งของเครือข่ายทางสติปัญญา จึงได้มีนักวิจัยหลายท่านได้ให้ความสำคัญกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจจะทำให้เกิดความคิดที่ลึกซึ้งจนเกิดความเข้าใจในทักษะและกระบวนการ การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ในชีวิตจริง และสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ไม่เคยพบได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยใช้แนวคิดของ Usiskin เรื่องการแก้สมการของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เพื่อเป็นข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์โดยใช้แนวคิดของ Usiskin เรื่อง การแก้สมการ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และเป็นแนวทางการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมศึกษาและชั้นอื่น ๆ

2.8 กรอบแนวคิดการวิจัย

กรอบแนวคิดวิจัยครั้งนี้คือการศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์, แนวคิดของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และแนวทางการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยใช้แนวคิดของ Usiskin เรื่องการแก้สมการ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนคอนบอสโกวิทยา อำเภอเมือง จังหวัดอุดรธานี โดยได้เสนอลักษณะความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ 4 ลักษณะได้แก่ ความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ , ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติคณิตศาสตร์ , ความเข้าใจเกี่ยวกับการนำไปใช้ และความเข้าใจในการนำเสนอ