บทที่ 2
การทบทวนวรรณกรรม

ในการวิจัยเรื่อง การศึกษาการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนบ้านปลาขาว อำเภอนาเชือก จังหวัดมหาสารคาม ผู้วิจัยได้ดำเนินการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

1. พีชคณิต
2. เครื่องหมายเท่ากับ
3. การคิดเชิงสัมพันธ์
4. การประเมินการคิดเชิงสัมพันธ์
5. แบบทดสอบ
6. การสัมภาษณ์
7. วิจัยที่เกี่ยวข้อง
8. กรอบการวิจัย

2.1 พีชคณิต

พีชคณิต (Algebra) เป็นสาขาหนึ่งในคณิตศาสตร์ เป็นการศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้าง ความสัมพันธ์ และจำนวน พีชคณิตพื้นฐานจะเริ่มมีสอนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา โดยศึกษาเกี่ยวกับการบวกลบคูณและหาร ยกกำลัง และการถอดราก พีชคณิตยังคงรวมไปถึงการศึกษาสัญลักษณ์ ตัวแปร ซึ่งได้มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงลักษณะของพีชคณิต การคิดเชิงพีชคณิต และพีชคณิตในระดับโรงเรียนไว้ดังนี้

2.1.1 ลักษณะของพีชคณิต

ได้มีนักการศึกษากล่าวถึงลักษณะพีชคณิตไว้ดังนี้

Kieran (1992, p. 3) กล่าวว่า พีชคณิตถือเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสัญลักษณ์ที่นำไปสู่กรณีทั่วไปของความสัมพันธ์เชิงจำนวนและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์และเกี่ยวข้องกับการดำเนินการบนโครงสร้างดังกล่าว

Wagner and Parker (1993, p. 12) กล่าวว่า แนวคิดที่เกี่ยวกับพีชคณิตมี 2 แนวทาง ได้แก่ ประการแรก พีชคณิตเป็นระบบของการนำเสนอเกี่ยวกับแบบรูป ความสัมพันธ์ และขั้นตอนทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สัญลักษณ์ อาทิเช่น ตัวอักษรในอักขระต่างๆ ประการที่สอง พีชคณิตเป็นภาษาที่ใช้ในการอธิบายการกระทำและความสัมพันธ์ของปริมาณ

Herbert and Brown (1997, p. 5) กล่าวว่า พีชคณิตเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา ได้แก่ การวิเคราะห์ข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และการนำเสนอข้อมูลในรูปของการอธิบายและการหาคำตอบ เช่น การหาตัวไม่ทราบค่า การทดสอบข้อความคาดการณ์ หรือการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ เป็นต้น

Usiskin (1997, p. 6) กล่าวว่า พีชคณิตคือ ภาษา ซึ่งในภาษาทางคณิตศาสตร์จะเกี่ยวข้องกับตัวไม่ทราบค่า สูตร รูปทั่วไป การแทนค่า และความสัมพันธ์

Vance (1998, p. 23) กล่าวว่า พีชคณิตบ้างครั้งถูกมองในรูปของกรณีทั่วไปของเลขคณิตหรือภาษาที่แทนกรณีทั่วไปของเลขคณิต อย่างไรก็ตาม พีชคณิตมิใช่เป็นเพียงแค่เซตของกฎเกณฑ์ในการดำเนินการของสัญลักษณ์เท่านั้น แต่ยังหมายถึงวิธีการคิดด้วย

Greenes and Findell (1999, p. 8) กล่าวว่า พีชคณิตประกอบด้วย การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย การนำเสนอ สมการตัวแปร ฟังก์ชัน และสัดส่วน นอกจากนี้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านที่พยายามให้ความหมายของพีชคณิตในลักษณะของภาษา

Kaput (1999, p. 3) กล่าวว่า พีชคณิตมี 5 ประเด็นคือ

1. พีชคณิตเป็นการดำเนินการให้อยู่ในรูปทั่วไปหรือการสร้างกฎเกณฑ์
2. พีชคณิตเป็นการจัดการโครงสร้างของสูตร
3. พีชคณิตเป็นการศึกษาโครงสร้างที่เป็นนามธรรมจากการคำนวณและความสัมพันธ์
4. พีชคณิตเป็นการศึกษาฟังก์ชัน ความสัมพันธ์และรูปแบบร่วมกัน
5. พีชคณิตเป็นกลุ่มของภาษาที่เป็นแบบจำลองและภาษาเกิดจากปรากฏการณ์ที่ถูกควบคุม

Barton and Katz (2007, p. 2) กล่าวว่า พีชคณิตมีความเป็นนามธรรมมากกว่าคณิตศาสตร์สาขาอื่น โดยเฉพาะในระดับมัธยมมีความเป็นนามธรรมสูง ดังนั้นการที่จะให้ผู้เรียนเข้าใจพีชคณิตได้ดีมากขึ้น ก็สามารถใช้วิธีการแก้ปัญหาเป็นการเริ่มต้น ซึ่งมันคล้ายกับการเรียนรู้ของนักคณิตศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ และพ่อค้า ที่พัฒนางานหรือคิดค้นทฤษฎีต่างๆ ด้วยการรู้จักปัญหาเชิงปฏิบัติที่ใช้โมเดลและสถานการณ์ที่แสดงพื้นฐานการให้เหตุผลและแบบรูป

สรุปได้ว่า พีชคณิตเป็นศาสตร์ที่มีความเป็นนามธรรมสูงกว่าคณิตศาสตร์สาขาอื่น มีลักษณะเป็นกลุ่มของภาษาที่แทนกรณีทั่วไปของเลขคณิต เกี่ยวข้องกับตัวไม่ทราบค่า สูตร รูปทั่วไป การแทนค่า และความสัมพันธ์

2.1.2 การคิดเชิงพีชคณิต

การคิดเชิงพีชคณิต (Algebraic Thinking) เป็นการตระหนักถึงรูปแบบและความสัมพันธ์ทั่วไปทางคณิตศาสตร์ มีนักการศึกษากล่าวถึงการคิดเชิงพีชคณิตไว้ดังนี้

Kaput (1993, p. 5) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิต เป็นการสร้างและการนำเสนอที่เกี่ยวข้องกับแบบรูป กฎเกณฑ์ การทำให้อยู่ในรูปทั่วไป การค้นหาและการสร้างข้อคาดการณ์

Driscoll (1997, p. 9) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิต สัมพันธ์กับความสามารถในการคิดเชิงฟังก์ชันและการทำงานของฟังก์ชัน และการคิดเกี่ยวกับผลของการดำเนินการภายใต้ระบบดังกล่าว

Arens and Meyer (2000, p. 9) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตได้นำมาใช้ในกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนค้นหาแบบรูปและความสัมพันธ์ ประเภทและการจัดประเภท กฎเกณฑ์ และการค้นหาวิธีการแก้ปัญหา

Alghtani and Abdulhamied (2010, p. 6) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตถูกนิยามและอธิบายว่าเป็นแนวทางที่เป็นประโยชน์ต่อการคิดที่เกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ คุณลักษณะเด่นของการคิดเชิงพีชคณิต ยกตัวอย่างเช่น การอธิบายกฎของแบบรูป อธิบายการเปลี่ยนแปลงในกระบวนการหรือความสัมพันธ์ และการนำเสนอการแก้โจทย์ปัญหา

Windsor (2010, p. 12) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตเกี่ยวข้องกับการตระหนักถึงรูปแบบและความสัมพันธ์ทั่วไปทางคณิตศาสตร์ในจำนวน วัตถุ และรูปร่างทางเรขาคณิต

สรุปได้ว่า การคิดเชิงพีชคณิต เป็นการคิดที่เกี่ยวข้องกับแบบรูปและกฎเกณฑ์ การทำให้อยู่ในรูปทั่วไป การค้นหาการสร้างข้อคาดการณ์ และการทำงานของฟังก์ชัน

2.1.3 องค์ประกอบของการคิดเชิงพีชคณิต

ได้มีนักการศึกษา กล่าวถึงองค์ประกอบของการคิดเชิงพีชคณิต หลายทัศนะไว้ดังนี้

Kriegler (2007, p. 7) กล่าวว่า องค์ประกอบของการคิดเชิงพีชคณิตแบ่งออกเป็น 2 ส่วนหลักๆ ได้แก่ การพัฒนาเครื่องมือการคิดทางคณิตศาสตร์และการศึกษาแนวคิดทางพีชคณิตพื้นฐาน ซึ่งเครื่องมือสำหรับการคิดทางคณิตศาสตร์ แบ่งออกเป็น 3 ทักษะ คือ ทักษะการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) ทักษะการแสดงแทน (Representation Skills) และทักษะการให้เหตุผลเชิงปริมาณ (Quantitative reasoning skills) และการศึกษาแนวคิดทางพีชคณิตพื้นฐาน จะสำรวจโดยใช้ 3

มุมมอง คือ พีชคณิตเป็นเลขคณิตทั่วไป พีชคณิตเป็นภาษาทางคณิตศาสตร์ และพีชคณิตเป็นเครื่องมือสำหรับฟังก์ชันและโมเดลทางคณิตศาสตร์

Alghtani and Abdulhamied (2010, p. 15) กล่าวว่า องค์ประกอบของการคิดเชิงพีชคณิตมี 3 อย่างคือ (1) การสร้างความเป็นกรณีทั่วไป (2) แนวคิดเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ และ (3) การให้เหตุผลเกี่ยวกับปริมาณที่ไม่รู้จัก

สรุปได้ว่า องค์ประกอบของการคิดเชิงพีชคณิตขึ้นอยู่กับเกณฑ์การแบ่ง ถ้าใช้เครื่องมือในการคิดทางคณิตศาสตร์แบ่งได้เป็น 3 ทักษะ คือ การสร้างความเป็นกรณีทั่วไป แนวคิดเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ และการให้เหตุผลเกี่ยวกับปริมาณที่ไม่รู้จัก

2.1.4 ความสำคัญของการคิดเชิงพีชคณิต

ได้มีนักการศึกษา กล่าวถึงความสำคัญของการคิดเชิงพีชคณิต หลายทัศนะไว้ดังนี้

Schoenfeld (1995, p. 9) กล่าวว่า พีชคณิตไม่เพียงแค่เป็นส่วนหนึ่งในโลกสมัยใหม่เท่านั้น แต่ยังให้ “ใบผ่านทางด้านวิชาการสำหรับผ่านเข้าสู่ตลาดแรงงานและเส้นทางการศึกษา”

Barton and Katz (2007) ได้ให้ความเห็นสอดคล้องกับ Schoenfeld ว่า พีชคณิตเป็นกุญแจสู่ความสำเร็จในทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด และพีชคณิตนามธรรมคือสิ่งจำเป็นต่องานทางด้านคณิตศาสตร์ขั้นสูง โอกาสในชีวิตและการงานที่มาพร้อมกับการศึกษาที่สูงขึ้นการคิดเชิงพีชคณิตเริ่มแรกอาจพัฒนาได้ดีที่สุด นอกจากนั้นคิดเชิงพีชคณิต ใช้ในการแก้ปัญหาและเรขาคณิตเพื่อให้นักเรียนสามารถเข้าถึงพีชคณิตได้มากขึ้น

Booker (2009, p. 6) กล่าวว่า พีชคณิตเป็นเครื่องมือสำหรับคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ พาณิชยการ และเป็นวิธีที่มีความสัมพันธ์หลากหลายที่ถูกเสนออยู่ในงานทางด้านรัฐศาสตร์และชีวิตประจำวัน ความสำคัญพวกนี้อยู่เบื้องหลังการเปลี่ยนแปลงหลักสูตรซึ่งมีแง่มุมเหล่านี้เป็นสำคัญ ซึ่งทุกๆ คนมีโอกาสในการพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

สรุปได้ว่า การคิดเชิงพีชคณิตมีความสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ทั้งปวง และในการดำรงชีวิต ตลอดจนการประกอบอาชีพ

2.1.5 แนวคิดในการจัดการเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษา

จากความหมายของพีชคณิตที่นำเสนอมาข้างต้นจะเห็นว่าในด้านเนื้อหานั้นอาจจะฟังดูไม่สมเหตุสมผลมากนักที่จะจัดหลักสูตรพีชคณิตให้กับนักเรียนในระดับประถมศึกษา เช่น เราคงจะไม่คาดหวังสูงถึงขนาดที่จะให้นักเรียนในระดับประถมศึกษาสามารถแก้ระบบสมการทางพีชคณิตหรือแสดงการพิสูจน์อย่างเป็นทางการได้ เป็นต้น ประเด็นที่น่าสนใจก็คือพีชคณิตในระดับประถมศึกษาควรจะต้องให้ความหมาย หรือมุ่งเน้นไปที่ส่วนใด ต่อไปนี้คือแนวคิดใหม่ในวงการ

คณิตศาสตรศึกษาที่เริ่มมองว่าการจัดหลักสูตรการเรียนรู้พีชคณิตควรเริ่มตั้งแต่ระดับต้น ๆ ไม่ใช่จัดให้มีอยู่เฉพาะในระดับมัธยมเท่านั้น

Yackel (1997, p. 276-280) กล่าวว่า นักเรียนระดับประถมศึกษาเรียนพีชคณิตในลักษณะของเรื่องแบบจำลอง (Modeling) การหาแบบรูป (Pattern Finding) และการศึกษาโครงสร้าง (The Study of Structure) ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เกี่ยวกับเรื่องเหล่านี้จะเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สร้างการให้เหตุผลที่แสดงถึงพื้นฐานของวิธีการคิดที่แตกต่างกัน ดังนั้นจุดเน้นของการจัดการเรียนรู้ในระดับประถมศึกษาจึงไม่ใช่อยู่ที่กิจกรรมที่มีลักษณะเป็นพีชคณิตแต่ต้องเน้นที่การคิดและการให้เหตุผลของนักเรียน ซึ่งมุมมองดังกล่าวจะมีประโยชน์มากเพราะจะช่วยขจัดปัญหาที่จะจำกัดความหมายว่าอะไรคือเนื้อหาของพีชคณิตที่จะนำมาจัดการเรียนรู้สำหรับนักเรียนในระดับประถมศึกษา ซึ่งประเด็นสำคัญอยู่ที่ธรรมชาติของการคิดและการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนนั่นเอง

Battista & Brown (1998, p. 22) กล่าวว่า นักเรียนสามารถใช้พีชคณิตได้อย่างมีความหมายต้องเริ่มต้นจากการสอนให้เข้าใจความหมายไม่ใช่มุ่งไปที่การใช้สัญลักษณ์ ในระดับประถมศึกษาต้องเปิดโอกาสให้เด็กคิดและแสดงความคิดเกี่ยวกับเรื่องของจำนวนและสมบัติของจำนวน จนกว่านักเรียนจะสามารถใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตได้อย่างเป็นธรรมชาติ

NCTM (2000, p. 5) กล่าวว่า พีชคณิตในระดับประถมศึกษาไม่ควรเน้นเนื้อหาที่ยากเกินไปแต่ควรเน้นไปที่การเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจ สนทนาเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่จะส่งผลให้นักเรียนรู้จักให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งบริบทเหล่านี้จะมีความสำคัญต่อการทำความเข้าใจเนื้อหาทางพีชคณิตที่เป็นทางการมากขึ้นในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลาย ยกตัวอย่าง เช่น จากการที่นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของ 18×14 โดยคำนวณจากการหาผลบวกของ 18×10 และ 18×4 ในระดับประถมศึกษา จะสามารถช่วยให้นักเรียนเข้าใจสมบัติการแจกแจงของการคูณเหนือการบวกที่เป็นการเข้าใจเชิงพีชคณิต (Algebraic Understanding) ประสบการณ์เกี่ยวกับแบบรูปจะเป็นพื้นฐานให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดเรื่องฟังก์ชัน ประสบการณ์เกี่ยวกับจำนวนและสมบัติของจำนวนจะเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจเรื่องตัวแปรและนิพจน์ทางพีชคณิต เป็นต้น

Cathcart; et al (2003, p. 380) กล่าวว่า การเรียนรู้พีชคณิตแต่ละเรื่องจะเป็นไปได้ง่ายขึ้นถ้านักเรียนได้ผ่านการเรียนรู้เรื่องที่เป็นพื้นฐานมาก่อน นอกจากนี้ยังได้เสนอแนะว่าหลักสูตรในระดับประถมศึกษาควรมีลักษณะที่เป็นรูปธรรมเพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นนามธรรมในระดับที่สูงขึ้น

Michal Sukenik (2007, p. 54) กล่าวว่า จุดประสงค์หลักในการสอนเลขสำหรับเด็กที่สำคัญข้อแรกคือให้เด็กชอบเลข ไม่รู้สึกกลัวที่จะเรียนเลขหรือเรียนคณิตศาสตร์ หลักสูตรเลขทั่วโลกก็เหมือนกันตรงที่ให้เด็กๆเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ รู้จักจำนวนและวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่กระทำกับจำนวนนั้น เช่น การบวก การลบ การคูณ หรือการหาร ตลอดจนเรียนรู้ในเรื่องของรูปทรงทางเรขาคณิต

สรุปได้ว่า แนวคิดในการจัดการเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษา ไม่ได้อยู่ที่ความต้องการให้นักเรียนเรียนรู้แนวคิดพีชคณิตที่เป็นทางการ แต่อยู่ที่ความต้องการเตรียมพื้นฐานไว้ในเบื้องต้นเพื่อที่นักเรียนจะได้เรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการในระดับมัธยมศึกษา เนื้อหาพีชคณิตในระดับประถมศึกษา อาจจะไม่ใช่พีชคณิตโดยตรงแต่สามารถสร้างกิจกรรมที่นำไปสู่ความเข้าใจหรือการให้เหตุผลในเชิงพีชคณิตได้ สำหรับการวิจัยในครั้งนี้จะให้ความสนใจกับการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย เพื่อศึกษาปัญหาและแนวพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ *เพื่อ*ส่งเสริมพื้นฐานที่ดีในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตและการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการในระดับที่สูงขึ้น นอกจากนี้ยังมีผลงานวิจัยหลายชิ้นยืนยันว่านักเรียนในระดับประถมศึกษาส่วนใหญ่มีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ ทำให้เกิดอุปสรรคต่อการเปลี่ยนผ่านและถ่ายโยงความเข้าใจจากแนวคิดทางเลขคณิตไปสู่แนวคิดทางพีชคณิต เช่น การแก้สมการเป็นต้น และการส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักมองความสัมพันธ์ของตัวเลขในประโยคสัญลักษณ์ในลักษณะของภาพรวมทั้งประโยคยังช่วยให้นักเรียนสามารถขยายความเข้าใจไปถึงเรื่องของสมบัติในกรณีทั่วไปของจำนวนและการดำเนินการได้อีกด้วย ซึ่งการเรียนรู้พีชคณิตจำเป็นจะต้องอาศัยสมบัติของจำนวนและการดำเนินการเป็นพื้นฐาน

2.2 เครื่องหมายเท่ากับ

ประโยคสัญลักษณ์ (Sentence Symbol) เป็นประโยคที่นำประโยคภาษามาเขียนเป็นสัญลักษณ์ ประกอบด้วยจำนวนและตัวดำเนินการบวก ลบ คูณ หรือหารอย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายการดำเนินการประกอบกัน โดยมีเครื่องหมาย แสดงความสัมพันธ์ ซึ่งประโยคสัญลักษณ์ที่นำมาใช้กับนักเรียนระดับประถมศึกษามี 2 ลักษณะ คือ (1) ประโยคสัญลักษณ์แบบถูกผิด เช่น 12 + 15 = 13 + 15 โดยใช้คำถามว่าประโยคที่กำหนดให้ถูกต้องหรือไม่ (2) ประโยคสัญลักษณ์แบบเปิด เช่น 23 + □ = 33 + 10 โดยใช้คำถามว่าตัวที่ไม่ทราบค่าคือจำนวนใด

2.2.1 ความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ

เครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญลักษณ์อย่างหนึ่งทางคณิตศาสตร์ที่มีความคุ้นเคยเป็นอย่างดี เพราะในทางคณิตศาสตร์มีการนำเครื่องหมายเท่ากับมาใช้ในหลากหลายสถานการณ์ โดยได้มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ ไว้ดังนี้

สสวท. (2548, น.52) กล่าวว่า เครื่องหมายเท่ากับ มิได้มีการให้ความหมายเพียงแต่มีการนำเสนอการใช้เครื่องหมายเท่ากับในเรื่องของการดำเนินการเกี่ยวกับจำนวน เช่น การ บวก การ ลบ การคูณ เป็นต้น เครื่องหมายเท่ากับ หรือ = ตรงกับคำในภาษาอังกฤษว่า Equals ซึ่งเป็นเครื่องหมายแสดงความเท่ากัน หรือใช้แสดงว่าสิ่งหนึ่งเท่ากับสิ่งหนึ่ง

ยุพิน พิพิธกุล (2549, น. 79) กล่าวว่า เครื่องหมายเท่ากับ เป็นเครื่องหมายที่ใช้แสดงการเท่ากันของข้อความสองข้อความ และเพื่อรักษาความเท่ากัน การดำเนินการใดๆ ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับจะต้องดำเนินการอีกด้านหนึ่งด้วย

จันทร์จิรา หนุ่มศรี (2554, น. 13) กล่าวว่า เครื่องหมายเท่ากับใช้แสดงความเท่ากันของข้อความ หรือจำนวนซึ่งเป็นข้อความเดียวกัน หรือจำนวนเดียวกัน หรือเป็นสิ่งที่มีลักษณะเฉพาะอย่างใดอย่างหนึ่ง ที่เหมือนกัน และการดำเนินการหรือการกระทำกับด้านใดด้านหนึ่ง จะต้องดำเนินการที่เป็นอย่าง เดียวกันกับอีกด้านหนึ่งด้วย เพื่อให้คงไว้ซึ่งการเท่ากันนั้น

William Karush (1989, p. 93) กล่าวว่า เครื่องหมายเท่ากับ เป็นความสัมพันธ์ทางตรรกศาสตร์ที่แสดงถึงความเป็นอันเดียวกันหรืออย่างเดียวกัน

สรุปได้ว่า เครื่องหมายเท่ากับ เป็นเครื่องหมายที่ใช้แสดงการเท่ากันของข้อความสองข้อความ หรือจำนวนซึ่งเป็นข้อความเดียวกัน หรือจำนวนเดียวกัน และแสดงความสัมพันธ์ทางตรรกศาสตร์ที่แสดงถึงความเป็นอันเดียวกัน หรืออย่างเดียวกัน

2.2.2 ความหมายของเครื่องหมายเท่ากับบนประโยคสัญลักษณ์

นักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษามีประสบการณ์เกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับในลักษณะหรือรูปแบบต่างกันหลายลักษณะและการทำความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับของผู้เรียนนั้นถือว่าเป็นสิ่งสำคัญในการเรียนรู้เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้นไปที่มีความซับซ้อนและเป็นนามธรรมยิ่งขึ้น โดยได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความสำคัญของเครื่องหมายเท่ากับ ไว้ดังนี้

NCTM (2000, p. 94) กล่าวว่า เครื่องหมายเท่ากับแสดงความสัมพันธ์เชิงปริมาณที่เท่ากันทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ เช่น 10 = 4 + 6 และ 4 + 6 = 5 + 5

McNeil (2004, pp. 938-943) กล่าวว่า เครื่องหมายเท่ากับเป็นเครื่องหมายที่แสดงการสมมูลกันทางคณิตศาสตร์ หรือแสดงปริมาณที่เท่ากันทั้งสองข้างของประโยคสัญลักษณ์

Molina and Ambrose (2006, pp. 111-117) กล่าวว่า บนประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั้น มีการใช้เครื่องหมายเท่ากับเพื่อแสดงการเท่ากันของการดำเนินการในแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

Leonidou and Philippou (2007, pp. 825-834) กล่าวว่า เครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญลักษณ์ที่อยู่ระหว่างสองปริมาณที่เท่ากันบนประโยคทางคณิตศาสตร์หรือเพื่อแสดงความสัมพันธ์ที่เท่ากัน หรือเพื่อแสดงการดำเนินการอย่างใดอย่างหนึ่งบนประโยคทางคณิตศาสตร์

Molina and Castro (2009, pp. 341-368) กล่าวว่า ในเลขคณิตและพีชคณิตนั้น เครื่องหมายเท่ากับสามารถนำมาใช้สื่อความหมายที่แตกต่างกันได้ถึง 11 ประเภท หนึ่งในนั้นคือ เครื่องหมายเท่ากับนำมาใช้เพื่อแสดงความสมมูลกันซึ่งประเด็นนี้สามารถแบ่งออกเป็น 3 ประเภท คือ

1. แสดงความสมมูลเชิงตัวเลข (Numerical Equivalence) เช่น $4 + 5 = 3 + 6$ และ $3 \times (4 + 2) = 3 \times 6$ เป็นต้น

2. แสดงการสมมูลเชิงสัญลักษณ์ (Symbolic Equivalence) ซึ่งอยู่ในรูปนิพจน์ เช่น $a+b=b+a$ และ $x^2 + 2x = x(x + 2)$ เป็นต้น

3. การแสดงสมมูลโดยนิยาม (Equivalence by Definition) เช่นการให้นิยาม $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ (เศษส่วนที่เท่ากัน) หรือ 100 cm = 1 m (มาตรส่วนที่เท่ากัน) เป็นต้น

สรุปได้ว่า เครื่องหมายเท่ากับ เป็นสัญลักษณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างประมาณสองชุดที่มีความสมมูลกันหรือเท่ากันทั้งสองข้างของประโยคสัญลักษณ์

2.2.3 ความสำคัญของการเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับบนประโยคสัญลักษณ์

จากความหมายของเครื่องหมายเท่ากับบนประโยคสัญลักษณ์ จะเห็นว่าเครื่องหมายเท่ากับมีความสำคัญเป็นอย่างมากในการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งได้มีนักการศึกษากล่าวถึงความสำคัญของเครื่องหมายเท่ากับไว้ดังนี้

Falkner (1999, p. 234) กล่าวว่า นักเรียนจำเป็นต้องเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์ที่เท่ากันระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ มี 2 ประการ ได้แก่ ประการแรกนักเรียนจำเป็นต้องใช้ความเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับในการคิดเกี่ยวกับประโยคสัญลักษณ์ ประการที่สองความเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับเป็นอุปสรรคที่สำคัญของการถ่ายโยงความรู้จากเลขคณิตไปสู่พีชคณิต จากเหตุดังกล่าวเป็นสาเหตุให้นักเรียนจำเป็นต้องเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับที่แสดงถึงความสัมพันธ์มากกว่าเครื่องหมายที่ตามด้วยคำตอบเพียงอย่างเดียว

NCTM (2000, p. 94) กล่าวว่า การเท่ากันเป็นองค์ประกอบที่สำคัญของการสร้างความคิดรวบยอดทางพีชคณิต ซึ่งนักเรียนต้องมีความเข้าใจตั้งแต่การเรียนในระดับประถมศึกษา

Carpenter, Franke and Levi (2003, p. 1-9) กล่าวว่า นักเรียนที่มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับนั้นจะช่วยให้ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับประโยคสัญลักษณ์

McNeil (2004, p. 938-943) กล่าวว่า นักเรียนจำเป็นต้องเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับเพราะเป็นพื้นฐานในการแสดงความสัมพันธ์ของการเท่ากันระหว่างจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับนั้น และเป็นประโยชน์สำหรับการหาคำตอบที่ถูกต้องจากปัญหาเกี่ยวกับประโยคสัญลักษณ์

Molina, Ambrose and Martinez (2004, p. 1-7) กล่าวว่า การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับโดยการแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนบนประโยคนั้น เป็นกุญแจสำคัญในการพัฒนาความสามารถในการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเฉพาะความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต และเป็นพื้นฐานสำหรับการเรียนพีชคณิตในระดับสูงขึ้น

Irwin and Britt (2005, p. 169) กล่าวว่า การแสดงการหาผลลัพธ์ที่เท่ากันที่นักเรียนใช้ในการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์เป็นพื้นฐานที่สำคัญของการคิดเชิงสัมพันธ์บนประโยคสัญลักษณ์ ซึ่งนักเรียนอาจใช้ร่วมกับการแสดงการชดเชย (Compensating) เช่น ความสามารถในการแสดงว่า 47 + 25 = 50 + 22 โดยการบวก 3 กับ 47 และนำ 25 ลบด้วย 3

Molina and Ambrose (2006, pp. 111-117) กล่าวว่า ความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับบนประโยคสัญลักษณ์ ช่วยให้การเรียนรู้พีชคณิตของนักเรียนสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

Leonidou and Philippou (2007, pp. 825-834) กล่าวว่า ความเข้าใจเกี่ยวกับการเท่ากันและสัญลักษณ์ที่ใช้ในการแสดงการเท่ากันเป็นสิ่งจำเป็นเบื้องต้นต่อการพัฒนาความคิดรวบยอดเกี่ยวกับพีชคณิต และนักเรียนควรได้รับการพัฒนาตั้งแต่ระดับประถมศึกษา

Stephens (2008, pp. 491-497) กล่าวว่า ความเข้าใจการเท่ากันเป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการคิดเชิงพีชคณิต โดยเฉพาะการพิจารณาการเท่ากันบนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่า

Molina and Castro (2009, pp. 341-368) กล่าวว่า ความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับนั้นเป็นองค์ประกอบสำคัญสำหรับการแสดงภาษาทางคณิตศาสตร์ให้อยู่ในรูปทั่วไป หากนักเรียนขาดความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับหรือมีความเข้าใจในระดับที่จำกัดแล้วย่อมส่งผลให้การเรียนพีชคณิตกลายเป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียน

สรุปได้ว่า การเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับบนประโยคสัญลักษณ์มีความสำคัญในการถ่ายโยงความรู้จากเลขคณิตไปสู่พีชคณิต และสร้างความคิดรวบยอดทางพีชคณิต ช่วยให้นักเรียน

ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับประโยคสัญลักษณ์ รวมไปถึงพัฒนาความคิดรวบยอดเกี่ยวกับพีชคณิตและเป็นพื้นฐานสำหรับการเรียนพีชคณิตในระดับสูงขึ้น

2.3 การคิดเชิงสัมพันธ์

การคิดเชิงสัมพันธ์ (Relational Thinking) เป็นการสังเกตและใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสองจำนวนที่อยู่ในแต่ละด้านของเครื่องหมายเท่ากับมากกว่าที่มุ่งใช้วิธีการคิดคำนวณตามความเป็นจริง และมีนักการศึกษากล่าวถึง ความหมาย ลักษณะ ความสำคัญ และการพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ไว้ดังนี้

2.3.1 ความหมายของการคิดเชิงสัมพันธ์

การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ลักษณะหนึ่ง ซึ่งมีความสำคัญในการแก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์ และได้มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความหมายของการคิดเชิงสัมพันธ์ ไว้ดังนี้

โศจิวัจน์ เสริฐศรี (2553, น. 22) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์ เป็นการคิดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแก้ปัญหาการเท่ากันโดยการพิจารณาความสัมพันธ์ของจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วมองความสัมพันธ์เชื่อมโยงที่มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงโดยขึ้นอยู่กับการดำเนินการของจำนวนที่เกี่ยวข้องระหว่างจำนวน แล้วใช้ความสัมพันธ์ที่สังเกตเห็นได้นั้น คิดพิจารณาหาคำตอบ

สุกัญญา หะยีสาและ (2554, น. 15) กล่าวว่า การคิดเชิงความสัมพันธ์ เป็นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ลักษณะหนึ่งที่ใช้ในการหาคำตอบของประโยคสัญลักษณ์ในด้านต่อไปนี้ (1) ความเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับ (2) ความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสองจำนวนในประโยคและใช้การชดเชย และ (3) ความสามารถในการใช้สมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการ

Blanton and Kaput (2005, p. 31) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการคิดเชิงพีชคณิต

Carpenter (2005, p. 54) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นเป็นรูปแบบหนึ่งของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต เป็นการมองนิพจน์โดยภาพรวมมากกว่าการใช้กระบวนการคิดคำนวณทีละขั้นตอน ซึ่งจะรวมถึงความสามารถในการใช้สมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการเพื่อแปลง (Transform) นิพจน์เชิงคณิตศาสตร์เพื่อให้สามารถคิดคำนวณหาคำตอบได้ง่ายขึ้นกว่าการดำเนินการตามลำดับของกระบวนการ

Molina, Castro, Ambrose (2006, p. 5) แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ไม่มีนิยามที่ชัดเจน แต่เป็นที่เข้าใจกันโดยทั่วไปว่า นักเรียนมีแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ เมื่อเขามองเห็นความเกี่ยวข้อง เชื่อมโยงระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างน้อยสองแนวคิด วิเคราะห์และใช้ความเกี่ยวข้อง เชื่อมโยงที่ได้ในการแก้ปัญหา หรือตัดสินใจในการเรียนรู้เกี่ยวกับสถานการณ์หรือมโนทัศน์ทาง คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

Stephens (2006, p. 47) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการใช้การสมมูลกันเพื่อหาค่า ของจำนวนที่ต้องการ โดยอาจมีการอธิบายด้วยถ้อยคำ การใช้ลูกศรหรือแผนภาพอย่างมีเหตุผลบน พื้นฐานของการไม่คำนวณ เพื่อเปรียบเทียบจำนวนคู่หนึ่งที่อยู่คนละด้านของเครื่องหมายเท่ากับ หรือเป็นความสามารถของนักเรียนในการมองเห็นและใช้ความเป็นไปได้อย่างหลากหลายของ จำนวนในประโยคสัญลักษณ์ เช่น การหาค่าของ 34 + 29 นักเรียนที่มีความสามารถทางด้านการคิด เชิงสัมพันธ์จะไม่ใช้วิธีการคำนวณโดยทันทีเมื่อพบปัญหาในข้อดังกล่าว แต่จะอาศัยการมอง ประโยคและเปลี่ยนพจน์ของจำนวนในประโยคจาก 34 + 29 เป็น 33 + 30 และหาคำตอบได้โดยง่าย โดยนำ 33 บวกกับ 30

Jacobs (2007, pp. 260-261) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการมองนิพจน์และ สมการโดยภาพรวม การสังเกตความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ในนิพจน์และสมการ และคิดเชิง สัมพันธ์เป็นวิธีดำเนินการจัดการกับจำนวนด้วยวิธีการที่แตกต่างจากกระบวนการในการคำนวณที ละขั้นตอน ซึ่งการคิดดังกล่าวนี้นักเรียนต้องสามารถมองประโยคสัญลักษณ์ที่กำหนดให้โดย ภาพรวมและใช้สมบัติการสลับที่และเปลี่ยนหมู่มาช่วย เพื่อให้คำนวณง่ายขึ้น เห็นได้จากการคิดเชิง สัมพันธ์ในการนำเสนอวิธีการคิดที่ยืดหยุ่นในการคำนวณโดยใช้สมบัติพื้นฐานของการดำเนินการ เชิงจำนวน

Van de Walle (2007, p. 262) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการสังเกตและใช้ ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสองจำนวนที่อยู่ในแต่ละด้านของเครื่องหมายเท่ากับมากกว่าที่มุ่งใช้ วิธีการคิดคำนวณตามความเป็นจริง

Stephens, Isoda and Inprashita (2007, p. 4) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการมอง ประโยคสัญลักษณ์โดยภาพรวมเครื่องหมายเท่ากับใช้เพื่อแสดงการสมมูล (equivalence) หรือความ สมดุล (balance) รวมถึงความสามารถในการละเว้นรูปแบบของการคิดคำนวณ แต่จะใช้การ เปรียบเทียบจำนวนคู่หนึ่งที่ทราบค่าซึ่งอยู่คนละด้านของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อหาจำนวนที่ไม่ ทราบค่า นอกจากนี้ผู้ที่มีความสามารถทางการคิดเชิงสัมพันธ์ต้องคำนึงถึงทิศทางของการชดเชย ซึ่ง จะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายการดำเนินการที่เกี่ยวข้อง การคิดเชิงสัมพันธ์สามารถนำไปประยุกต์ใช้ใน

การดำเนินการอื่นๆ นอกจากในเรื่องของการบวกและการลบ ได้แก่ การคูณและการหาร และในสาระอื่นๆ ได้แก่ เศษส่วน และทศนิยม เป็นต้น

สรุปได้ว่า การคิดเชิงสัมพันธ์ เป็นการคิดหาความสัมพันธ์ในประโยคสัญลักษณ์ มองภาพรวมทั้งหมดบนประโยคสัญลักษณ์ การใช้การชดเชย การสมมูล รวมไปถึงการใช้ถ้อยคำและลูกศร และสมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการ เพื่อเป็นแนวทางสู่การหาตัวไม่ทราบค่าบนประโยคสัญลักษณ์ โดยไม่ใช้วิธีการคำนวณในการหาคำตอบ

2.3.2 ความสำคัญของการคิดเชิงสัมพันธ์

จากความหมายของการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการใช้การชดเชย และการสมมูลกันเพื่อหาค่าของจำนวนที่ต้องการ โดยถูกใช้อย่างมีเหตุผลบนพื้นฐานของการไม่คำนวณ ซึ่งมีนักการศึกษา ได้กล่าวถึงความสำคัญของการคิดเชิงสัมพันธ์ไว้ดังนี้

วิษณุ นภาพันธ์ (2551, น. 26) กล่าวว่า การส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักมองความสัมพันธ์ของตัวเลขในประโยคสัญลักษณ์ในลักษณะของภาพรวมทั้งหมด ช่วยให้นักเรียนสามารถขยายความเข้าใจไปถึงเรื่องของสมบัติในกรณีทั่วไปของจำนวนและการดำเนินการได้ซึ่งการเรียนรู้พีชคณิตจำเป็นจะต้องอาศัยสมบัติของจำนวนและการดำเนินการเป็นพื้นฐาน

Carpenter and Franke (2001, pp. 155 - 162) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นโครงสร้างรากฐานของการคิดบนประโยคสัญลักษณ์

Carpenter, Franke and Levi (2003, pp. 1 - 9) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์บนประโยคสัญลักษณ์สามารถเชื่อมโยงสู่ความสามารถในการวางนัยทั่วไปทางเลขคณิต

Stephens and Inprasitha (2007, pp. 319 - 326) กล่าวว่า เป็นการเตรียมความพร้อมเกี่ยวกับโครงสร้างพื้นฐานทางเลขคณิต และเป็นพื้นฐานสำหรับการคิดเชิงพีชคณิตและการเรียนพีชคณิตในระดับที่สูงขึ้น

Jacobs (2007, p. 261) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์บนประโยคสัญลักษณ์มีความสำคัญสำหรับการเรียนพีชคณิต เป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการเรียนพีชคณิตและการให้เหตุผลทางพีชคณิต และทำให้การเรียนพีชคณิตสะดวกขึ้นในระดับชั้นต่อไป

Molina, Castro and Castro (2008, pp. 399 - 406) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นองค์ประกอบสำคัญของการคิดเชิงพีชคณิต และพบว่าการคิดเชิงสัมพันธ์นั้นสามารถนำไปใช้เป็นยุทธวิธีในการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ได้ ทั้งนี้เพื่อหลีกเลี่ยงการคำนวณจากทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

Molina and Ambrose (2008, pp. 61 - 80) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นประเด็นหลักในการพิจารณาสำหรับการแก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์ ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นถึงความคิดของนักเรียนในการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์

Stephens (2008, pp. 491-497) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์มีประโยชน์ต่อการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ และพบว่านักเรียนที่ใช้การคำนวณในการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าตัวเดียว เช่น

$43 + \square = 48 + 76,\qquad 39 - 45 = 41 - \square$

$\square \times 5 = 20 \times 15$ และ $21 \div 56 = \square \div 3$

จะไม่ประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าสองตัว ในทางตรงกันข้าม นักเรียนที่ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าตัวเดียวจะประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าสองตัว

Stephens and Xu (2009, pp. 1 - 8) กล่าวว่า นักเรียนที่สามารถคิดเชิงสัมพันธ์บนประโยคสัญลักษณ์นั้นจะส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าสองตัวและความสามารถในการวางนัยทั่วไป

สรุปได้ว่า การคิดเชิงสัมพันธ์มีความสำคัญต่อความสามารถในการวางนัยทั่วไปทางเลขคณิต ตลอดจนเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการให้เหตุผลทางพีชคณิต และการเรียนรู้พีชคณิตทำให้การเรียนพีชคณิตในระดับที่สูงดีขึ้น เป็นยุทธวิธีในการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ได้ ทั้งนี้เพื่อหลีกเลี่ยงการคำนวณจากทั้งสองข้าง และส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าสองตัวและความสามารถในการวางนัยทั่วไป

2.3.3 ลักษณะของการคิดเชิงสัมพันธ์

จากความหมายและความสำคัญของการคิดเชิงสัมพันธ์จะเห็นว่าการคิดเชิงสัมพันธ์มีความสำคัญต่อการเตรียมความพร้อมในการเรียนพีชคณิตในระดับสูงขึ้น และส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าหนึ่งและสองตัว ซึ่งได้มีนักการศึกษากล่าวถึงลักษณะของการคิดเชิงจำนวนไว้ดังนี้

สุภัค หาญพิทักษ์วงศ์ (2553, น. 23) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นความสามารถของนักเรียนในการมองภาพรวมทั้งหมดของประโยค เห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยคและใช้ความสัมพันธ์หาตัวไม่ทราบค่า โดยไม่ใช้วิธีการคำนวณ

Carpenter, Franke and Levi (2003, pp. 1 - 9) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยค เพื่อเป็นแนวทางสู่การหาตัวไม่ทราบค่าบนประโยคสัญลักษณ์

Carpenter, Levi, Franke and Zeringue (2005, pp. 53-59) กล่าวว่า ลักษณะของการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการมองประโยคสัญลักษณ์อย่างมีวิจารณญาณมากกว่าการใช้กระบวนการหรือขั้นตอนการคำนวณในการหาคำตอบ นอกจากนี้การคิดเชิงสัมพันธ์ยังครอบคลุมถึงความสามารถในการใช้สมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการในการแปลงประโยคสัญลักษณ์เพื่อหาคำตอบ เช่น $8 + 4 = \square + 5$ นักเรียนบางคนสามารถหาคำตอบที่ถูกต้องได้โดยการนำ 8 มารวมกับ 4 แล้วพิจารณาว่า 5 รวมกับจำนวนใดแล้วมีผลลัพธ์เท่ากับ 12 ซึ่งเป็นการใช้สมบัติของการเท่ากันในการแสดงความสัมพันธ์ แต่นักเรียนบางคนตระหนักได้ว่า 5 ที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับนั้นมากกว่า 4 ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับอยู่หนึ่ง ดังนั้นจำนวนที่ควรเติมลงในช่องว่างจะต้องน้อยกว่า 8 อยู่หนึ่งด้วย อันเป็นความสามารถในการคิดเชิงสัมพันธ์ ส่วนนักเรียนบางคนมีกระบวนการคิดดังนี้ $8 + 4 = (7 + 1) + 4 = \underline{7} + (1 + 4)$

Hejney, Jirotkova and Kratochvilova (2006, pp. 289-296) กล่าวว่า กระบวนการคิดเชิงสัมพันธ์ เรียกว่า “ยุทธวิธีเชิงความคิดรวบยอด” โดย นักเรียนจะสร้างภาพของปัญหาทั้งหมดขึ้นในใจแล้ววิเคราะห์ปัญหาเพื่อหาโครงสร้างภายใน จากนั้นจึงมองหาความสัมพันธ์ของสมาชิกในประโยคสัญลักษณ์เพื่อสร้างยุทธวิธีในการหาคำตอบ ตรงกันข้ามกับนักเรียนที่ใช้กระบวนการหาคำตอบโดยการคำนวณตามขั้นตอนจะเรียก การแก้ปัญหาเช่นนี้ว่า “ยุทธวิธีตามลำดับขั้นตอน”

Hunter (2007, pp. 421 - 429) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์นั้นเป็นกระบวนการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่า โดยการมองความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับโดยไม่ใช้การคำนวณ และนักเรียนที่ประสบความสำเร็จในการคิดเชิงสัมพันธ์นั้นต้องมีความสามารถในการระบุทิศทางหรือความเปลี่ยนแปลงของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ เพื่อเป็นแนวทางสู่การหาตัวไม่ทราบค่า แต่สิ่งที่สำคัญคือต้องมีความเข้าใจการเท่ากัน

Stephens and Inprasitha (2007, pp. 319 - 326) กล่าวว่า นักเรียนใช้การคิดเชิงสัมพันธ์บนประโยคสัญลักษณ์ในหลายรูปแบบ เช่น ใช้สมบัติของการเท่ากันและการชดเชย ดังนี้

1. ประโยคสัญลักษณ์ $7 + 6 = 8 + 5$ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 บางคนพิจารณาว่า $7 + 6 = 13$ แล้วพิจารณาว่า $13 = \square + 5$ ซึ่งจะได้คำตอบก็คือ 8 นั่นคือ $13 = 8 + 5$ส่วนนักเรียนบางคนอธิบายว่า 5 ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับน้อยกว่า 6 ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับอยู่ 1 ดังนั้นจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างต้องมากกว่า 7 อยู่ 1 จึงจะเกิดความสมดุล นั่นคือ ผลลัพธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน

2. ในกระบวนการคิดทำนองเดียวกัน นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 บางคนใช้ลูกศรแสดงทิศทางของการชดเชยเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของการเท่ากัน เช่น $34 + 29 = 33 + 30$

นักเรียนอธิบายว่าจาก 29 ต้องบวกเพิ่มอีกหนึ่งทำให้ได้ 30 ดังนั้นจะต้องลบ 34 ด้วย 1 เป็น 33 จึงได้คำตอบ

3. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์โดยการแปลงประโยคสัญลักษณ์ที่กำหนดให้เพื่อเป็นยุทธวิธีในการหาคำตอบ เช่น 99 - □ = 90 - 59 นักเรียนเปลี่ยนเป็น (90 + 9) - □ = 90 – 59 และเปลี่ยนเป็น (90 + 9) – (59 + 9) = 90 – 59 ตามลำดับ นอกจากนี้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 บางคนใช้ยุทธวิธีในการเปลี่ยนเครื่องหมายของการดำเนินการบนประโยคสัญลักษณ์ เช่น 39 – 15 = 41 - □ นักเรียนเปลี่ยนเป็น 39 + (-15) = 41 + □ หลังจากนั้นจึงใช้ยุทธวิธีในการหาคำตอบดังข้อ 2 ซึ่งจะได้คำตอบคือ - 17 เป็นต้น

Van de Walle (2007, p. 262) กล่าวว่า ลักษณะการคิดเชิงสัมพันธ์เกิดขึ้นเมื่อนักเรียนสังเกตและใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสองจำนวนที่อยู่ในแต่ละด้านของเครื่องหมายเท่ากับมากกว่าการที่นักเรียนมุ่งใช้วิธีการคำนวณตามความเป็นจริง

Stephens (2007, p. 2) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์จะเกิดขึ้นเมื่อมีการใช้การชดเชยและการสมมูลกันเพื่อหาค่าของจำนวนที่ต้องการ โดยอาจมีการอธิบายเป็นถ้อยคำ การใช้ลูกศรหรือแผนภาพซึ่งใช้เพื่อเปรียบเทียบจำนวนคู่หนึ่งที่อยู่คนละด้านของเครื่องหมายเท่ากับ โดยถูกใช้อย่างมีเหตุผลบนพื้นฐานของการไม่คำนวณ

Stephens et al. (2007, pp. 319 - 326) ได้นิยามลักษณะการคิดเชิงสัมพันธ์ดังนี้

1. การพิจารณาประโยคสัญลักษณ์ของนักเรียนที่มีลักษณะการคิดเชิงสัมพันธ์ต้องมองภาพรวมทั้งหมดของประโยคสัญลักษณ์

2. นักเรียนที่มีลักษณะการคิดเชิงสัมพันธ์จะไม่ใช้วิธีการคำนวณในการหาตัวไม่ทราบค่าของประโยคสัญลักษณ์

3. นักเรียนที่มีลักษณะการคิดเชิงสัมพันธ์ต้องเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญลักษณ์แสดงถึงความสัมพันธ์ที่เท่ากันระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

4. นักเรียนที่มีลักษณะการคิดเชิงสัมพันธ์จะใช้วิธีการเปรียบเทียบคู่ของจำนวนในประโยค เพื่อหาตัวไม่ทราบค่า

Molina and Castro (2008, pp. 399-406) กล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์นั้นสามารถนำไปใช้เป็นยุทธวิธีในการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ได้ ทั้งนี้เพื่อหลีกเลี่ยงการคำนวณจากทั้งสองข้างของประโยคสัญลักษณ์ เช่น 5 + 11 = 6 + □ พบว่า นักเรียนบางคนตระหนักว่าทั้งสองข้างของประโยคสัญลักษณ์ต่างเป็นการบวก และ 6 ทางด้านขวามากกว่า 5 ทางด้านซ้ายอยู่ 1 ดังนั้นจำนวนที่เติมลงในช่องว่างจะต้องน้อยกว่า 11 อยู่ 1 เหล่านี้เป็นความเข้าใจเรื่องความสัมพันธ์และ

คุณสมบัติของการบวก ซึ่งครูผู้สอนควรจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนสามารถหาคำตอบได้โดยปราศจากการคำนวณ นั่นคือ ไม่ควรนำ 11 มารวมกับ 5 แล้วลบด้วย 6

Molina Castro and Mason (2008, p. 76) กล่าวว่า นักเรียนที่แก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์โดยการมองภาพรวมของประโยคทั้งหมดหรือมองโครงสร้างของประโยคแล้วใช้ความสัมพันธ์ของจำนวนในประโยคเพื่อหาคำตอบนั้นเป็นความสามารถในการคิดเชิงสัมพันธ์

Stephens (2008 , pp. 491-497) กล่าวว่า นักเรียนสามารถคิดเชิงสัมพันธ์ในลักษณะของการใช้สมบัติการเท่ากัน การชดเชย หรืออาจใช้ลูกศรแสดงทิศทางของความสัมพันธ์ ซึ่งจะมีประโยชน์ต่อการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าสองตัวต่อไป เช่น ประโยคในลักษณะ 18 + $\square$ = 20 + $\square$ เป็นต้น และประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าสองตัว ไม่ต้องการให้นักเรียนใช้การคำนวณ แต่มีเป้าหมายเพื่อต้องการให้นักเรียนแสดงออกถึงความเข้าใจเกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในการแสดงความสัมพันธ์ หรือระบุความสัมพันธ์ของจำนวนบนประโยคโดยมีเป้าหมายเพื่อความเข้าใจเกี่ยวกับการวางนัยทั่วไปทางคณิตศาสตร์

สรุปได้ว่า ลักษณะของการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการมองความสัมพันธ์ในภาพรวมของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ใช้การชดเชยและการสมมูล รวมถึงการใช้สมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการ เพื่อหาตัวไม่ทราบค่าหรือแก้ปัญหา บนพื้นฐานของการไม่คำนวณ

2.3.4 ยุทธวิธีการคิดเชิงสัมพันธ์ในการบวกและการลบ

ยุทธวิธีที่ใช้ในการบวกและการลบ มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงยุทธวิธีการคิดเชิงสัมพันธ์หลายทัศนะดังนี้

Fuson and Briars (1990, pp. 180-206) ได้ทำการวิจัยพบว่านักเรียนเกรด 1 และ เกรด 2 เรียนรู้ค่าประจำหลัก การบวก และการลบจำนวนที่มีหลายหลัก โดยการใช้แท่งไม้ฐานสิบ (Base-Ten-Blocks) ในการแสดงการอ่านและใช้ตัวเลขในการแสดงจำนวนใน ระบบเลขฐานสิบ และแสดงการบวกและการลบของจำนวนที่มีสี่หลักด้วยการเคลื่อนย้ายแท่งไม้ ขนาดต่างๆ

Fuson (1997, pp. 130-162) ได้ทำการวิจัยพบว่านักเรียน เกรด 1-3 ใช้ในการแก้ปัญหาการบวกและการลบจำนวนหลายหลัก โดยใช้การเอาออก และนำเข้า เช่น การหาผลบวกของ 38 + 26 วิธีคิดแบบแรก นักเรียนจะรวมสามสิบและยี่สิบเป็นห้าสิบ จากนั้นรวมกับแปดเป็นห้าสิบแปดและรวมกับอีกหก ได้คำตอบเป็นหกสิบสี่ วิธีคิดแบบที่สอง นักเรียนจะรวมสามสิบและยี่สิบ เป็นห้าสิบ รวมแปดและหกเป็นสิบสี่ จากนั้นรวมห้าสิบกับสิบจากสิบสี่เป็นหกสิบ ดังนั้นผลรวมที่ได้ทั้งหมดเป็นหกสิบสี่ การหาผลลบของ 62 - 28 วิธีคิดแบบแรก หกสิบเอาออกไปยี่สิบเหลือสี่สิบแล้วเพิ่มอีกสองเป็นสี่สิบสอง เอาออกสองเหลือสี่สิบและ เอาออกอีกหกเหลือสามสิบสี่ วิธีคิดแบบ

ที่สอง หกสิบเอาออกไปยี่สิบเหลือสี่สิบ แต่เอาแปดออกจากสองไม่ได้ ถ้าเอาสองออกจากสอง ก็จะต้องนำหกออกจากที่เหลือดังนั้นผลลบจึงได้สามสิบสี่ วิธีคิดแบบที่สาม หกสิบเอาออกสามสิบเหลือสามสิบสอง แต่ต้องการเอาออกเพียงยี่สิบแปดดังนั้นต้องเพิ่มอีกสองจึงได้คำตอบเป็นสามสิบสี่

Carpenter (1999, pp. 7-22) กล่าวว่า ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาเรื่องการบวกและการลบมีดังต่อไปนี้

1. ยุทธวิธีแบบจำลองโดยตรง (Direct Modeling Strategies) ใช้แก้ปัญหาหลายๆ ปัญหา เช่น ปัญหาการรวม (ไม่ทราบผลลัพธ์) หรือ ส่วนย่อย-ส่วนย่อย-ส่วนรวม (ไม่ทราบผลรวม) รูปแบบของยุทธวิธีดังกล่าวมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.1 การหาส่วนรวมทั้งหมด (Joining All) นักเรียนจะใช้วัตถุหรือนิ้วมือเพื่อแทน จำนวนของการบวก และจะนับจำนวนในเซตทั้งสองนั้นรวมกัน เช่น โรบินมีรถของเล่น 4 คัน ในวันเกิดเพื่อนให้มาอีก 7 คัน โรบินจะมีรถทั้งหมดกี่คัน ในการแก้ปัญหานักเรียนจะนับตัวนับเป็นสองกอง กองละ 4 และกองละ 7 และจะนับตัวนับทั้งหมดทีละหนึ่งรวมกันเป็น 13

1.2 การหาส่วนที่เพิ่ม (Joining To) คล้ายกับยุทธวิธีแรก แต่จะใช้แก้ปัญหาการรวม (ไม่ทราบค่าเปลี่ยนแปลง) เช่น โรบินมีรถของเล่น 4 คัน เพื่อนให้มาอีกจำนวนหนึ่งในวันเกิดรวมแล้วมี 11 คัน เพื่อนให้มากี่คัน การแก้ปัญหานักเรียนจะนับตัวนับกองหนึ่งซึ่งมีจำนวน 4 และจะใช้การนับตัวนับเพิ่มทีละหนึ่งจนกระทั่งถึง 11 จำนวนของตัวนับที่นับเพิ่มจะเป็นคำตอบของการแก้ปัญหาดังกล่าว สิ่งที่สำคัญอย่างหนึ่งสำหรับยุทธวิธีนี้คือ นักเรียนต้องสามารถแบ่งแยกเซตที่นับเพิ่มจากเซตในตอนแรกได้โดยอาจแยกวัตถุที่นับเพิ่มไว้ต่างหาก หรือใช้ตัวนับที่มีสีแตกต่างกัน

1.3 การหาส่วนที่เหลือ (Separating From) ใช้แก้ปัญหาการหาส่วนที่เหลือ (ไม่ทราบผลลัพธ์) ที่รวมการลบหรือการแบ่งออก ปริมาณที่ตั้งต้นจะมีค่ามากและปริมาณที่มีค่าน้อยกว่าจะถูกนำออกจากปริมาณที่ตั้งต้น เช่น คลอเรลมีปลา 12 ตัว ให้โรเจอร์ไป 5 ตัว คลอเรลจะเหลือปลากี่ตัว ในการแก้ปัญหานี้นักเรียนจะนับตัวนับกองหนึ่งจำนวน 12 ตัว และจะนำตัวนับจำนวน 5 ตัว ออกจากกองดังกล่าว และนับตัวนับที่เหลือซึ่งจะเป็นคำตอบการแก้ปัญหาในข้อนี้

1.4 การหาส่วนที่แบ่งออกไป (Separating To) ใช้แก้ปัญหาการหาส่วนที่แบ่ง ออกไป (ไม่ทราบค่าเปลี่ยนแปลง) ที่มีการกระทำของการแบ่งออก ยุทธวิธีนี้คล้ายกับการหาส่วนที่เหลือ วัตถุจะถูกนับออกจากปริมาณที่มากกว่าเพื่อให้เท่ากับปริมาณอีกปริมาณหนึ่งซึ่งน้อยกว่า เช่น โรเจอร์มีสติกเกอร์ 13 ชิ้น เขาให้สติกเกอร์บางส่วนกับคลอเรล เขาเหลือสติกเกอร์ 4 ชิ้น เขาให้สติกเกอร์คลอเรลไปกี่ชิ้น การแก้ปัญหานี้นักเรียนจะนับตัวนับกองหนึ่งจำนวน 13 ตัว และจะนำตัวนับออกทีละหนึ่งจากกองดังกล่าวจนกระทั่งเหลือเท่าจำนวนที่ต้องการ จำนวนของตัวนับที่

นับออกไปจะเป็นคำตอบของการแก้ปัญหาในข้อนี้ การแก้ปัญหาโดยยุทธวิธีนี้จะใช้การลองผิดลองถูกอยู่บ้าง เพราะนักเรียนไม่สามารถนับวัตถุออกได้โดยง่าย นักเรียนจะต้องนับวัตถุที่เหลือหลังจากที่นำออกว่าจะมีปริมาณเท่ากับวัตถุที่คงเหลือหรือไม่

1.5 ยุทธวิธีการจับคู่ (Matching strategy) ใช้แก้ปัญหาเปรียบเทียบ (ไม่ทราบค่าแตกต่าง) ยุทธวิธีนี้ใช้เพื่อแก้ปัญหาที่มีความสมนัยกัน 1 ต่อ 1 ระหว่างสมาชิกของเซตสองเซตขณะที่เซตหนึ่งถูกจับคู่หมด การนับสมาชิกที่ไม่ถูกเข้าคู่กันก็จะเป็นคำตอบ เช่น มาร์คมีหนู 6 ตัว จอยมีหนู 11 ตัว จอยมีหนูมากกว่ามาร์คกี่ตัว ในการแก้ปัญหานี้ นักเรียนจะนับตัวนับออกเป็นสองเซต เซตหนึ่งมีจำนวน 6 ตัวและอีกเซตหนึ่งมี 11 ตัว โดยจะนำตัวนับในเซตที่มี 6 ตัวมาวางเรียงเป็นแถว และนำตัวนับที่อยู่ในกอง 11 ตัวมาเรียงโดยให้อยู่ในแนวเดียวกันจำนวนตัวนับที่ไม่มีคู่จะเป็นคำตอบของการแก้ปัญหาในข้อนี้

1.6 การลองผิดลองถูก (Trial and Error) ให้สำหรับแก้ปัญหาในรูปแบบปัญหาที่ไม่ทราบค่าตั้งต้นซึ่งถือเป็นปัญหาที่ยาก เนื่องจากปริมาณตั้งต้นไม่รู้จึงไม่สามารถถูกแทนด้วยจำนวนใดได้ นักเรียนจึงใช้วิธีการแก้ปัญหาแบบลองผิดลองถูก เช่น โรบินมีรถของเล่นอยู่จำนวนหนึ่ง ในวันเกิดเพื่อนให้มาอีก 5 คัน รวมเป็น 11 คันโรบินมีรถของเล่นก่อนวันเกิดกี่คัน ในการแก้ปัญหานี้นักเรียนจะลองผิดลองถูกโดยกำหนดตัวนับตั้งต้น เช่นนับตัวนับตั้งต้น 3 และนับเพิ่มไปอีก 5 และ เมื่อนับตัวนับทั้งหมดรวมเป็น 8 ซึ่งน้อยกว่า 11 นักเรียนก็จะลองกำหนดตัวนับตั้งต้นใหม่และก็ทำในลักษณะเดียวกันนี้

2. ยุทธวิธีการนับ (Counting Strategies) ยุทธวิธีการนับเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและเป็นนามธรรมกว่าการใช้แบบจำลองด้วยวัตถุทางกายภาพ ในการใช้ยุทธวิธีดังกล่าวนักเรียนจะต้องระลึกได้ว่าไม่จำเป็นในการสร้างวัตถุทางกายภาพ รูปแบบของยุทธวิธีดังกล่าวมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 การนับเพิ่มจากจำนวนแรก (Counting On From First) ใช้สำหรับการแก้ปัญหาการรวม (ไม่ทราบผลลัพธ์) และปัญหาส่วนย่อย-ส่วนย่อย-ส่วนรวม (ไม่ทราบส่วนรวม) นักเรียนจะใช่วิธีการนับต่อจากจำนวนแรก ลำดับของการนับจะสิ้นสุดลงเมื่อนักเรียนนับจำนวนที่สองเสร็จลง เช่น โรบินมีรถของเล่น 4 คัน ในวันเกิดเพื่อนให้มาอีก 7 คัน โรบินจะมีรถทั้งหมดกี่คัน ในการแก้ปัญหานักเรียนจะนับต่อจากจำนวนแรกคือ 4 โดยจะนับเพิ่มทีละหนึ่ง พร้อมกับชูนิ้วเพิ่มทีละหนึ่งเช่นกัน การนับจะสิ้นสุดลงเมื่อนักเรียนชูนิ้วครบ 7 นิ้ว ผลจากการนับก็จะเป็นคำตอบของการแก้ปัญหาในข้อนี้

2.2 การนับเพิ่มจากจำนวนที่มากกว่า (Counting on from Larger) ยุทธวิธีนี้จะมีลักษณะคล้ายกับยุทธวิธีการนับเพิ่มจากจำนวนแรกแต่นักเรียนจะนับเพิ่มจากจำนวนที่มีค่า

มากกว่า ระหว่างจำนวนสองจำนวนที่กำหนด เช่น โรบินมีรถของเล่น 4 คัน ในวันเกิดเพื่อนให้มาอีก 7 คัน โรบินจะมีรถทั้งหมดกี่คัน ในการแก้ปัญหานักเรียนจะนับต่อจากจำนวน 7 และนับเพิ่มไปจนครบ 4 นิ้วผลจากการนับก็จะเป็นคำตอบของการแก้ปัญหาในข้อนี้

2.3 การนับเพิ่มไปสู่คำตอบ (Counting On To) สำหรับแก้ปัญหาการรวม (กรณีไม่ทราบค่าเปลี่ยนแปลง) ทำได้โดยการนับต่อจากจำนวนแรกเพื่อไปหาจำนวนที่เป็นคำตอบ และคำตอบจะเป็นจำนวนที่นับเพิ่มขึ้นของการนับจากจำนวนตั้งต้นจนเสร็จสิ้น เช่น สมศักดิ์มีรถของเล่น 8 คัน เพื่อนให้มาอีกจำนวนหนึ่งในวันเกิด รวมมีทั้งหมด 13 คัน เพื่อนให้รถของเล่นในวันเกิดกี่คัน ในการแก้ปัญหานักเรียนจะนับเพิ่มต่อจาก 8 นั่นคือเริ่มนับ 9 จนถึง 13 ซึ่งเพิ่มไป 5 จำนวน ดังนั้นคำตอบก็คือ 5

2.4 การนับลด (Counting Down) สำหรับแก้ปัญหาการแบ่งแยก (กรณีไม่ทราบผลลัพธ์หรือการเปลี่ยนแปลง) ทำได้โดยเริ่มนับจากจำนวนที่มีค่ามากกว่าในปัญหาและนับย้อนกลับ เช่น น้องแก้วมีปลา 11 ตัว ให้น้องต้นไป 3 ตัว แก้วจะเหลือปลากี่ตัว นักเรียนจะใช้นิ้วมือและนับลดโดยเริ่มนับจาก 11 และนับลดไป 3 จำนวนแล้วดูจำนวนนิ้วมือที่คงเหลือ

2.5 การนับลดไปสู่คำตอบ (Counting Down To) สำหรับปัญหาแบ่งแยก (ไม่ทราบค่าเปลี่ยนแปลง) ทำได้โดยนับย้อนกลับโดยเริ่มจากจำนวนที่มากกว่าไปยังจำนวนที่น้อยกว่าในปัญหาที่กำหนด เช่น กล้ามีปลา 12 ตัว ให้โรเจอร์ไปจำนวนหนึ่ง คอเรลเหลือปลา 8 ตัว คอเรลให้ปลาโรเจอร์ไปกี่ตัว นักเรียนจะนับย้อนกลับโดยเริ่มจาก 12 จนถึง 8 ขณะนับลดลงหนึ่งก็จะชูนิ้วขึ้นหนึ่งนิ้ว เมื่อนับลดถึง 8 ก็จะดูจำนวนนิ้วมือที่ชูขึ้นมา

Carpenter et al (1999, p. 24) กล่าวว่า ยุทธวิธี Derived Facts เป็นยุทธวิธีที่ใช้ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับจำนวน (Number Facts) ซึ่งเป็นยุทธวิธีที่มีความยืดหยุ่น ตัวอย่างเช่น เมื่อนักเรียนได้เรียนรู้การบวกแบบสองเท่า (doubles) ได้แก่ 4 + 4 หรือ 7 + 7 และเรียนรู้การบวกทบสิบ ได้แก่ 7 + 3 หรือ 4 + 6 นักเรียนสามารถประยุกต์ความรู้ดังกล่าวเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา เช่น มีกบนั่งอยู่บนใบบัว 6 ตัว กระโดดมาเพิ่มอีก 8 ตัว รวมมีกบกี่ตัว นักเรียน 4 คนตอบได้อย่างทันทีทันใดว่า 14 วิธีการคิดของนักเรียนทั้ง 4 คนมีดังนี้

คนแรก : เพราะ 6 บวก 6 เป็น 12 และมีเพิ่มอีก 2 จึงรวมเป็น 14

คนที่สอง : 8 บวก 8 เป็น 16 แต่ในกรณีนี้คือ 8 บวกกับ 6 ซึ่ง 6 น้อยกว่า 8 อยู่ 2 ดังนั้นคำตอบจึงเป็น 14

คนที่สาม : นำ 1 ออกจาก 8 มารวมกับ 6 ซึ่งจะเป็น 7 กับ 7 ดังนั้นคำตอบจึงเป็น 14

คนที่สี่ : 8 บวกกับ 2 เป็น 10 และมีอีก 4 ดังนั้นคำตอบจึงเป็น 14

การหาคำตอบของนักเรียนในลักษณะที่กล่าวมาขึ้นอยู่บนพื้นฐานความเข้าใจในด้านความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน

Reys (2004, pp. 200-202) กล่าวว่า ตัวแบบที่ใช้แสดงการบวก เช่น ตัวนับ (Counters) ลูกบาศก์ (Linking cubes) เส้นจำนวน (Number line) สเกลสมดุล (Balance scale) ซึ่งแต่ละตัวแบบนั้นมีแนวคิดในการบวกว่า การบวก หมายถึง การหาจำนวนทั้งหมด ตัวแบบสำหรับการบวกสามารถนำไปใช้ในเรื่องการลบได้ ซึ่งแต่ละตัวแบบสามารถนำไปประยุกต์กับสามสถานการณ์ซึ่งนำไปสู่การลบ คือ (1) การแบ่งแยกหรือการเอาออกเป็นการนำปริมาณๆ หนึ่งออกจากปริมาณที่กำหนด เช่น แอนมีลูกโป่ง 7 ลูก ให้นักเรียนไป 4 ลูก เหลือลูกโป่งเท่าไร (2) ปัญหาเปรียบเทียบหรือการหาปริมาณที่แตกต่างกันของสองปริมาณ ซึ่งจะใช้การจับคู่กัน 1 ต่อ 1 และพิจารณาปริมาณที่เหลือ เช่น แอนมีลูก 7 ลูก โรสมี 4 ลูก แอนมีลูกโป่งมากกว่าโรสกี่ลูก และ (3) ปัญหาส่วนย่อย-ส่วนรวม (part-whole) เป็นปัญหาซึ่งเซตของวัตถุจะถูกแบ่งเป็นสองเซตซึ่งจะรู้จำนวนรวมทั้งหมด ส่วนย่อยเพียงหนึ่งส่วน และให้หาปริมาณของส่วนย่อยอีกหนึ่งส่วน เช่น แอนมีลูกโป่ง 7 ลูก เป็นสีแดง 4 ลูก ที่เหลือเป็นสีฟ้า แอนมีลูกโป่งสีฟ้ากี่ลูก

สรุปได้ว่า ยุทธวิธีการคิดเชิงสัมพันธ์ในการบวกและการลบ ได้แก่ การใช้แท่งไม้ฐานสิบ (Base-Ten-Blocks) ใช้การเอาออกและนำเข้า การหาส่วนรวมทั้งหมด (Joining All) การหาส่วนที่เพิ่ม (Joining To) การหาส่วนที่เหลือ (Separating From) การหาส่วนที่แบ่งออกไป (Separating To) ยุทธวิธีการจับคู่ (Matching strategy) การลองผิดลองถูก (Trial and Error) ยุทธวิธีการนับ (Counting Strategies) การนับเพิ่มจากจำนวนแรก (Counting On From First) การนับเพิ่มจากจำนวนที่มากกว่า (Counting On From Larger) การนับเพิ่มไปสู่คำตอบ (Counting On To) การนับลด (Counting Down) การนับลดไปสู่คำตอบ (Counting Down To) ยุทธวิธี Derived Facts และตัวแบบที่ใช้แสดงการบวก

2.3.5 การวิเคราะห์กรอบเพื่อศึกษาการคิดเชิงสัมพันธ์

จากการศึกษาและวิเคราะห์ลักษณะและยุทธวิธีของการคิดเชิงสัมพันธ์ สรุปได้ดังแสดงในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1

สรุปลักษณะและยุทธวิธีของการคิดเชิงสัมพันธ์

ชื่อนักการศึกษา	ลักษณะและยุทธวิธีของการคิดเชิงสัมพันธ์
Carpenter, Franke and Levi	การพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน

(ต่อ)

ตารางที่ 2.1(ต่อ)

ชื่อนักการศึกษา	ลักษณะและยุทธวิธีของการคิดเชิงสัมพันธ์
Hejney, Jirotkova and Kratochvilova	การสร้างภาพของปัญหาทั้งหมด
	การมองหาความสัมพันธ์ในประโยคสัญลักษณ์
Hunter	การมองความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ
Stephens and Inprasitha	การใช้สมบัติของการเท่ากันและการชดเชย
	การใช้ยุทธวิธี
Van de Walle	การสังเกต
	การมองความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ
	ไม่มุ่งคำนวณ
Stephens	การชดเชย
	การสมมูล
	การอธิบายเป็นถ้อยคำ
	การใช้ลูกศรหรือแผนภาพ
	การไม่คำนวณ
Stephens et al.	การมองภาพรวมทั้งหมดของ ประโยคสัญลักษณ์
	ไม่ใช้การคำนวณ
	การเปรียบเทียบคู่ของจำนวนในประโยค
Molina, Castro and Castro	การหลีกเลี่ยงการคำนวณ
	การใช้ยุทธวิธี
Molina Castro and Mason	การมองภาพรวมของประโยคทั้งหมด
	การมองโครงสร้างของประโยค
	การใช้ความสัมพันธ์ของจำนวนในประโยค

(ต่อ)

ตารางที่ 2.1(ต่อ)

ชื่อนักการศึกษา	ลักษณะและยุทธวิธีของการคิดเชิงสัมพันธ์
Stephens (2008 , p. 491-497)	การใช้สมบัติการเท่ากัน
	การชดเชย
	การใช้ลูกศรแสดงทิศทางของความสัมพันธ์
สุภัค หาญพิทักษ์วงศ์	การมองภาพรวมทั้งหมดของประโยค
	เห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในประโยค และใช้ความสัมพันธ์หาตัวไม่ทราบค่า
	ไม่ใช้วิธีการคำนวณ
Fuson and Briars	แท่งไม้ฐานสิบ
Fuson	การเอาออกและนำเข้า
Carpenter	ยุทธวิธีแบบจำลองโดยตรง ได้แก่ การนับส่วนรวมทั้งหมด การหาส่วนที่เพิ่ม การหาส่วนที่เหลือ การหาส่วนที่แบ่งออกไป การจับคู่ และการลองผิดลองถูก
	ยุทธวิธีการนับ ได้แก่ การนับเพิ่มจากจำนวนแรก การนับเพิ่มจากจำนวนที่มากกว่า การนับเพิ่มไปสู่คำตอบ การนับลด การนับลดไปสู่คำตอบ
Carpenter et al	ยุทธวิธี Derived Facts
Reys	การใช้ตัวแบบ

สรุปได้ว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นการมองหาความสัมพันธ์ในประโยคสัญลักษณ์ มองภาพรวมทั้งหมดบนประโยคสัญลักษณ์ การใช้การชดเชย การสมมูล รวมไปถึงการใช้ถ้อยคำและลูกศร และสมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการ เพื่อเป็นแนวทางสู่การหาตัวไม่ทราบค่าบนประโยคสัญลักษณ์ โดยไม่ใช้วิธีการคำนวณในการหาคำตอบ

2.3.6 การพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์

การคิดเชิงสัมพันธ์สามารถพัฒนาได้ตั้งแต่ระดับประถมศึกษา โดยครูผู้สอนสามารถกระทำควบคู่กับการสอนเนื้อหาต่างๆ ที่สำคัญในหลักสูตร เช่น การเรียนเกี่ยวกับการขยายแบบรูปและความสัมพันธ์ สมบัติของจำนวนและการดำเนินการ และการคิดเชิงสัมพันธ์ผ่านทางเนื้อหาของ

ประโยคสัญลักษณ์แบบถูกผิด (NCTM. 2000, p. 159) ในประเด็นเกี่ยวกับประโยคสัญลักษณ์นี้ นักวิจัยหลายท่าน (Carpenter;et al.2005, pp. 53 -59 ; Hunter. 2007, pp. 421 - 429 ; Molina, Castro and Castro. 2008, pp. 399 - 406 ; Stephens and Inprasitha. 2007, pp. 319 - 326 ; Stephens. 2008, pp. 491-497 ; Stephens and Xu. 2009, p. 1 - 8) พบว่า นักเรียนเพียงส่วนน้อยเท่านั้นที่ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ในการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะสนับสนุน ส่งเสริม และพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนระดับประถมศึกษา ซึ่งได้มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงการพัฒนาความคิดเชิงสัมพันธ์ไว้ดังนี้

Carpenter et al (2005, pp. 53 - 59) กล่าวว่า ควรจัดหาโอกาสให้นักเรียนระดับประถมศึกษาได้พัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ผ่านทางกระบวนการเรียนการสอนในชั้นเรียน เพราะการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นเครื่องมือสำหรับการเรียนเลขคณิต ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการเรียนพีชคณิต และการคิดเชิงสัมพันธ์สามารถพัฒนาผ่านทางการเรียนเกี่ยวกับประโยคสัญลักษณ์ เช่น ให้นักเรียนพิจารณาประโยคว่าเป็นจริงหรือเท็จ ผ่านทางการเรียนสมบัติเฉพาะเกี่ยวสมบัติของจำนวน เช่น $38 + 47 = 47 + 38$ เป็นประโยคที่เป็นจริงโดยสมบัติการสลับที่สำหรับการบวก หรือการเรียนเกี่ยวกับสมบัติการแจกแจงก็สามารถทำได้ทั้งนี้ ครูผู้สอนต้องค้นหาวิธีการคิดของนักเรียนในเบื้องต้น แล้วหาวิธีการช่วยเหลือให้นักเรียนเกิดทักษะและความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการคิดเชิงสัมพันธ์ให้ได้

Stephens (2006 , pp. 249 - 278) กล่าวว่า จากความเข้าใจที่ไม่ลึกซึ้งของนักเรียนเกี่ยวกับการเท่ากัน ทั้งที่การเท่ากันนั้นนำมาใช้แสดงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่พบได้บ่อย จึงกลายเป็นปัญหาที่ผู้เกี่ยวข้องทางการศึกษาต้องให้ความสนใจโดยเฉพาะครูผู้สอนต้องจัดหาโอกาสประสบการณ์หรือให้คำแนะนำแก่นักเรียนเพื่อเป็นแนวทางสู่การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับการคิดเชิงสัมพันธ์ ซึ่งถือเป็นประเด็นหลักอย่างหนึ่งที่นักเรียนระดับประถมศึกษาต้องได้รับการสนับสนุน โดยอาจเริ่มต้นตั้งแต่การแสดงการเท่ากันโดยไม่มีการดำเนินการเข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น $8 = 8$ หรือส่งเสริมการอภิปรายเกี่ยวกับประโยคสัญลักษณ์แบบถูกผิด หรือการหาคำตอบบนประโยค จำนวนที่มีตัวไม่ทราบค่าในรูปแบบของการเติมคำตอบลงในช่องว่าง หรือตัวไม่ทราบค่าอื่น ๆ เช่น $37 + 54 = \square + 55$ หรือ $44 + 29 = 26 + 45 + a$ แล้วหายุทธวิธีที่ส่งเสริมให้นักเรียนหาคำตอบจากประโยคเหล่านี้โดยไม่ใช้การคำนวณ

Hunter (2007, pp. 421 -429) กล่าวว่า แนวทางหนึ่งในการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงสัมพันธ์นั้นครูผู้สอนต้องจัดหาโอกาสให้กับนักเรียนอย่างเสมอภาคจากสถานการณ์ที่ท้าทายความคิด และส่งเสริมการคิดเชิงสัมพันธ์แม้ว่าจะเป็นภาระที่หนักมากก็ตาม

Stephens and Inprasitha (2007, pp. 319-326) กล่าวว่า ประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่านั้นการแสดงการเท่ากันและการชดเชย รวมถึงความรู้เกี่ยวกับทิศทางของการชดเชยเป็นกุญแจที่สำคัญสองอย่างของการคิดเชิงสัมพันธ์ ในกระบวนการเรียนการสอนนักเรียนระดับประถมศึกษาจะไม่เกิดการคิดเชิงสัมพันธ์หากผู้สอนยังมีวิสัยทัศน์เกี่ยวกับการคิดเชิงตัวเลขและการคำนวณอย่างเดียว เพราะการคิดเชิงสัมพันธ์นั้นเป็นการหาคำตอบโดยไม่มีการคำนวณ อีกทั้งการเข้าใจโครงสร้างของการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการเรียนพีชคณิตในระดับมัธยมศึกษาต่อไป ดังนั้นครูผู้สอนควรกำหนดคำถามเป็นประโยคเปิดเพื่อไม่ให้เป็นการจำกัดกรอบความคิดของนักเรียน นอกจากนี้ คุณลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถในการการคิดเชิงสัมพันธ์ว่าควรมีกระบวนการในการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ คือ มองภาพรวมของประโยคทั้งหมด ให้มองเครื่องหมายเท่ากับเป็นการแสดงการเท่ากันของจำนวนทั้งสองด้าน เปรียบเทียบคู่ของจำนวนที่ทราบค่าแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อเป็นหนทางไปสู่การหาตัวไม่ทราบค่าและกำหนดทิศทางของการชดเชยซึ่งขึ้นอยู่กับการดำเนินการที่กำหนดให้

Molina, Castro and Castro (2008, pp. 341 - 368) กล่าวว่า แม้นักเรียนจำนวนมากจะใช้การคำนวณในการแก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์ แต่บางครั้ง การคิดเชิงสัมพันธ์จะเกิดขึ้นเองเมื่อครูผู้สอนมีการสนับสนุนจากกระบวนการเรียนการสอน ซึ่งเด็กสามารถนำการคิดเชิงสัมพันธ์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์ ดังนั้น การคิดเชิงสัมพันธ์จึงควรมีการสอดแทรกในกระบวนการจดการเรียนการสอน เพื่อช่วยเหลือนักเรียนในการพิจารณาโครงสร้างของประโยคบนพื้นฐานของประสบการณ์และความรู้ แนวทางหนึ่งคือการให้นักเรียนหาวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหาบนประโยคสัญลักษณ์ประโยคเดียวกัน แล้วแสดงความชื่นชมกับนักเรียนที่สามารถอธิบายหรือหาคำตอบได้บนพื้นฐานของการคิดเชิงสัมพันธ์ และการสอนโดยโดยใช้การคิดเชิงสัมพันธ์เพื่อหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ควรได้รับการสนับสนุนอย่างเป็นทางการ

สรุปได้ว่า วิธีการพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนนั้นสามารถกระทำได้หลากหลายแนวทาง ประเด็นที่สำคัญคือครูผู้สอนควรจัดหาโอกาสให้นักเรียนระดับประถมศึกษาได้พัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์โดยการสอดแทรกผ่านกระบวนการเรียนการสอนในชั้นเรียน หรือกระทำควบคู่กับการสอนสาระอื่น ๆ ที่สำคัญในหลักสูตร เช่น ความสัมพันธ์บนประโยคสัญลักษณ์โดยมีการกำหนดคำถามเป็นประโยคเปิดเพื่อมิให้เป็นการจำกัดกรอบความคิดของนักเรียน อาจเริ่มต้นการพัฒนาจากความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ จนไปสู่การใช้ยุทธวิธีในการหาคำตอบ

2.3.7 การคิดเชิงสัมพันธ์ในเลขคณิตและพีชคณิต

ได้มีนักการศึกษากล่าวถึงการคิดเชิงสัมพันธ์ในเลขคณิตและพีชคณิตไว้ดังนี้

NCTM (2000, p. 6) และ Kilpatrick et al (2001, p. 9 อ้างถึงใน Carpenter et al, 2005) กล่าวว่า การสอนให้นักเรียนมีความคล่องแคล่วด้านวิธีการในเลขคณิตควรต้องดำเนินการอย่างต่อเนื่องเพราะเป็นเป้าหมายพื้นฐานของหลักสูตรเลขคณิต แต่ความคล่องแคล่วด้านวิธีการไม่ได้เกี่ยวข้องกับการคิดคำนวณเพียงอย่างเดียวยังประกอบด้วยความยืดหยุ่นในการเลือกว่าจะใช้วิธีการอย่างไรและเมื่อใด นั่นคือเป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์

Carpenter et al (2005, p. 6) ได้อธิบายว่าการสอนเลขคณิตแบบเดิมโดยมากมุ่งเน้นการดำเนินการในกระบวนการตามขั้นตอนต่าง ๆ เพื่อให้ได้คำตอบเดียวที่เป็นคำตอบจากการคิดคำนวณ แต่ในพีชคณิตมุ่งเน้นความสัมพันธ์ เช่น การแก้สมการพีชคณิต คือ การเปลี่ยนแปลงสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชื่อมโยงกัน โดยที่ตัวแปร x อาจหมายถึงจำนวนหนึ่ง หรือหลายจำนวน ซึ่งอันที่จริงแล้วความเชื่อมโยงระหว่างเลขคณิตกับพีชคณิตนั้นใกล้ชิดกันมาก ตัวอย่างเช่น 40 + 50 ถ้าใช้วิธีการเลขคณิตก็คือ นำ 40 บวกกับ 50 ถ้าใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ก็คือ 4 ในหลักสิบบวกกับ 5 ในหลักสิบ ถ้าให้ y แทนหลักสิบก็จะได้ 4y + 5y นั่นคือใช้ วิธีการทางพีชคณิต ทั้งวิธีการทางเลขคณิตและวิธีการทางพีชคณิตต่างก็ใช้สมบัติการแจกแจงเป็นพื้นฐานสำหรับการบวก 4 กับ 5 ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 40 + 50 &= (4 \times 10) + (5 \times 10) \\ &= (4 + 5) \times 10 \\ &= 9 \times 10 \\ 4y + 5y &= (4 + 5)\,y \\ &= 9y \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าทั้งเลขคณิตและพีชคณิตมาจากความคิดพื้นฐานเดียวกัน

Jacob et al (2007, p. 28) กล่าวว่า แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์นี้ แสดงให้เห็นถึงการปรับเปลี่ยนระดับรากฐานไปจากการเน้นเลขคณิตที่คิดคำนวณหาคำตอบเพียงอย่างเดียวไปเน้นพีชคณิตโดยการการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ควบคู่ไปด้วยกัน ซึ่งในการศึกษาเลขคณิตแบบดั้งเดิมได้แก่ หัวข้อ การบวก การลบ การคูณ และการหาร โดยปกติแล้วจะเป็นการแสดงไปตามลำดับขั้นตอนจนได้คำตอบเป็นจำนวนหนึ่งจำนวน ซึ่งเป็นคำตอบที่ได้จากการคิดคำนวณ ในทางตรงกันข้าม การแก้สมการพีชคณิตจะมีลักษณะแตกต่างออกไป สมการพีชคณิตแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างสองนิพจน์และสามารถหาคำตอบได้จากการแปลงรูปอย่างต่อเนื่องของสมการ นักเรียนจำเป็นต้องเข้าใจว่าผลที่ได้จากการแปลงรูปของสมการในแต่ละขั้นตอนนั้นยังคงเท่ากับสมการแรก

แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์จะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์สำคัญที่ให้คำจำกัดความแก่เลขคณิตและพีชคณิต อย่างไรก็ตามในทางเลขคณิตนั้น ความสัมพันธ์เหล่านี้มักจะถูกมองข้าม ดังนั้นโดยการเน้นที่แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ครูสามารถบูรณาการแนวคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์เข้ากับการเรียนเลขคณิต เพื่อสอนนักเรียนให้เกิดทั้งความคิดรวบยอดและทักษะที่นักเรียนจะได้สั่งสมในระดับประถมศึกษา จนได้รับการพัฒนาและสอดรับกับความคิดรวบยอดและทักษะที่นักเรียนจำเป็นต้องมีไปใช้ในการเรียนพีชคณิตต่อไป แม้ว่านักเรียนอาจจะรู้จักสมบัติการแจกแจงอย่างผิวเผิน แต่ก็เป็นพื้นฐานสำหรับการคูณจำนวนหลายหลักในการคิดคำนวณของเลขคณิต เช่น

$$78 \times 5 = (70 + 8) \times 5$$
$$= 70 \times 5 + 8 \times 5$$

และสำหรับวิธีการบวกที่คิดขึ้นโดยนักเรียนหลายคน เช่น

$$57 + 68 = 50 + 60 + 7 + 8$$
$$= (5 + 6) \times 10 + 15$$
$$= 125$$

สมบัติการแจกแจงนี้ ยังเป็นพื้นฐานของการบวกในการคำนวณทางพีชคณิต เช่น

$$6y + 4y = (6 + 4)\,y$$
$$= 10y$$

การพัฒนาความเข้าใจความสัมพันธ์นี้ ในการเรียนเลขคณิตอาจจะต้องใช้เวลานานเพื่อที่จะไม่เกิดความเข้าใจคลาดเคลื่อนทางพีชคณิต เช่น

$6x + 3y = 9xy$ หรือ $5(y + 8) = 5y + 8$

สรุปได้ว่าการที่นักเรียนมีความสามารถใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในเลขคณิตจะส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

2.4 การประเมินการคิดเชิงสัมพันธ์

การประเมินการคิดเชิงสัมพันธ์ได้มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงการประเมินการคิดเชิงสัมพันธ์ ไว้ดังนี้

Carpenter and Moser (1984, pp. 179-202) กล่าวว่า เกณฑ์การประเมินนักเรียนเกรด 1-3 ที่แก้ปัญหาในเรื่องการบวกและการลบ ซึ่งได้แบ่งการดำเนินการของนักเรียนออกเป็น 5 ระดับ ดังนี้

ระดับ 0 นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาในเรื่องการบวกและการลบได้

ระดับ 1 นักเรียนมีข้อจำกัดในด้านวิธีการที่ใช้ สามารถใช้วิธีการปฏิบัติจริงได้เท่านั้นอาจใช้ นิ้วมือช่วยในการหาคำตอบ การแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวกจะใช้วิธีการนับ ส่วนการแก้ปัญหาเรื่อง การลบอาจใช้วิธีการนับเพิ่ม การจำแนกและการจับคู่ นักเรียนที่อยู่ในระดับนี้ไม่สามารถแก้ปัญหาระคนที่มีทั้งการบวกและการลบได้

ระดับ 2 นักเรียนสามารถส่งผ่านวิธีการที่สร้างตัวแบบโดยตรงไปสู่วิธีการนับ และสามารถใช้วิธีการทั้งสองเพื่อแก้ปัญหาและใช้วิธีการนับสิ่งของและการนับเพิ่ม

ระดับ 3 นักเรียนสามารถแสดงออกถึงลักษณะที่อยู่ภายในตัวแบบโดยตรง ส่วนใหญ่ใช้การนับแบบต่อเนื่องเพื่อแก้ปัญหาที่เป็นลักษณะเฉพาะ อาจใช้การนับนิ้วมือเพื่อให้การนับดำเนินไปอย่างต่อเนื่องโดยไม่ใช้เครื่องหมายสำหรับการนับ ส่วนมากใช้วิธีนับสิ่งของ และการนับเพิ่ม นับลดในการแก้ปัญหา

ระดับ 4 นักเรียนสามารถใช้การระลึกหรือการนำข้อเท็จจริงเกี่ยวกับจำนวนมาใช้ในการแก้ปัญหาการบวกและการลบ

Stephens, Isoda and Inprashita (2007, p. 5) กล่าวว่า ระดับการให้คะแนนการคิดเชิงสัมพันธ์ ดังแสดงในตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2

ระดับการให้คะแนนการคิดเชิงสัมพันธ์ของ Stephens, Isoda and Inprashita

ระดับคะแนน	การคิดเชิงสัมพันธ์
0	คำตอบไม่ถูกต้อง ไม่มีหลักฐานของการคิดเชิงสัมพันธ์
1	คำตอบถูกต้อง แต่ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ได้ถูกต้อง ชัดเจน สมบูรณ์เป็นส่วนน้อย ข้อที่เหลือยังมีหลักฐานของการคำนวณในการหาคำตอบหรือพยายามใช้การคิดเชิงสัมพันธ์แต่ยังไม่ถูกต้อง
2	คำตอบถูก แต่ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ได้ถูกต้องชัดเจนสมบูรณ์เป็นส่วนปานกลาง ข้อที่เหลือยังมีหลักฐานของการคำนวณในการหาคำตอบหรือพยายามใช้การคิดเชิงสัมพันธ์
3	คำตอบถูก แต่ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ได้ถูกต้องชัดเจนสมบูรณ์เป็นปานกลาง ข้อที่เหลือยังมีหลักฐานของการคำนวณในการหาคำตอบหรือพยายามใช้การคิดเชิงสัมพันธ์แต่ยังไม่ถูกต้อง
4	คำตอบถูก แต่ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ได้ถูกต้องชัดเจนสมบูรณ์ทั้งหมดทุกข้อ

ในการประเมินการคิดเชิงสัมพันธ์ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้พัฒนาระดับการให้คะแนนการคิดเชิงสัมพันธ์ จากแนวคิดของ Carpenter and Moser และ Stephens, Isoda and Inprashita ดังแสดงในตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3

ระดับการให้คะแนนการคิดเชิงสัมพันธ์

ระดับคะแนน	การคิดเชิงสัมพันธ์
0	คำตอบไม่ถูกต้อง ไม่มีหลักฐานของการคิดเชิงสัมพันธ์ หรือคำตอบถูกต้องแต่ใช้การคำนวณ หรือไม่แสดงวิธีหาคำตอบ
1	คำตอบไม่ถูกต้อง ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ไม่ชัดเจน สมบูรณ์ และมีหลักฐานของการคำนวณในการหาคำตอบ
2	คำตอบถูกต้อง ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ไม่ชัดเจน สมบูรณ์ ถูกต้อง และมีหลักฐานการคำนวณในการหาคำตอบ
3	คำตอบถูกต้อง ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ได้ชัดเจน ถูกต้อง สมบูรณ์ มีหลักฐานการคำนวณในการหาคำตอบ
4	คำตอบถูกต้อง ใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ได้ชัดเจน ถูกต้อง สมบูรณ์ และไม่พบร่องรอยการคำนวณในการหาคำตอบ

จากตารางที่ 2.3 พบว่า เกณฑ์การให้คะแนนการคิดเชิงสัมพันธ์ประกอบ 5 ระดับคะแนน ได้แก่ 0, 1, 2, 3 และ 4 ซึ่งในแต่ละคะแนนจะมีความสัมบูรณ์ ความถูกต้อง และความชัดเจนของการคิดเชิงสัมพันธ์แตกต่างกัน

2.5 แบบทดสอบ

แบบทดสอบ เป็นเครื่องมือชนิดหนึ่งที่ใช้สำหรับวัดความรู้ทางด้านพุทธพิสัย ของนักเรียน ว่านักเรียนได้ความรู้อะไรบ้างจากการเรียนรู้ของตนเอง ซึ่งแบบทดสอบจะแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ แบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้น และแบบทดสอบมาตรฐาน โดยแบบทดสอบที่ดีนั้น จะต้องผ่านการวิเคราะห์หาค่าความเชื่อมั่น ประสิทธิภาพ ความยาก อำนาจจำแนก ฯลฯ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้กล่าวถึงแบบทดสอบแบบปรนัยแบบตอบสั้น ในหัวข้อที่สำคัญ ดังนี้

2.5.1 แบบทดสอบแบบปรนัยแบบตอบสั้น

สสวท. (2555, น. 67-73) กล่าวว่า ข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้นเป็นข้อสอบที่กำหนดปัญหาหรือคำถามให้ผู้เรียนได้เชื่อมโยงความรู้ที่มีอยู่ไปใช้ในการหาคำตอบ ข้อสอบลักษณะนี้จะใช้วัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน และใช้วัดความสามารถในการใช้ภาษาที่ผู้เรียนจะต้องประมวลความคิดและเหตุผล เพื่อสรุปเป็นคำตอบที่เป็นข้อความสั้นๆ โดยข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้น จะประกอบด้วยสองส่วนคือ (1) สถานการณ์หรือข้อมูลเบื้องต้น และ (2) คำถาม

2.5.2 แนวทางการสร้างข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้น

แนวทางการสร้างข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้น เป็นดังนี้

1. สถานการณ์หรือคำถามต้องมีความชัดเจนและสามารถสื่อความหมายให้เข้าใจตรงกัน
2. ควรใช้คำถามที่วัดการคิดและระดับพฤติกรรมที่สูงกว่าความรู้ความจำ
3. กำหนดแนวการตอบที่ถูกต้องและเกณฑ์การให้คะแนนไว้อย่างชัดเจน

ข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้นที่กำหนดให้เขียนคำตอบพร้อมทั้งแสดงเหตุผลประกอบที่หลายลักษณะ ในที่นี้จะแสดงไว้ 2 ลักษณะ คือ

1. ข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้นที่มีคำตอบเดียว
2. ข้อสอบเขียนตอบแบสั้นที่มีหลายคำตอบ

ซึ่งในการสร้างข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้น ควรมีบันทึกสาระสำคัญของการสร้าง เพื่อการตรวจสอบและอ้างอิงประกอบด้วย

1. ระดับชั้น
2. สาระการเรียนรู้
3. มาตรฐานการเรียนรู้
4. ตัวชี้วัด
5. พฤติกรรมที่วัด
6. ข้อสอบ
7. คำตอบและแนวการให้เหตุผล

2.5.3 เกณฑ์การให้คะแนนข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้นที่มีคำตอบเดียว

การให้คะแนนข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้นที่มีคำตอบเดียว จะต้องพิจารณาให้คะแนนในส่วนคำตอบและส่วนการแสดงเหตุผลประกอบ ในบางกรณี ส่วนของการแสดงเหตุผลนั้น อาจมีการแสดงเหตุผลได้หลากหลาย ผู้สร้างข้อสอบจึงต้องกำหนดแนวการตอบที่เป็นไปได้ และสร้างเกณฑ์การให้คะแนนตามแนวคำตอบที่กำหนดไว้ การสร้างเกณฑ์การให้คะแนนทำได้หลายวิธี โดยอาจ

กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบเกณฑ์รวมหรือแบบเกณฑ์ย่อยที่มีการกำหนดระดับคะแนนที่แตกต่างกัน

2.5.4 การจัดแบบทดสอบของข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้น

การจัดแบบทดสอบของข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้น มีแนวทางดังนี้

2.5.4.1 เรียงคำถามจากข้อง่ายสุด และเพิ่มความยากและความซับซ้อนขึ้นตามลำดับ

2.5.4.2 ถ้าในแบบทดสอบ ประกอบด้วยเนื้อหาหลายเรื่อง ควรจัดลำดับข้อสอบที่วัดเนื้อหาในเรื่องเดียวกันไว้ด้วยกัน

2.5.5 ข้อดีของข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้น

2.5.5.1 เดาคำตอบได้ยาก จึงใช้ผลจากการทดสอบเพื่อจำแนกผู้เรียนได้

2.5.5.2 ใช้วัดกระบวนการคิดได้อย่างเป็นระบบ

2.5.5.3 ใช้วัดความสามารถในการสื่อสาร และการสื่อความหมายด้วยการเขียนตอบได้

2.5.6 ข้อจำกัดของข้อสอบปรนัยแบบตอบสั้น

2.5.6.1 ไม่สามารถใช้กับผู้เรียนที่มีความบกพร่องทางการเขียน

2.5.6.2 ใช้เวลามากในการตรวจให้คะแนน

2.6 แบบสัมภาษณ์

การสัมภาษณ์ (Interview) เป็นการสนทนาหรือการพูดโต้ตอบกันอย่างมีจุดมุ่งหมายเพื่อค้นหาความรู้ ความจริง ตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้ล่วงหน้า การสัมภาษณ์เป็นวิธีการที่สำคัญวิธีหนึ่งในการรวบรวมข้อมูลเพราะการสัมภาษณ์นอกจากจะทำให้ผู้สัมภาษณ์ ได้ข้อมูลที่ต้องการแล้วยังช่วยให้ทราบข้อเท็จจริงเกี่ยวกับผู้ให้สัมภาษณ์ในด้านบุคลิกภาพอีก และที่สำคัญทำให้ทราบความเข้าใจในการเรียนของนักเรียนอย่างแท้จริง ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้การสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้าง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.6.1 ความหมายของการสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง

กิตติพัฒน์ นนทปัทมะดุล (2554 , น. 119-157) กล่าวว่า การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างหรือบางครั้งนิยมเรียกว่า การสัมภาษณ์แบบชี้นำ (Guided interview) เป็นประเภทที่อยู่ตรงกลางระหว่างการสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้างและการสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง โดยการสัมภาษณ์แต่ละประเภทก็มีจุดแข็งจุดอ่อนทั้งสิ้น การสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้างดูหยาบและแข็งกระด้าง ขณะเดียวกันการสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้างยืดหยุ่นและเปิดกว้างมาก ต้องอาศัยนักวิจัย

หรือผู้สัมภาษณ์ที่มีประสบการณ์ความชำนาญพอสมควร การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างหรือแบบชี้นำนี้ โดยปกตินักวิจัยจะกำหนดคำถามที่พอจะตัดสินใจได้ว่าจะถามอะไรบ้าง หรือใช้คำสำคัญ (Keywords) เป็นเครื่องชี้นำการสัมภาษณ์ ตัวอย่างเช่น ในการวิจัยเพื่อศึกษาคุณภาพชีวิตของผู้พิการทางสายตาที่เป็นวณิพกย่านท่าพระจันทร์ นักวิจัยกำหนดคำถามที่ไม่แน่นอนตายตัว แต่เป็นคำถามที่มีคำสำคัญเกี่ยวกับสภาพของความพิการของผู้มีส่วนร่วมในการวิจัย ประวัติและสาเหตุที่พิการ ประวัติครอบครัว การประกอบอาชีพ การได้รับสวัสดิการจากรัฐ องค์กรของคนพิการ องค์กรเอกชน เป็นต้น นักวิจัยที่ศึกษาเรื่องนี้ค่อนข้างเป็นนักวิจัยมือใหม่ทว่าไม่ได้สร้างแบบสัมภาษณ์ที่มีโครงสร้าง ขณะเดียวกันก็ไม่ได้ใช้การสัมภาษณ์ที่ไม่มีโครงสร้าง นักวิจัยไม่ได้ร่างคำถามที่ชัดเจนแน่นอนในแต่ละประเด็น ทว่าสิ่งที่นักวิจัยดำเนินการก่อนการสัมภาษณ์คือการเตรียมหัวข้อคำถามอย่างหลวม ๆ ในลักษณะกึ่งโครงสร้าง คือการร่างคำถามปลายเปิดที่มีคำสำคัญที่ต้องการ พร้อมกับมีความยืดหยุ่น พร้อมจะปรับเปลี่ยนถ้อยคำให้สอดคล้องกับผู้มีส่วนร่วมในการวิจัยแต่ละคน และสถานการณ์สัมภาษณ์ที่เปลี่ยนแปลงไป

สรุปได้ว่า การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างหรือแบบชี้นำจึงเป็นประโยชน์อย่างมากสำหรับนักวิจัยที่ต้องการเปรียบเทียบข้อมูลจากผู้มีส่วนร่วมในการวิจัยหลาย ๆ คน พร้อม ๆ กับต้องการความเข้าใจลึกซึ้งในโลกและประสบการณ์ของแต่ละคน การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างเป็นการอุดจุดอ่อนของการสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้างและแบบไม่มีโครงสร้าง การสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างหรือแบบชี้นำจึงเป็นที่นิยมในหมู่นักวิจัยเชิงคุณภาพไม่น้อยไปกว่าการสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง ส่วนการสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้างน่าจะเหมาะกับการเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยเชิงปริมาณมากกว่าในการวิจัยเชิงคุณภาพ

2.6.2 ส่วนประกอบของแบบสัมภาษณ์

แบบสัมภาษณ์โดยทั่วไป จะประกอบไปด้วยส่วนที่สำคัญ 3 ส่วน คือ

2.6.2.1 ส่วนแรก เป็นส่วนที่ใช้บันทึกข้อมูลเกี่ยวกับการสัมภาษณ์ เช่น ชื่อโครงการวิจัย วัน เดือน ปี ที่สัมภาษณ์ ชื่อหมู่บ้าน ตำบล อำเภอ จังหวัด ฯลฯ ในส่วนนี้ ผู้สัมภาษณ์ควรกรอกไว้ล่วงหน้า

2.6.2.2 ส่วนที่สอง เป็นส่วนที่ใช้บันทึกรายละเอียดส่วนตัวของผู้ให้การสัมภาษณ์ เช่น เพศ อายุ อาชีพ ศาสนา สถานภาพสมรส จำนวนบุตร ฯลฯ

2.6.2.3 ส่วนที่สาม เป็นส่วนที่เป็นข้อคำถาม และที่จะเป็นคำตอบตามจุดมุ่งหมายของการสัมภาษณ์

2.6.3 หลักในการสัมภาษณ์

เพื่อให้การรวบรวมข้อมูลโดยการสัมภาษณ์ดำเนินไปได้อย่างดี ได้ข้อมูล ที่ถูกต้อง เที่ยงตรง

ควรมีหลักดังนี้

2.6.3.1 การเตรียมตัวก่อนไปสัมภาษณ์

ผู้สัมภาษณ์ต้องเข้าใจจุดประสงค์ของการวิจัยอย่างชัดเจน

1) ทำการนัดแนะเวลาและสถานที่สัมภาษณ์กับกลุ่มตัววอย่างที่จะไปสัมภาษณ์ กรณีที่จะไปสัมภาษณ์กับประชาชนในหมู่บ้าน ควรทำหนังสือขออนุญาตไปยัง ฝ่ายปกครอง เช่น นายอำเภอ กำนัน ไว้ล่วงหน้า อาจนัดสัมภาษณ์รวมกันที่วัด หรือไปสัมภาษณ์ตามบ้านของกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งจะต้องศึกษาแผนที่หมู่บ้านและกำหนดเขตสัมภาษณ์ของ แต่ละคนให้ชัดเจน จะได้ไม่สัมภาษณ์ซ้ำซ้อนกันในกรณีสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง ผู้วิจัยเข้าไปคลุกคลีอยู่ในบ้าน อยู่แล้ว และจะพบปะพูดคุยกันตามโอกาสที่เหมาะสม จึงไม่จำเป็นต้องดำเนินการตามข้อ 2)

2) กรณีสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้าง จะต้องเตรียมแบบสัมภาษณ์ไว้ล่วงหน้า

3) ทำการซักซ้อมการสัมภาษณ์รวมทั้งวิธีบันทึกข้อมูลไว้ล่วงหน้า ให้คล่องแคล่วไม่ประหม่าหรือเก้อเขิน ถ้าเป็นไปได้ควรท่องจำคำถามต่าง ๆ ไว้ ซึ่งจะช่วยให้ดำเนินการสัมภาษณ์ไปได้อย่างราบรื่น

2.6.3.2 การเริ่มต้น

1) ก่อนเริ่มสัมภาษณ์ ผู้สัมภาษณ์ควรแนะนำตนเอง บอกจุดมุ่งหมายของการสัมภาษณ์ให้ผู้ที่จะให้สัมภาษณ์เข้าใจ

2) สร้างความคุ้นเคย ความเป็นมิตร โดยสนทนาในเรื่องที่คาดว่าผู้ให้สัมภาษณ์จะสนใจโดยใช้เวลาเล็กน้อย

2.6.3.3 การดำเนินการสัมภาษณ์

1) ผู้สัมภาษณ์ต้องมีกิริยาสุภาพเรียบร้อย ยิ้มแย้มแจ่มใส

2) ใช้ภาษาที่เข้าใจง่าย ชัดเจน ไม่แปลได้หลายทาง เหมาะสำหรับระดับผู้ให้สัมภาษณ์

3) ใช้คำถามที่สามารถตอบได้ทันที

4) สัมภาษณ์ทีละคำถาม

5) ผู้สัมภาษณ์ต้องมีพื้นความรู้อย่างดีในเรื่องที่จะสัมภาษณ์

6) ถ้าผู้ให้สัมภาษณ์ไม่เข้าใจคำถาม ก็ตั้งคำถามใหม่หรืออธิบายคำถามให้เข้าใจ

7) การจดบันทึกคำตอบควรทำอย่างรวดเร็ว

8) ไม่เร่งรัดหรือคาดคั้นคำตอบจากผู้ให้สัมภาษณ์

9) ไม่ใช้คำถามที่เป็นการชี้แนะคำตอบ

10)ไม่วิพากษ์วิจารณ์หรือชุดในลักษณะที่เป็นการสั่งสอนผู้ให้สัมภาษณ์

11) กล่าวแสดงความขอบคุณผู้ให้สัมภาษณ์ หลังจากสัมภาษณ์เสร็จแล้ว

2.6.4 คุณสมบัติของผู้สัมภาษณ์ที่ดี

สัมภาษณ์ที่ดีควรมีคุณสมบัติ ดังนี้

2.6.4.1 มีบุคลิกภาพที่ดี ผู้สัมภาษณ์ควรมีกิริยามารยาทสุภาพ เรียบร้อย นิ่มนวล แจ่มใส ซึ่งจะช่วยให้บรรยากาศการสัมภาษณ์เป็นไปด้วยดี โน้มน้าวให้ผู้สัมภาษณ์อยากให้ความร่วมมือ อย่างจริงใจ

2.6.4.2 มีมนุษยสัมพันธ์ดี ผู้สัมภาษณ์ควรเป็นผู้มีมนุษยสัมพันธ์ที่ดี สามารถติดต่อสื่อสารกับคนอื่นได้อย่างคล่องแคล่ว

2.6.4.3 มีไหวพริบดี ผู้สัมภาษณ์ที่ดีควรรับรู้สิ่งต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็ว แก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้อย่างมีประสิทธิภาพและทันต่อเหตุการณ์

2.6.4.4 เป็นคนช่างสังเกต ในการสัมภาษณ์ถ้าผู้สัมภาษณ์เป็นคนช่างสังเกต จะช่วยให้ได้ ข้อมูลเกี่ยวกับผู้ให้สัมภาษณ์และเกี่ยวกับสภาพแวดล้อม ซึ่งช่วยในการตัดสินใจ และนำมาประกอบการแปลความหมายข้อมูล

2.6.4.5 มีความซื่อสัตย์ ผู้สัมภาษณ์จะต้องมีความซื่อสัตย์ต่อข้อมูล ไม่ทำการบิดเบือน แปลความ ตีความหรือสรุป ขัดแย้งไปจากข้อความจริงที่ตนได้รับ

2.6.4.6 มีความรับผิดชอบในการสัมภาษณ์ ทำการสัมภาษณ์ด้วยความสนใจใคร่รู้มีความตั้งใจให้ได้ข้อมูลที่ถูกต้อง เที่ยงตรง

2.6.4.7 มีความอดทน ในการสัมภาษณ์บุคคลอื่น บางครั้งต้องเดินทางไปสัมภาษณ์คนที่ไม่รู้จักและอยู่ห่างไกล ใช้เวลาสัมภาษณ์นาน ผู้ให้สัมภาษณ์บางคนอาจมีกริยาอาการหรือบุคลิกภาพที่ไม่ค่อยเหมาะสมในสายตาของผู้สัมภาษณ์การแต่งกายไม่สะอาด ฯลฯ ซึ่งผู้สัมภาษณ์จะต้องใช้ความอดทนมีความเห็นอกเห็นใจคนอื่น

2.6.5 ข้อดีและข้อจำกัดของการสัมภาษณ์

2.6.5.1 ข้อดีของการสัมภาษณ์

1) เป็นเทคนิคที่ใช้รวบรวมข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างตั้งแต่วัยเด็กถึงวัยชรา เหมาะอย่างยิ่ง สำหรับผู้ที่อ่านไม่ออกเขียนไม่ได้หรือมีปัญหาในการอ่านและเขียน

2) สามารถปรับคำถามให้ชัดเจนขึ้นได้ ถ้าผู้ให้สัมภาษณ์ไม่เข้าใจก็เปลี่ยนคำถามให้เกิดความเข้าใจได้

3) ผู้ให้สัมภาษณ์จะให้ความร่วมมือมากกว่าวิธีส่งแบบสอบถามไปให้ตอบ

4) ระหว่างการสัมภาษณ์สามารถสังเกตความจริงใจในการตอบของ ผู้ถูกสัมภาษณ์จาก กิริยา ท่าทางได้

5) ระหว่างการสัมภาษณ์ตรวจสอบคำตอบได้และสามารถหาข้อมูลได้ลึกขึ้นเมื่อเกิดข้อสงสัยในคำตอบ

2.6.5.2 ข้อจำกัดของการสัมภาษณ์

1) ต้องใช้เวลาในการเก็บรวบรวมข้อมูลมาก การสัมภาษณ์แต่ละครั้งจะต้องใช้เวลาใน การเดินทางไปกลับ ในการสัมภาษณ์แต่ละคน ดังนั้นจึงต้องใช้ความพยายามและค่าใช้จ่ายสูง

2) ผู้ให้สัมภาษณ์อาจตอบไม่ตรงกับข้อความจริงของตนด้วยความจงใจ

3) คุณภาพข้อมูลที่ได้ขึ้นอยู่กับคุณภาพของผู้สัมภาษณ์

2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษาการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดเชิงสัมพันธ์ มีนักการศึกษาได้ทำการศึกษาไว้ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.7.1 งานวิจัยในประเทศ

โศจิวัจน์ เสริฐศรี (2553, น. 142-159) ได้ศึกษาการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา มีวัตถุประสงค์ เพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษา และเพื่อศึกษาคุณภาพของกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่พัฒนาขึ้น โดยใช้กลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนดาราคาม สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษากรุงเทพมหานคร ในปีการศึกษา 2553 จำนวน 52 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้มีพัฒนาการสูงขึ้น

สุภัค หาญพิทักษ์วงศ์ (2553, น. 124-125) ได้ศึกษากรอบแนวคิดในการจำแนกลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษา : ประโยคเปิดจำนวน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนากรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน

ระดับประถมศึกษา โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพในการเก็บรวบรวมและวิเคราะห์ข้อมูล นักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการวิจัยประกอบด้วยนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษา ปีที่ 4-6 จำนวน 135 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ที่ศึกษามีความเข้าใจถูกต้องเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับมองประโยคเปิดจำนวนในรูปของผลลัพธ์ทางซ้ายเท่ากับผลลัพธ์ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ และหาตัวไม่ทราบค่าในประโยคเปิดจำนวนโดยใช้วิธีการคิดคำนวณ เมื่อพิจารณาเป็นระดับชั้นพบว่า นักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 สามารถคิดเชิงความสัมพันธ์ในการหาตัวไม่ทราบค่า ได้ในสัดส่วนที่สูงกว่านักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และเมื่อพิจารณาจากสังกัดของโรงเรียนพบว่า นักเรียนในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการศึกษาเอกชนเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับในสัดส่วนที่สูงกว่านักเรียนในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาและนักเรียนในสังกัดเทศบาล

ทิวานนท์ สูบผอม (2554, น. 114-120) ได้ศึกษาการพัฒนาทักษะการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะการคิดเชิงสัมพันธ์ และเพื่อเปรียบเทียบทักษะการคิดเชิงสัมพันธ์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลายที่สอนตามรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้น โดยมีกลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4-6 ระดับชั้นละ 12 คน รวม 36คน ผลการวิจัยพบว่า โดยภาพรวมก่อนเรียนนักเรียนส่วนใหญ่สร้างข้อสรุปโดยใช้ การคำนวณ และหลังเรียนนักเรียนส่วนใหญ่ใช้ทักษะการคิดเชิงสัมพันธ์ เมื่อวิเคราะห์เป็นรายบุคคลพบว่า หลังเรียนนักเรียนทุกคนมีระดับทักษะการคิดเชิงสัมพันธ์เพิ่มขึ้นจากก่อนเรียน และเมื่อพิจารณาเป็นรายชั้นพบว่า ก่อนเรียนทั้งสามชั้นมีทักษะการคิดเชิงสัมพันธ์ แตกต่างกันเล็กน้อย

สุกัญญา หะยีสาและ (2554, น. 111-121). ได้ศึกษากิจกรรมการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการคิดเชิงสัมพันธ์เรื่องการบวก และการลบจำนวนที่มีผลลัพธ์และตัวตั้งไม่เกิน 100 สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 การวิจัยนี้มีความมุ่งหมาย เพื่อสร้างกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการคิดเชิงสัมพันธ์ เรื่องการบวกและการลบจำนวนที่มีผลลัพธ์และตัวตั้งไม่เกิน 100 แล้วศึกษาความสามารถในการคิดเชิงสัมพันธ์ ความคงทนของความสามารถในการคิดเชิงสัมพันธ์ และพฤติกรรมการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนคันนายาว กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 จำนวน 32 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการคิดเชิงสัมพันธ์ เรื่องการบวกและการลบจำนวนที่มีผลลัพธ์และตัวตั้งไม่เกิน 100 มีความสามารถในการคิดเชิงสัมพันธ์ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็มมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 มีความสามารถในการคิดเชิงสัมพันธ์หลังการทดลอง

ทันทีและหลังสิ้นสุดการทดลอง 2 สัปดาห์ไม่แตกต่างกัน ซึ่งแสดงว่านักเรียนมีความคงทนของความสามารถในการคิดเชิงสัมพันธ์

จากการศึกษางานวิจัยในประเทศ มีงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการคิดเชิงสัมพันธ์แต่ยังมีจำนวนน้อย แสดงให้เห็นว่าการคิดเชิงสัมพันธ์ในประเทศไทยยังเป็นเรื่องที่ใหม่มากแต่ได้รับความสนใจในปัจจุบัน และเมื่อพิจารณางานวิจัยเกี่ยวกับเรื่องนี้อย่างละเอียด จะเห็นว่า งานวิจัยส่วนใหญ่มีลักษณะคล้าย ๆ กัน คือ เป็นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงสัมพันธ์โดยใช้รูปแบบการเรียนรู้ต่าง ๆ แต่ไม่มีงานวิจัยที่ศึกษาระดับการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียน การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนพีชคณิต ซึ่งระดับการคิดเชิงสัมพันธ์จะเป็นตัวชี้ให้เห็นถึงความสามารถของนักเรียนในการเรียนพีชคณิตในระดับที่สูงขึ้น

2.7.2 งานวิจัยต่างประเทศ

Carpenter and Levi (2000) ได้ทดลองตรวจสอบความเข้าใจในเรื่องเครื่องหมายเท่ากับของนักเรียนชั้นประถมศึกษา โดยให้นักเรียนพิจารณาประโยคสัญลักษณ์ $8+4=n+5$ ผลการทดลองพบว่านักเรียนส่วนใหญ่เติม 12 หรือ 17 ในช่องว่างซึ่งจากการวิเคราะห์ พบว่า นักเรียนมีความเข้าใจว่าจำนวนที่อยู่หลังเครื่องหมายเท่ากับคือคำตอบที่ได้จากการคำนวณ

Carpenter, Levi, Franke and Zeringue (2005, pp. 53-59) ศึกษาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนมาแล้ว 8 ปี ในรายงานวิจัยครั้งนี้ พวกเขารายงานผลการสนับสนุนส่งเสริมแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ที่ทำกับนักเรียน โดยแสดงบทสนทนาระหว่างครูที่ได้รับการอบรมเรื่องการสอนให้คิดเชิงสัมพันธ์มาแล้วกับนักเรียนเกรด 3 จำนวนสองคน โดยเน้นไปที่สมบัติการแจกแจงสองตัวอย่าง งานวิจัยนี้ชี้ให้เห็นว่าครูสามารถพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนได้โดยการใช้ลักษณะคำถามและลำดับของปัญหาที่ใช้ถามอย่างเหมาะสม

Stephens (2006, pp. 479 - 486) ศึกษาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับกลุ่มตัวอย่างเกรด 5-7 จากสองโรงเรียนในประเทศออสเตรเลียจำนวน 301 คน ผลปรากฏว่านักเรียนส่วนใหญ่หาคำตอบโดยการคิดคำนวณ และมีนักเรียนจำนวนน้อยที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ผลอีกประการหนึ่งคือ จำนวนของนักเรียนที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ในเกรด 7 มีจำนวนมากกว่าในเกรด 6 และ เกรด 5 ตามลำดับ จากการศึกษาครั้งนี้ Stephens ได้วิเคราะห์ความสม่ำเสมอในการคิดโดยจำแนกนักเรียนออกเป็นสามประเภทได้แก่ ประเภทที่ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ตลอดทั้งสามลักษณะของคำถาม (SR-Stable Relational) ประเภทที่คิดคำนวณตลอดทั้งสามลักษณะของคำถาม (SA-Stable Arithmetical) และประเภทที่ไม่ได้ใช้การคิดแบบใดแบบหนึ่งเพียงแบบเดียว (NS-Not Stable) ผลในส่วนนี้พบว่า การสอนคณิตศาสตร์ของครูที่แตกต่างกันในโรงเรียนทั้งสองโรงเรียนส่งผลต่อวิธีการเลือกที่จะใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์หรือใช้การคิดคำนวณของนักเรียน

Stephens (2006) ศึกษาความตระหนักเกี่ยวกับการเท่ากันและแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักศึกษาครูจากมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง จำนวน 30 คน ในประเด็นของความพร้อมในการที่จะส่งเสริมการคิดของนักเรียนเรื่องการเท่ากัน และแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ ผู้วิจัยรวบรวมผลจากแบบสอบถามและการสัมภาษณ์ ผลปรากฏว่านักศึกษาครูมีความตระหนักเรื่องแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์โดยสามารถเข้าใจลักษณะของงาน (Task) ที่สามารถนำไปส่งเสริมแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ให้แก่นักเรียน และระบุได้ว่าผลการคิดของนักเรียนที่แสดงออกโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นอย่างไร อย่างไรก็ตามยังพบว่า นักศึกษาครูบางคนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ

Hunter (2007) ศึกษาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์กับกลุ่มตัวอย่างเกรด 5-8 ในนิวซีแลนด์ จำนวน 361 คน โดยปรับใช้แบบสอบถามของ Stephens (2006) นักเรียนกลุ่มตัวอย่างได้รับการพัฒนาให้คิดและคำนวณได้อย่างยืดหยุ่น กับครูในโครงการ New Zealand Numeracy Project ดังนั้นจึงเป็นที่คาดเดาว่านักเรียนส่วนใหญ่จะใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ได้ดี แต่ผลการวิเคราะห์ข้อมูลไม่เป็นเช่นนั้น โดยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่ (46%) ใช้การคิดคำนวณอย่างเดียว 28% ใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์อย่างเดียว และอีก 26% ใช้การคิดทั้งสองแบบหรือแบบผสมผสานกัน Hunter รายงานว่าความผิดพลาดในการคิดของนักเรียนส่วนหนึ่งว่ามาจากการเข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับอย่างคลาดเคลื่อน โดยยึดติดว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญลักษณ์ของการดำเนินการและต้องใช้การคิดคำนวณหาคำตอบทุกครั้ง

Jacobs (2007) ได้ศึกษาการพัฒนาครูประจำการโดยมุ่งเน้นที่การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในโรงเรียนประถมศึกษา โดยโครงการวิจัยดังกล่าวได้ศึกษากับโรงเรียนในเมืองรวม 19 โรงเรียน ครูจำนวน 180 คน และนักเรียนจำนวนทั้งสิ้น 3,735 คน จากเขตการศึกษาที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำในเขตแคลิฟอร์เนีย โดยอบรมครูที่มีส่วนร่วมใน โครงการวิจัย ซึ่งสอนอยู่ในเกรด 1-5 ให้เข้าใจเกี่ยวกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งเป็นลักษณะทั่วไปของเลขคณิต และศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่ถูกสอนโดยครูที่ มีส่วนร่วมโครงการวิจัยถูกทำให้เกิดวิธีการที่แตกต่างกันอย่างมากของนักเรียน รวมถึงวิธีการที่สะท้อนให้เห็นถึงการใช้การคิดเชิงสัมพันธ์มากกว่าครูที่ไม่มีส่วนร่วมในโครงการวิจัยสำหรับ นักเรียนที่ถูกสอนโดยครูที่มีส่วนร่วมในโครงการวิจัย แสดงให้เห็นอย่างมีนัยสำคัญว่ามีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับและมีการใช้วิธีการที่สะท้อนให้เห็นถึงการคิดเชิงสัมพันธ์ระหว่างการสัมภาษณ์มากกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยครูที่ไม่ได้มีส่วนร่วมในโครงการ

Stephens and Wang (2008, pp. 28-39) ได้ทำการศึกษาโดยสำรวจจุดเชื่อมต่อบางประการในการคิดเชิงสัมพันธ์โดยได้ทำการศึกษากับนักเรียนเกรด 6 และ เกรด 7 จากประเทศ

ออสเตรเลียและประเทศจีน โดยจุดมุ่งหมายในการศึกษามีสองประการ คือ ประการแรกต้องการที่จะศึกษาว่าทำอย่างไรนักเรียนจึงจะสามารถเปลี่ยนถ่ายจากเลขคณิตไปสู่พีชคณิต และประการที่สองเพื่อต้องการระบุจุดเชื่อมต่อที่สำคัญในขบวนการในการเปลี่ยนถ่ายจากเลขคณิตไปพีชคณิตดังกล่าว ในการศึกษาใช้ประโยคสัญลักษณ์ที่มีจำนวนไม่ทราบค่าหนึ่งและสองจำนวน

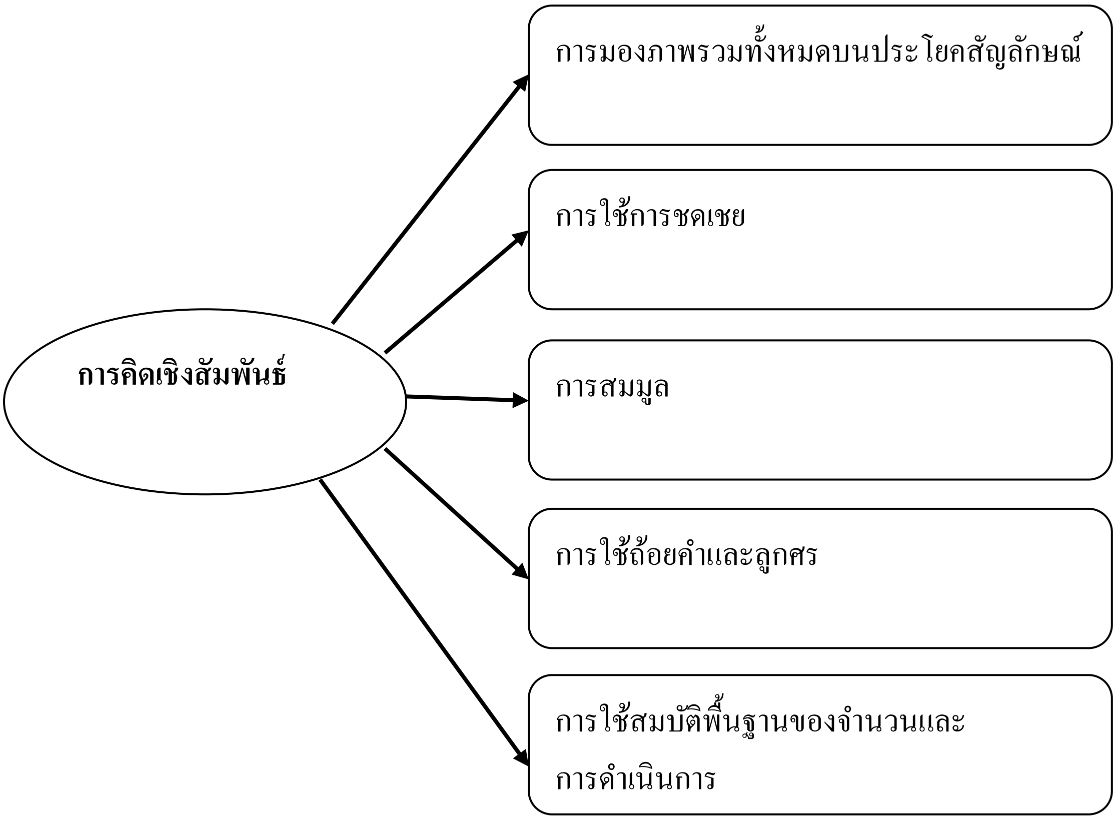
Hunter and Anthony (2008) ศึกษาการพัฒนาแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ กับกลุ่มตัวอย่าง 25 คน เป็นนักเรียนอายุ 9-11 ปี ในโรงเรียนประถมศึกษาประเทศนิวซีแลนด์ งานวิจัยนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง โดยจัดการเรียนการสอนเน้นกลวิธีแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ เก็บข้อมูลโดยการสัมภาษณ์ก่อนและหลังเรียน ใช้เวลาในการทดลองสอน 3 เดือน ผลการวิจัยพบว่า จำนวนนักเรียนที่สามารถให้เหตุผลเชิงพีชคณิตมีจำนวนเพิ่มมากขึ้นก่อนการทดลอง โดยการใช้กลวิธีแนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์ร่วมกับการช่วยเหลือจากครู และมีบรรยากาศในห้องเรียนด้วยคำถาม ทุกคนมีส่วนร่วมในการฟัง การคิดและการโต้แย้งด้วยเหตุผล

จากการศึกษางานวิจัยต่างประเทศ พบว่า การเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับส่งผลต่อการคิดเชิงสัมพันธ์ ครูและนักเรียนส่วนใหญ่มีความเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับที่คลาดเคลื่อน นอกจากนี้ มีงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการคิดเชิงสัมพันธ์อย่างแพร่หลาย จะเห็นว่า ในต่างประเทศได้ให้ความสำคัญในการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนอย่างมาก และตัวแปรสำคัญที่ส่งผลต่อความการคิดเชิงสัมพันธ์ คือ เครื่องหมายเท่ากับ

จากการศึกษางานวิจัยทั้งในและต่างประเทศ พบว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นประเด็นที่หลายคนให้ความสนใจเป็นอย่างมาก ทั้งนี้เพราะการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนมีความความสำคัญต่อการเรียนรู้พีชคณิต ดังนั้น หลาย ๆ งานวิจัยจึงได้ศึกษาและการพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ให้เกิดกับผู้เรียน แต่กลับมีงานวิจัยน้อยมากที่ศึกษาเกี่ยวกับระดับการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียน ซึ่งระดับการคิดเชิงสัมพันธ์เป็นตัวบ่งชี้ถึงความพร้อมในการเรียนพีชคณิตในระดับสูงขึ้น โดยเฉพาะในประเทศไทยที่ไม่มีงานวิจัยเกี่ยวกับเรื่องนี้เลย จากเหตุผลดังกล่าว จึงทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ทั้งนี้ ก็เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงสัมพันธ์ และเป็นแนวทางในการทำวิจัยทางด้านการคิดเชิงสัมพันธ์ ต่อไป

2.8 กรอบการวิจัย

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเกี่ยวกับการคิดเชิงสัมพันธ์ ผู้วิจัยได้กำหนดกรอบการวิจัย แสดงดังภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 แสดงกรอบแนวคิดในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ใช้กรอบแนวของ Stephens (2006, p. 480) ซึ่งจำแนกการคิดเชิงสัมพันธ์ออกเป็น 5 ประเภท ได้แก่ การมองภาพรวมทั้งหมดบนประโยคสัญลักษณ์ การใช้การชดเชย การสมมูล การใช้ถ้อยคำและลูกศร และการใช้สมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการ