

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

พีชคณิตเป็นวิชาที่มีความสำคัญเปรียบเสมือนกระดูกสันหลังของวิชาคณิตศาสตร์ และได้รับการยอมรับว่าเป็นประตูสู่ความสำเร็จของการศึกษาคณิตศาสตร์ในทุกๆ สาขา (Cai, 2004, p. 1) ใน การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ สาระพีชคณิตเป็นสาระที่มีความสำคัญอย่างมาก จะเห็นได้ว่านัก คณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านให้ความสำคัญในการเรียนการสอนพีชคณิตจนเกิดเป็นคำขวัญที่ว่า “Algebra for All” ( Chi and Knuth, 2005, p. 258) ทั้งนี้เพราะวิธีการและแนวคิดของพีชคณิตจะ ช่วยสนับสนุนงานทางด้านคณิตศาสตร์ (NCTM, 2000, p. 37) ในอดีตพีชคณิตเป็นวิชาที่ถูกสงวน ไว้ให้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายเท่านั้น เพราะมีความเชื่อกันว่าการที่จะเรียนรู้พีชคณิตได้ นั้น ผู้เรียนจำเป็นต้องมีพื้นฐานทางเลขคณิตเป็นอย่างดี ส่งผลให้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับ ประถมศึกษาในอดีตมุ่งเน้นไปที่เลขคณิตเป็นส่วนใหญ่ (Chazan and Yerushalmy, 2003, p. 123) ทำให้กระบวนการจัดการเรียนการสอนพีชคณิตไม่ประสบผลสำเร็จ ส่วนหนึ่งเป็นเพราะการจัดการ เรียนการสอนที่ขาดความต่อเนื่องระหว่างหลักสูตรประถมศึกษาและมัธยมศึกษา ส่งผลให้นักเรียน ประถมศึกษาขาดทักษะและประสบการณ์พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการเรียนพีชคณิตในระดับชั้นที่ สูงขึ้น (Blanton and Kaput, 2005, pp. 412 – 446) เป็นเหตุให้นักวิจัยคณิตศาสตร์ศึกษาในปัจจุบัน เริ่มพิจารณาถึงประสบการณ์ และความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับนักเรียนระดับ ประถมศึกษา เพื่อการเตรียมความพร้อมในการเรียนพีชคณิตในระดับมัธยมศึกษา ข้อเสนอหนึ่งที่ ได้รับการยอมรับในปัจจุบันคือ การเตรียมความพร้อมสำหรับการเรียนพีชคณิตที่เป็นทางการควร เริ่มตั้งแต่ระดับประถมศึกษา (Cai and Knuth, 2005, p. 1)

นักเรียนระดับประถมศึกษาเรียนพีชคณิตในลักษณะแบบจำลอง (Modeling) การหาแบบรูป (Pattern Finding) และการศึกษาโครงสร้าง (The Study of Structure) (Yackel, 1997, pp. 276-280) นอกจากนี้หลักสูตรในระดับประถมศึกษาควรมีลักษณะที่เป็นรูปธรรมเพื่อเป็นพื้นฐานในการ เรียนรู้พีชคณิตที่เป็นนามธรรมในระดับที่สูงขึ้น (Cathcart et al, 2003, p. 380) และต้องเริ่มต้นจาก การสอนให้เข้าใจความหมายไม่ใช่มุ่งไปที่การใช้สัญลักษณ์ โดยเปิดโอกาสให้เด็กคิดและแสดง ความคิดเกี่ยวกับเรื่องของจำนวนและสมบัติของจำนวน จนกว่านักเรียนจะสามารถใช้สัญลักษณ์

ทางพีชคณิตได้อย่างเป็นธรรมชาติ (Battista and Brown, 1998, p. 22) ซึ่งประโยคสัญลักษณ์ถือว่าเป็นเครื่องมือหนึ่งที่สามารถพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตได้ และเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการถ่ายโยงความรู้จากเลขคณิตสู่พีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษา (Ambrose, 2006, p.111)

ประโยคสัญลักษณ์ คือประโยคเลขคณิตที่ประกอบด้วยจำนวนและตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์อย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายตัวดำเนินการประกอบกัน ซึ่งมักแฝงไปด้วยโครงสร้างทางพีชคณิต เช่น  $26 + 39 = 39 + \square$  เป็นต้น นอกจากนี้ประโยคสัญลักษณ์ยังเป็นตัวเชื่อมความเข้าใจอย่างดีระหว่างเลขคณิตและพีชคณิต แสดงถึงลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน อีกทั้งยังสามารถใช้ประโยคสัญลักษณ์ในการพัฒนาความเข้าใจทางพีชคณิตได้ (Kieran, 1981, p. 58) การใช้ประโยคสัญลักษณ์เป็นเครื่องมือในการศึกษาความเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับของนักเรียนระดับประถมศึกษาซึ่งเป็นสิ่งสำคัญต่อการเรียนพีชคณิต (Baroody and Ginsburg, 1982, p. 41) โดยสอดคล้องกับความเห็นของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา ได้เสนอว่า ความเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนพีชคณิต นักเรียนจำเป็นต้องตระหนักว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์ที่เท่ากันระหว่างนิพจน์ (NCTM, 2000, p. 94) แต่พบว่านักเรียนระดับประถมศึกษาบางส่วนมีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ เช่น  $8 + 4 = \square + 5$  นักเรียนเติม 12 หรือ 17 ในช่องว่าง โดยเข้าใจว่าหลังเครื่องหมายเท่ากับต้องตามด้วยคำตอบ ความเข้าใจผิดเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับเป็นอุปสรรคอย่างหนึ่งของการเรียนพีชคณิต (Hunter, 2007, p. 422) ซึ่งสามารถพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายผ่านการเรียนประโยคสัญลักษณ์ (Molina, Ambrose and Martinez, 2004, pp. 1-7) ในการหาคำตอบของประโยคสัญลักษณ์ที่อยู่ในรูปแบบ  $a + b = (b + 1) + \square$  เช่น  $37 + 25 = 36 + \square$  นักเรียนในระดับประถมศึกษาสามารถหาคำตอบได้อย่างถูกต้องจากการคิดคำนวณ อย่างไรก็ตามยังมีการคิดลักษณะหนึ่งเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวโดยใช้วิธีการของการชดเชย (Compensation) และการทำให้เท่ากัน (Equivalence) โดยมองความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่อยู่คนละข้างของเครื่องหมายเท่ากับ Irwin และ Britt ได้พิสูจน์แล้วว่าวิธีการชดเชยและการทำให้เท่ากันดังกล่าวนี้เป็นการเตรียมพื้นฐานสำหรับการคิดเชิงพีชคณิต (Irwin and Britt, 2005, p. 169) นักการศึกษาหลายท่านเรียกการคิดลักษณะดังกล่าวว่า การคิดเชิงสัมพันธ์

การคิดเชิงสัมพันธ์ (Relational Thinking) เป็นการมองหาความสัมพันธ์และภาพรวมของจำนวนที่อยู่ในสมการ (Jacobs, 2007, pp. 260-261) ใช้การเปรียบเทียบจำนวนคู่หนึ่งที่ทราบค่าซึ่งอยู่คนละด้านของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อหาจำนวนที่ไม่ทราบค่า (Stephens and Inprashita, 2007, p. 4) โดยการมองความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับโดยไม่ใช้การคำนวณ นักเรียนที่ประสบความสำเร็จในการคิดเชิงสัมพันธ์นั้นต้องมีความสามารถในการระบุทิศทางหรือ

ความเปลี่ยนแปลงของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ เพื่อเป็นแนวทางสู่การหาตัวไม่ทราบค่า แต่สิ่งที่สำคัญคือต้องมีความเข้าใจการเท่ากัน (Hunter, 2007, pp. 421 - 429) ซึ่งการแสดงการเท่ากันและการชดเชย รวมถึงความรู้เกี่ยวกับทิศทางของการชดเชยเป็นกุญแจที่สำคัญของการคิดเชิงสัมพันธ์บนประโยชน์สัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่า (Stephens and Inprasitha, 2007, pp. 319-326) การคิดเชิงสัมพันธ์ยังรวมถึงความสามารถในการใช้สมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการในการแปลงประโยชน์สัญลักษณ์เพื่อหาคำตอบ (Carpenter, Levi, Franke and Zeringue, 2005, pp. 53 - 59) นอกจากนี้ยังเป็นองค์ประกอบสำคัญของการคิดเชิงพีชคณิต และสามารถนำไปใช้เป็นยุทธวิธีในการหาคำตอบบนประโยชน์สัญลักษณ์ได้ ทั้งนี้เพื่อหลีกเลี่ยงการคำนวณจากทั้งสองข้างของประโยชน์สัญลักษณ์ (Molina, Castro and Castro, 2008, pp. 399 - 406) อย่างไรก็ตาม การคิดเชิงสัมพันธ์บนประโยชน์สัญลักษณ์เป็นตัวเชื่อมโยงสู่ความสามารถในการวางนัยทั่วไปทางเลขคณิต (Carpenter, Franke and Levi, 2003, pp. 1 - 9) ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการปรับเปลี่ยนระดับรากฐาน ไปจากการเน้นเลขคณิตที่คิดคำนวณหาคำตอบเพียงอย่างเดียวไปเน้นพีชคณิตโดยการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ควบคู่ไปด้วยกัน (Jacob et al, 2007, pp. 28) การคิดเชิงสัมพันธ์บนประโยชน์สัญลักษณ์มีความสำคัญสำหรับการเรียนพีชคณิตคือ เป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการเรียนพีชคณิตและการให้เหตุผลทางพีชคณิต และทำให้การเรียนพีชคณิตง่ายขึ้นในระดับขั้นต่อไป (Jacobs, 2007, p. 261)

จากผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินี้พื้นฐาน (O-NET) วิชาคณิตศาสตร์ของชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในปีการศึกษา 2556 ปีการศึกษา 2557 และปีการศึกษา 2558 มีคะแนนเฉลี่ยระดับประเทศเท่ากับ 41.95, 38.06 และ 43.47 คะแนนตามลำดับ จะเห็นว่าคะแนนเฉลี่ยอยู่ในระดับต่ำและไม่ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50 (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ (องค์การมหาชน), 2558; สำนักงานรับรองมาตรฐานและประเมินคุณภาพการศึกษา (องค์การมหาชน), 2556; 2557) ซึ่งสอดคล้องกับผลการประเมินผลนักเรียนร่วมกับนานาชาติ (PISA) ในปี 2015 พบว่า ผลการประเมินการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ (Mathematical literacy) ของนักเรียนไทย มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 415 คะแนน ซึ่งต่ำกว่าค่าเฉลี่ยของ OECD และแนวโน้มการประเมินการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทย เมื่อเทียบกับการประเมินคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาหลักใน PISA 2000 -2012 พบว่า มีแนวโน้มลดต่ำลงอย่างต่อเนื่อง เมื่อพิจารณาเนื้อหาที่ประเมิน ได้แก่ เศษส่วนและความรู้ลึกเชิงจำนวน การวัด การนำเสนอข้อมูล เรขาคณิตและพีชคณิต ปรากฏว่านักเรียนไทยทำคะแนนในส่วนเนื้อหาของพีชคณิตได้น้อยที่สุด ซึ่งชี้ให้เห็นว่านักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนพีชคณิต (สสวท, 2559, p. 4) เหตุเพราะความเข้าใจที่ไม่ลึกซึ้งของนักเรียนเกี่ยวกับการเท่ากัน ทั้งที่การเท่ากันนั้นนำมาใช้แสดงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่พบได้บ่อย จึงกลายเป็นปัญหาที่ผู้เกี่ยวข้องทางการศึกษาต้อง

ให้ความสนใจโดยเฉพาะครูผู้สอน ซึ่งการคิดเชิงสัมพันธ์ถือเป็นประเด็นหลักอย่างหนึ่งที่นักเรียนระดับประถมศึกษาต้องได้รับการสนับสนุน (Stephens, 2006, pp. 249 – 278) เพื่อเป็นสะพานเชื่อมไปสู่การเรียนรู้พีชคณิตในระดับที่สูงขึ้น (ทิวานนท์ สุบพอม, 2554, น. 4)

จากเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนบ้านปลาขาว อำเภอนาเชือก จังหวัดมหาสารคาม เพื่อเป็นแนวทางในการส่งเสริมและพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ในการเรียนรู้ของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย และในทุกระดับชั้น

## 1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

- 1.2.1 เพื่อศึกษาผลการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย
- 1.2.2 เพื่อศึกษาวิธีการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย
- 1.2.3 เพื่อศึกษาแนวทางการพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ของผู้เชี่ยวชาญ

## 1.3 ขอบเขตการวิจัย

### 1.3.1 กลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่กำลังศึกษาอยู่ในปีการศึกษา 2559 โรงเรียนบ้านปลาขาว ตำบลสันป่าตอง อำเภอนาเชือก จังหวัดมหาสารคาม จำนวน 56 คน

### 1.3.2 เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ เนื้อหาในสาระที่ 4 พีชคณิต ระดับประถมศึกษาตอนปลาย กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

### 1.3.3 ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรที่ใช้ในการศึกษา ได้แก่ การคิดเชิงสัมพันธ์

### 1.3.4 ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาในการดำเนินงานวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559

## 1.4 นิยามศัพท์เฉพาะ

“การคิดเชิงสัมพันธ์ (Relational Thinking)” หมายถึง การคิดหาความสัมพันธ์ในประโยคสัญลักษณ์ มองภาพรวมทั้งหมดยกบนประโยคสัญลักษณ์ การใช้การชดเชย การสมมูล รวมไปถึงการใช้ถ้อยคำและลูกศร และสมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการ เพื่อเป็นแนวทางสู่การหาตัวไม่ทราบค่าบนประโยคสัญลักษณ์ โดยไม่ใช้วิธีการคำนวณในการหาคำตอบ

“เครื่องหมายเท่ากับ (Equals Sign)” หมายถึง เครื่องหมายที่ใช้แสดงการเท่ากันของข้อความสองข้อความ หรือจำนวนซึ่งเป็นข้อความเดียวกัน หรือจำนวนเดียวกัน และแสดงความสัมพันธ์ทางตรรกศาสตร์ที่แสดงถึงความเป็นอันเดียวกัน หรืออย่างเดียวกัน

“ประโยคสัญลักษณ์ (Sentence Symbol)” หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ที่ประกอบด้วยจำนวนและตัวดำเนินการบวก และลบ อย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายการดำเนินการประกอบกัน โดยมีเครื่องหมายเท่ากับ (=) แสดงความสัมพันธ์

“การใช้การชดเชย (Compensation)” หมายถึง กลยุทธ์ที่ใช้ในการเปลี่ยนข้อเท็จจริงที่ไม่รู้ (unknown fact) ให้เป็นข้อเท็จจริงที่รู้ (known fact) เช่น การทบสิบ โดยมีการเพิ่มจำนวนของจำนวนหนึ่ง และการลดจำนวนของอีกจำนวนหนึ่ง

“การสมมูล (Equivalence)” หมายถึง จำนวนสองจำนวนมีค่าเท่าเทียมกัน เสมอเหมือนกัน และสามารถเปลี่ยนแทนกันได้

“เลขคณิต (Arithmetic)” หมายถึง ศาสตร์ที่เกี่ยวกับการคำนวณ โดยใช้คุณสมบัติพื้นฐานของการดำเนินการ

“พีชคณิต (Algebra)” หมายถึง กลุ่มของภาษาที่แทนกรณีทั่วไปของเลขคณิต เกี่ยวข้องกับตัวไม่ทราบค่า สูตร รูปทั่วไป การแทนค่า และความสัมพันธ์

“การคิดเชิงพีชคณิต (Algebraic Thinking)” หมายถึง การคิดที่เกี่ยวข้องกับแบบรูปและกฎเกณฑ์ การทำให้อยู่ในรูปทั่วไป การค้นหาการสร้างข้อคาดการณ์ และการทำงานของฟังก์ชัน

“การดำเนินการ (Operation)” หมายถึง การกระทำหรือลำดับขั้นตอนซึ่งสร้างค่าใหม่ขึ้นเป็นผลลัพธ์ โดยการรับค่าเข้าไปหนึ่งตัวหรือมากกว่า เช่น การบวก การลบ การคูณ การหาร การยกกำลัง

### 1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

ผลการวิจัยจะเป็นข้อสนเทศในการส่งเสริมและพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ในการเรียนรู้ของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย และในทุกระดับชั้น อันจะส่งผลต่อความสามารถในการวางนัยทั่วไปทางเลขคณิต ตลอดจนเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการให้เหตุผลทางพีชคณิต และการเรียนรู้พีชคณิตทำให้การเรียนพีชคณิตในระดับที่สูงดีขึ้น ตลอดจนเป็นแนวทางให้ครูและผู้สนใจในการที่จะพัฒนาการเรียนรู้พีชคณิตของนักเรียน ได้นำไปใช้ให้เกิดประโยชน์แก่ผู้เรียนต่อไป