# บทที่ 4

## ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล การวิจัย เรื่องการพัฒนากลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี ตามลำดับดังนี้

1. ผลการศึกษาลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

2. ผลการพัฒนากลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของนักศึกษาระดับปริญญาตรี

## 1. ผลการศึกษาลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

การศึกษาลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตกระทำใน 2 ลักษณะคือจากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต และการสัมภาษณ์เชิงลึก

**ผลจากการศึกษาลักษณะมโนทัศน์คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตจากแบบทดสอบ**

พบว่านักศึกษามีลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ใน 3 ด้าน คือ 1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการพิสูจน์การใช้สัญลักษณ์และการให้เหตุผลทางพีชคณิต 2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะทางพีชคณิต และ 3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหาทางพีชคณิต ซึ่งแต่ละด้านมีลักษณะย่อย แสดงได้ด้วยความถี่และร้อยละ ปรากฏดัง ตารางที่ 3

**ตารางที่ 3** แสดงลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ด้วยความถี่และร้อยละของการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

| มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต | ความถี่ (f) | ร้อยละ (%) |
|---|---|---|
| **1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการพิสูจน์ การใช้สัญลักษณ์ และการให้เหตุผลทางพีชคณิต** | | |
| 1.1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการพิสูจน์ | 34 | 42.5 |
| 1.1.1 นักศึกษาไม่ได้นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์ | 7 | 8.75 |
| 1.1.2 นักศึกษาเข้าใจว่าการยกตัวอย่างคือการพิสูจน์ | 24 | 30.00 |
| 1.1.3 นักศึกษานำทฤษฎีที่ไม่เกี่ยวข้องมาใช้ในการพิสูจน์ | 3 | 3.75 |
| 1.2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สัญลักษณ์ | 5 | 6.25 |
| 1.3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการให้เหตุผล | 5 | 6.25 |
| **รวม** | **44** | **55.00** |
| **2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะทางพีชคณิต** | | |
| 2.1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการแก้สมการ | 4 | 5.00 |
| 2.2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการเสนอคำตอบ | 3 | 3.75 |
| 2.3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการดำเนินการทางพีชคณิต | 8 | 10.00 |
| **รวม** | **15** | **18.75** |

| มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต | ความถี่ (f) | ร้อยละ (%) |
|---|---|---|
| **3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหาทางพีชคณิต** | | |
| 3.1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการนำหลักการทางพีชคณิตมาใช้แก้ปัญหา | 9 | 11.25 |
| 3.2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการนำทฤษฎีคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหา | 7 | 8.75 |
| 3.3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในขั้นตอนการแก้ปัญหา | 5 | 6.25 |
| **รวม** | **21** | **26.25** |
| **รวมทั้งหมด** | **80** | **100** |

จากตารางที่ 3 พบว่า ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ด้านการพิสูจน์ การใช้สัญลักษณ์ และการให้เหตุผลทางพีชคณิต เกิดมากที่สุด( f = 44) คิดเป็นร้อยละ 55 รองลงมาได้แก่ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหาทางพีชคณิตจำนวน ( f = 21) คิดเป็นร้อยละ 26.25 และมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะทางพีชคณิต เกิดขึ้นน้อยที่สุดจำนวน (f = 15) คิดเป็นร้อยละ 18.75 และจากในสามลักษณะข้างต้นพบว่า มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอีกเก้าลักษณะย่อย ได้แก่ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการพิสูจน์( f = 34) คิดเป็นร้อยละ42.5 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการนำหลักการทางพีชคณิตมาใช้แก้ปัญหา ( f = 9) คิดเป็นร้อยละ11.25 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการดำเนินการทางพีชคณิต ( f = 8) คิดเป็นร้อยละ 10.00 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการนำทฤษฎีคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหา ( f = 7) คิดเป็นร้อยละ 8.75 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการใช้สัญลักษณ์ ( f = 5) คิดเป็นร้อยละ 6.25มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการให้เหตุผล ( f = 5) คิดเป็นร้อยละ 6.25 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในขั้นตอนการแก้ปัญหา ( f = 5) คิดเป็นร้อยละ 6.25 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการแก้สมการ ( f = 4) คิดเป็นร้อยละ 5.00 และมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการเสนอคำตอบ ( f = 3) คิดเป็นร้อยละ 3.75 ตามลำดับ โดยมีผลการวิเคราะห์และการสัมภาษณ์ปรากฏในผลการสัมภาษณ์เชิงลึกดังต่อไปนี้

**ผลการสัมภาษณ์เชิงลึก**

จากการสัมภาษณ์กลุ่มเป้าหมายจำนวน 28 คน ที่เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนใน 9 ลักษณะย่อยผลปรากฏดังนี้

**1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการพิสูจน์**

ตัวอย่างการสัมภาษณ์เชิงลึก กับกลุ่มเป้าหมายที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในในการพิสูจน์ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

กรณี นักศึกษาเข้าใจว่าการยกตัวอย่างคือการพิสูจน์ สาเหตุคือ นักศึกษาเข้าใจว่าการยกตัวอย่าง โดยการนำจำนวนหรือสัญลักษณ์มาแทนค่าในสมการเพื่อให้ได้คำตอบก็ถือว่าเป็นการพิสูจน์แล้ว ซึ่งไม่คลอบคลุมจำนวนทั้งหมด ดังตัวอย่าง

**ผู้วิจัยถาม :** การพิสูจน์ $(A + B) + C = A + (B+ C)$ เมื่อ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน มีวิธีการพิสูจน์เป็นอย่างไร

**นักศึกษา :** กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & (a_{12}+b_{12})+c_{12} \\ (a_{21}+b_{21})+c_{21} & (a_{22}+b_{22})+c_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & a_{12}+(b_{12}+c_{12}) \\ a_{21}+(b_{21}+c_{21}) & a_{22}+(b_{22}+c_{22}) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $(A+B)+C=A+(B+C)$

จากตัวอย่างพบว่าวิธีที่นักศึกษาพิสูจน์เป็นเพียงการยกตัวอย่างของเมทริกซ์ที่มีขนาด $2 \times 2$ เท่านั้นซึ่งวิธีที่ถูกต้อง คือ กำหนดให้ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ แล้วนำไป พิสูจน์ให้ได้ว่า $(A + B) + C = A + (B+ C)$ เฉลยในภาคผนวก

กรณี นักศึกษาไม่ได้นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์ สาเหตุคือ นักศึกษายังไม่เข้าใจว่าการพิสูจน์จะต้องนำ ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม มาสร้างความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เพื่ออธิบายและให้เหตุผลในการพิสูจน์ แต่นักศึกษาจะกำหนดสิ่งที่จะนำมาพิสูจน์ขึ้นมาเอง ดังตัวอย่าง

**ผู้วิจัยถาม :** การพิสูจน์ $(A+B)+C=A+(B+C)$ เมื่อ $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ และ $C=[c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน มีวิธีการพิสูจน์เป็นอย่างไร

**นักศึกษา :** พิสูจน์

$$(A+B)+C=\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2j} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{ij} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2j} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} \cdots b_{ij} \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1j} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2j} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} \cdots c_{ij} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) \cdots (a_{ij}+b_{ij}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) \cdots (a_{2j}+b_{2j}) \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ (a_{i1}+b_{i1}) & (a_{i2}+b_{i2}) \cdots (a_{ij}+b_{ij}) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1j} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2j} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} \cdots c_{ij} \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่างพบว่านักศึกษาพิสูจน์โดยพยามแสดงให้เห็นการดำเนินการของสมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์ซึ่งเป็นวิธีที่เสียเวลา ที่ถูกต้องคือ

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\ &= ([a_{ij}+b_{ij}])+[c_{ij}]\end{aligned}$$

เพราะโจทย์ได้กำหนดให้ $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ และ $C=[c_{ij}]$ ดังนั้นสามารถทำการพิสูจน์จากสิ่งที่โจทย์กำหนดได้เลย

กรณี นักศึกษานำทฤษฎีที่ไม่เกี่ยวข้องมาใช้ในการพิสูจน์ สาเหตุคือ นักศึกษาพยายามนำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์แต่ขาดความเข้าใจใน ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยามที่สัมพันธ์กับสิ่งโจทย์กำหนดให้อย่างแท้จริง จึงนำทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยามอื่นที่นักศึกษาคิดว่าเกี่ยวข้องกับโจทย์มาใช้ในการพิสูจน์ทำให้ขั้นตอนการพิสูจน์ผิดและไม่สมเหตุสมผล ดังตัวอย่าง

**ผู้วิจัยถาม :** การพิสูจน์ $(A+B)+C=A+(B+C)$ เมื่อ $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ และ $C=[c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน มีวิธีการพิสูจน์เป็นอย่างไร

**นักศึกษา :** พิสูจน์

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= \sum_{i=1}(a+b)_{ij}+c_{ij} \\
&= \sum_{i=1}(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} \\
&= \sum_{i=1}a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}a_{ij}+(b+c)_{ij} \\
&= A+(B+C)
\end{aligned}
$$

จากตัวอย่างนักศึกษาเข้าใจว่า

$$
(A+B)+C=\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} \end{bmatrix}
$$

$$
= \sum_{i=1}(a+b)_{ij}+c_{ij}
$$

โดยเป็นแนวคิดที่เหมือนกับตัวอย่างที่ผ่านมาเพียงแต่นักศึกษาหาวิธีเขียนให้สั้นลง ซึ่งไม่ถูกต้องเพราะ $\sum_{i=1}(a+b)_{ij}+c_{ij} \neq ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}]$ เห็นได้ชัดว่านักศึกษาขาดความรู้ความเข้าใจใน ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม ที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งโจทย์กำหนดให้เอย่างแท้จริง ผลจึงออกมาเป็นลักษณะเช่นนี้

**2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สัญลักษณ์**

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการใช้สัญลักษณ์ สาเหตุคือ นักศึกษาขาดความเข้าใจในการนำสัญลักษณ์ ที่มีอยู่ในบทนิยาม และสมบัติ มาใช้ในการพิสูจน์ หรือ เข้าใจว่าสัญลักษณ์ที่ใกล้เคียงกันจะใช้แทนกันได้ เช่น () และ [] จึงทำให้จึงทำให้การพิสูจน์ผิดและไม่สมเหตุสมผล ดังตัวอย่าง

**ผู้วิจัยถาม :** การพิสูจน์ $(A+B)+C = A+(B+C)$ เมื่อ $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ และ $C=[c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน มีวิธีการพิสูจน์เป็นอย่างไร

**นักศึกษา :** พิสูจน์

$$(A+B)+C=\left[\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]\right]+\left[c_{ij}\right]$$
$$=\left[\left[\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]\right]+\left[c_{ij}\right]\right]$$
$$=\left[\left[a_{ij}\right]+\left[\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right]\right]\right]$$
$$=\left[a_{ij}\right]+\left[\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right]\right]$$
$$=A+(B+C)$$

จากตัวอย่างพบว่าการที่นักศึกษาใช้วงเล็บ [] แทน () ทำให้ความหมายผิดไปมาก โดยเฉพาะในเรื่องเมทริกซ์เนื่องจาก $[([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]] \neq ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$ โดยนักศึกษาเข้าใจว่าเมทริกซ์สามารถเปลี่ยนกลุ่มกันได้ซึ่งไม่ถูกต้อง

**3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการให้เหตุผลการพิสูจน์**

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการให้เหตุผลการพิสูจน์ สาเหตุคือ นักศึกษาจำผิด หรือขาดความเข้าใจในความหมายและรายละเอียดของ ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม และสมบัติ อย่างแท้จริงจึงทำให้นักศึกษานำทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม และสมบัติ มาใช้ในการให้เหตุผลไม่ถูกต้อง และข้ามขั้นตอนที่สำคัญในการพิสูจน์ไปทำให้การพิสูจน์ไม่สมเหตุสมผล ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างการสัมภาษณ์เชิงลึก กับกลุ่มเป้าหมายที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการให้เหตุผลการพิสูจน์ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

**ผู้วิจัยถาม :** การพิสูจน์ $(A + B) + C = A + (B+ C)$ เมื่อ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน มีทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม หรือ สมบัติ ใดบ้างที่เกี่ยวข้อง

**นักศึกษา :** สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของเมทริกซ์

**ผู้วิจัยถาม :** ใช้สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของเมทริกซ์ในการพิสูจน์ได้อย่างไร

**นักศึกษา :** $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}])$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของเมทริกซ์

$= A + (B+ C)$

ดังนั้น $(A + B) + C = A + (B+ C)$

จากตัวอย่างพบว่านักศึกษาให้เหตุผลผิดเกี่ยวกับการพิสูจน์เนื่องจากเมทริกซ์ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม จึงทำให้ขั้นตอนการพิสูจน์ผิดและไม่สมบูรณ์ เหตุผลที่ถูกต้องคือ นิยามการบวกของเมริกซ์ และจากนิยามของฟีลด์ (F1) ในภาคผนวก จ

**4. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการดำเนินการทางพีชคณิต**

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการดำเนินการทางพีชคณิต สาเหตุคือ นักศึกษาขาดการตรวจทานในการทำโจทย์ และขาดความชำนาญในการดำเนินการทางพีชคณิต เช่น การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนเต็ม ส่งผลให้คำตอบออกมาผิดได้ง่าย ดังตัวอย่าง

**ผู้วิจัยถาม :** กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$

ถ้า $A = B$ จงหา $(BC - CB)^t + 2A$

**นักศึกษา :**

$$(BC\text{-}CB)^t + 2A = \left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)^t + 2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -3+5 & 6+15 \\ \underline{-4+1} & 2+12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3+2 & -5+8 \\ 3+3 & 5+12 \end{bmatrix}\right)^t + \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \underline{-2} & 21 \\ \underline{3} & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}\right)^t + \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่างพบว่านักศึกษาดำเนินการผิดสามตำแหน่งคือ -4 + 1, -2, และ 3 ที่ถูกต้องคือ -1 + 4, 2, และ -3 แต่เนื่องจาก -1 + 4 = 3 จึงตรงกับคำตอบแรก

**5. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการแก้สมการ**

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการแก้สมการ สาเหตุคือ นักศึกษาขาดความรู้พื้นฐานในเรื่องของสมบัติการเท่ากัน สมบัติการบวก และสมบัติการคูณจำนวนเต็ม และเขียนขั้นตอนในการแก้สมการไม่ถูกต้อง ดังตัวอย่าง

**ผู้วิจัยถาม :** ลองหา a และ b เมื่อกำหนดให้

$$3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$$

**นักศึกษา :**

$$3a = a+4 \qquad , \qquad 3b=6+(a+b)$$
$$3a - a = 4 \qquad\qquad 3b-a-b=6$$
$$2a = 4$$
$$\boxed{\begin{aligned} 2b-a &= 6 \\ b-a &= \frac{6}{2} \\ b-a &= 3 \end{aligned}}$$
$$a=2 \qquad\qquad b=3+a$$

จากตัวอย่างพบว่านักศึกษาสามารถแก้สมการหา a ได้ถูกต้อง แต่นักศึกษาไม่สามารถแก้สมการหา b ได้ถูกต้องเพราะไม่ได้แทนค่า a ลงไป และในช่องสี่เหลี่ยม นักศึกษายังเข้าใจผิด

ในขั้นตอนการแก้สมการ ที่ถูกต้องคือ

$$2b - a = 6$$
$$\frac{2b}{2}-\frac{a}{2}=\frac{6}{2}$$
$$b-\frac{a}{2}=3$$

ซึ่ง b มีค่าเท่ากับ 4

**6. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการเสนอคำตอบ**

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการเสนอคำตอบ สาเหตุคือ นักศึกษาขาดการไตร่ตรอง อย่างรอบคอบ และมีพื้นฐานด้านการดำเนินการทางพีชคณิตที่ไม่ดี จึงทำให้นักศึกษาสรุปคำตอบออกมาผิด ดังตัวอย่าง

**ผู้วิจัยถาม :** กำหนดเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$

ถ้า A = B จงหา w, x, y และ z

**นักศึกษาคนที่ 1 :** จะได้ w = -1, x = 2, y = 1 และ z = 3

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่างพบว่าถึงแม้นักศึกษาจะแทนค่าในสมการไม่ถูกต้องแต่นักศึกษาก็ไม่ได้เฉลียวใจเลยว่าโจทย์กำหนดให้เมทริกซ์ A = B

**ผู้วิจัยถาม :** จงหา $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T$

เมื่อกำหนดให้ $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$

**นักศึกษาคนที่2 :**

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(2)+4(4) & 2(1)+4(3) \\ 1(2)+3(4) & 1(1)+3(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+16 & 2+12 \\ 2+12 & 1+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่างพบว่าถึงแม้นักศึกษาจะแสดงวิธีทำได้ถูกต้องแต่กลับเสนอคำตอบได้ไม่ถูกต้องซึ่งนักศึกษาจะต้องตอบว่า $\begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$ หรือ $2\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ จึงจะถูกต้อง

**7. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการนำหลักการทางพีชคณิตมาใช้แก้ปัญหา**

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการนำหลักการทางพีชคณิตมาใช้แก้ปัญหา สาเหตุคือนักศึกษาไม่มีความเข้าใจในหลักการแก้ปัญหาทางพีชคณิตอย่างแท้จริงหรือจำมาผิดๆ เมื่อนักศึกษาพบกับโจทย์ที่ประกอบด้วยหลักการทางพีชคณิต ที่หลากหลายในโจทย์ข้อเดียวกัน เช่น หลักการการเท่ากันของเมทริกซ์ หลักการการบวกของเมทริกซ์ หลักการการคูณของเมทริกซ์ และหลักการการทรานสโพสของเมทริกซ์ ในการหาคำตอบของโจทย์ ถ้านักศึกษาขาดความเข้าใจเพียงหลักการใดหลักการหนึ่งนักศึกษาจะไม่สามารถหาคำตอบของ โจทย์ได้อย่างถูกต้อง ดังตัวอย่าง

**ผู้วิจัยถาม :** กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$

ถ้า $A = B$ จงหา $(BC - CB)^t$

**นักศึกษา :** วิธีทำ

จะได้ว่า $BC = \begin{bmatrix} 3W+5Y & 3X+5Z \\ W+4Y & X+4Z \end{bmatrix}, \ CB = \begin{bmatrix} 3W+5Y & 3X+5Z \\ W+4Y & X+4Z \end{bmatrix}$

ดังนั้น $(BC\text{-}CB)^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จากตัวอย่างพบว่านักศึกษาไม่มีความเข้าใจในหลักการแก้ปัญหาคือ นักศึกษาไม่เข้าใจในหลักการการเท่ากันของเมทริกซ์เพราะโจทย์กำหนดเมทริกซ์ $A = B$ จึงไม่ได้แก้สมการเพื่อหา w, x, y และ z เพื่อแทนค่าในเมทริกซ์ก่อน และนักศึกษาไม่คำนึงถึงหลักการคูณของเมทริกซ์ว่า $BC \neq CB$ ดังนั้น $BC - CB$ จึงไม่ใช่เมทริกซ์ศูนย์

**8. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการนำทฤษฎีคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหา**

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการนำทฤษฎีคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหา สาเหตุคือ นักศึกษาขาดความเข้าใจในทฤษฎีที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา หรือจำทฤษฎีมาผิด เมื่อนักศึกษาเผชิญกับโจทย์ที่ต้องใช้ทฤษฎีนั้นมาแก้ปัญหาจึงส่งผลให้การแก้ปัญหาผิดพลาดและคำตอบผิด ดังตัวอย่าง

**ผู้วิจัยถาม :** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

จงหา $A^{-1}$

**นักศึกษา :**

วิธีทำ ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

หา $\det A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 9 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

$= 45+96+96-120-48-72$

$= 237-240$

$\det = -3$

จะหา $A^{-1}$ จะได้ว่า

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{3}{3}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{6}{3}\\ -\frac{3}{3} & -\frac{3}{3} & -\frac{9}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -1\\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -2\\ -\frac{3}{3} & -\frac{3}{3} & -3\end{bmatrix}$$

จากตัวอย่างพบว่านักศึกษาไม่มีความเข้าใจในทฤษฎีคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเมื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหาจึงทำให้คำตอบผิดปรากฏดังในช่องสี่เหลี่ยม ซึ่งที่ถูกต้องคือ

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & C_{31}\\ C_{12} & C_{22} & C_{32}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}5 & 9\\ 8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4 & 5\\ 8 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 8 & 8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & 6 & -3\\ 12 & -15 & 6\\ -8 & 8 & -3\end{bmatrix}$$

## 9. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในขั้นตอนการแก้ปัญหา

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในขั้นตอนการแก้ปัญหา สาเหตุคือ นักศึกษารู้ว่าจะใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาแก้โจทย์อย่างไรแต่ขาดความชำนาญหรือขาดการฝึกฝน ในการใช้ทฤษฎีนั้น ทำให้ขั้นตอนการแก้ปัญหาของนักศึกษาเกิดความผิดพลาดส่งผลให้คำตอบผิด ดังตัวอย่าง

**ผู้วิจัยถาม :** การหาผลเฉลยของ ระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรข้างล่างนี้ มีขั้นตอนอย่างไร

$$
\begin{aligned}
x + y - 3z &= 3 \\
-2x - y &= -4 \\
4x + 2y + 3z &= 7
\end{aligned}
$$

**นักศึกษา :** จะได้เมทริกซ์แต่งเติม

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} R_2 = 2R_1 + R_2
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 15 & 5 \end{bmatrix} R_3 = -4R_1 + R_3
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & -2 & 15 & 5 \end{bmatrix} R_2 = R_2 + R_3
$$

จากตัวอย่างพบว่านักศึกษาใช้ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยของเกาส์จอร์แดน ซึ่งยังไม่ถูกต้องโดยขั้นตอนที่ถูกต้องโดย คือ



เมทริกซ์แต่งเติมสำหรับระบบเริ่มต้นเป็น

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} \\ R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1 \end{matrix}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 15 & -5 \end{bmatrix}
$$

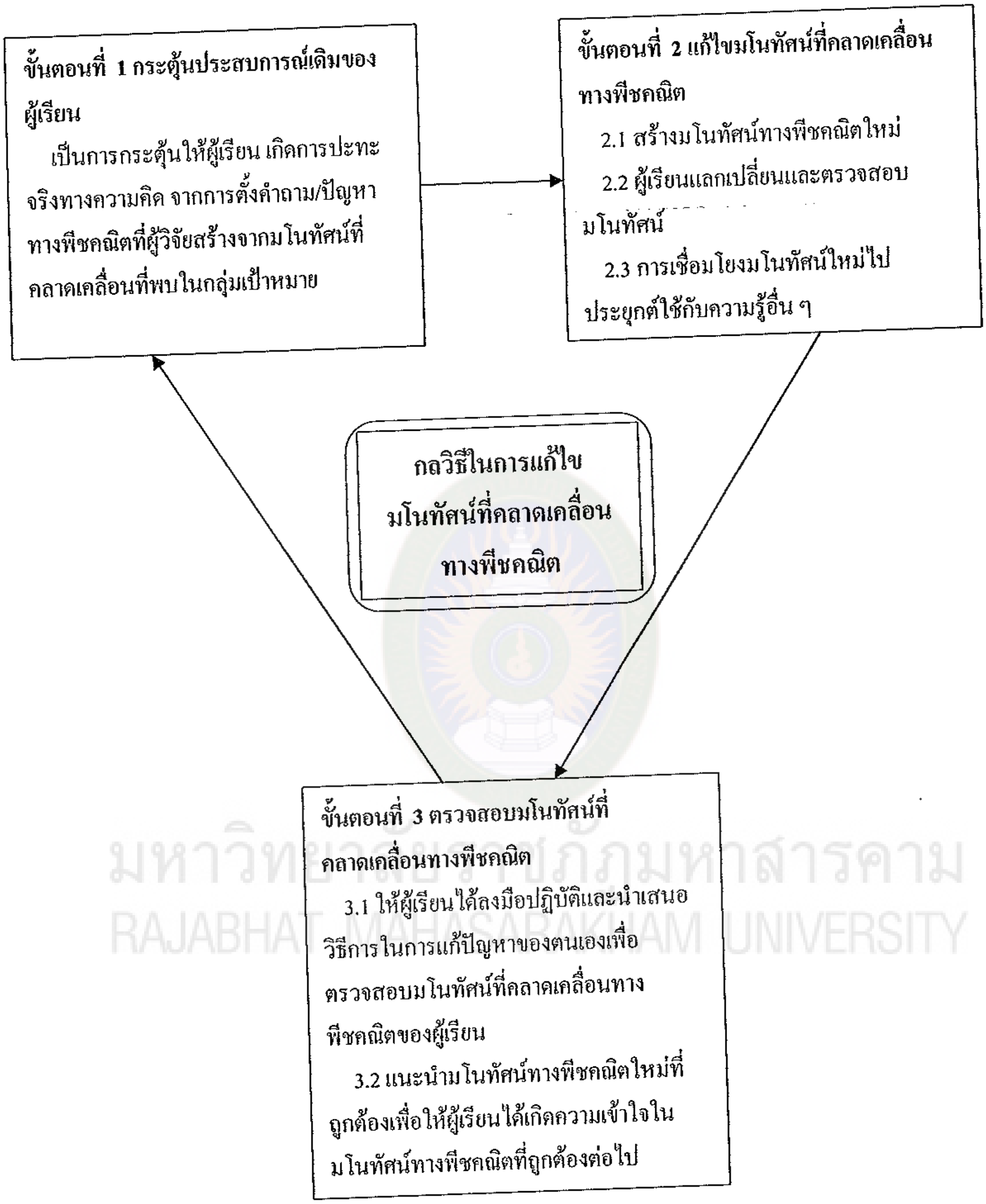
จึงจะช่วยลดขั้นตอนในการแก้ปัญหาและได้คำตอบที่ถูกต้อง

ผลการสัมภาษณ์เชิงลึกเป็นการยกตัวอย่างการสัมภาษณ์กลุ่มเป้าหมายเพื่อให้เห็นลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งเก้าลักษณะย่อยได้ชัดเจนยิ่งขึ้น หลังจากผู้วิจัยได้ทราบลักษณะ

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากผลการใช้แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต โดยที่ผู้วิจัยจะเลือกเฉพาะโจทย์ที่ช่วยจะกระตุ้น ให้กลุ่มเป้าหมายที่เลือกมาสัมภาษณ์แสดงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตออกมา ซึ่งผู้วิจัยไม่ได้นำงานทั้งหมดของกลุ่มเป้าหมายที่สัมภาษณ์มานำเสนอเพียงแต่นำเสนอในบ้างส่วนที่ทำให้ทราบถึงลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตเพื่อจะเป็นแนวทางในการออกแบบกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนระยะที่ 2 ต่อไป

## 2. กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

จากการสังเคราะห์กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักคณิตศาสตรศึกษา แล้วนำผลการสังเคราะห์ที่ได้มาจัดการสนทนากลุ่มโดยผู้เชี่ยวชาญ ผลการพัฒนากลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ปรากฏดังแผนภาพที่ 6






**แผนภาพที่ 6** กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

จากแผนภาพที่ 9 กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 กระตุ้นประสบการณ์เดิมของผู้เรียน การกระตุ้นประสบการณ์เดิมจะทำให้ผู้เรียนได้แสดงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของตนเองออกมาให้ผู้วิจัยทราบ ซึ่งการกระตุ้นประสบการณ์เดิมของผู้เรียนสามารถทำได้โดยการตั้งปัญหา ตั้งคำถามทางพีชคณิต ให้ผู้เรียนได้คิดแก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 2 แก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต หลังจากที่ได้ทราบข้อมูลแล้วผู้วิจัยทำการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน โดยให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ผู้เรียนสามารถสืบค้นจากข้อมูลปฐมภูมิและข้อมูลทุติยภูมิได้ เช่น การคิดแก้ปัญหา การพิสูจน์ด้วยตนเอง หรือการสืบค้นข้อมูลจากข้อมูลทุติยภูมิ เช่น จากหนังสือ วารสาร จากอินเตอร์เน็ต ผู้วิจัยให้ผู้เรียนได้แลกเปลี่ยนมโนทัศน์ หลังจากนั้นผู้วิจัยช่วยหาข้อสรุปเพื่อให้ผู้เรียนได้ทราบมโนทัศน์ที่ถูกต้อง และการเชื่อมโยงมโนทัศน์ใหม่ไปประยุกต์ใช้ในศาสตร์ต่าง ๆ

ขั้นตอนที่ 3 ตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ผู้วิจัยให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติและนำเสนอมโนทัศน์ เพื่อพิจารณาว่าผู้เรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนคงเหลืออยู่เพียงใด ผู้วิจัยแนะนำผู้เรียนให้เกิดมโนทัศน์ที่ถูกต้องมากขึ้นหลังจากนั้นใช้แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตทดสอบผู้เรียนอีกครั้ง

จากแผนภาพกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ผู้วิจัยได้นำมาจัดกิจกรรมแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน โดยใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ดังตัวอย่าง



**กิจกรรมแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนโดยใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต**

**ขั้นที่ 1 กระตุ้นประสบการณ์เดิมของผู้เรียน**

ครูตั้งปัญหาทางพีชคณิต ดังนี้

ปัญหาที่ 1 เมื่อ s และ t เป็นสเกลาร์ และ A,B และ C เป็นเมทริกซ์ขนาดเดียวกันบนฟีลด์ F จงพิสูจน์ว่า $A+(-A) = \bar{0}$

ในขั้นนี้ผู้เรียนจะได้คิดและลงมือปฏิบัติเพื่อแก้ปัญหานั้นด้วยตนเอง

**ขั้นที่ 2 การแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน**

2.1 สร้างมโนทัศน์ทางพีชคณิตใหม่

2.1.1 ครูตั้งปัญหาทางพีชคณิต ดังนี้

ปัญหาที่ 2 กำหนด $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า $A + B = B + A$

2.1.2 ผู้เรียนลงมือหาคำตอบโดยการสืบค้นจากข้อมูลปฐมภูมิ เช่นการคิดหาคำตอบด้วยตนเอง หรือการสืบค้นจากข้อมูลทุติยภูมิ เช่น จากหนังสือ จากอินเตอร์เน็ต

2.1.3 ครูจะตั้งคำถามทางพีชคณิตที่น่าสนใจเพื่อกระตุ้นความใคร่รู้ในตัวผู้เรียน

2.2 ให้ผู้เรียนแลกเปลี่ยนและตรวจสอบมโนทัศน์

2.2.1 ครูให้ผู้เรียนนำเสนอวิธีการแก้ปัญหา และวิธีการตรวจคำตอบของตนเองเพื่อแลกเปลี่ยนวิธีการในการแก้ปัญหาของตนเองกับเพื่อนในกลุ่ม ในขั้นนี้ครูมีหน้าที่ตั้งคำถามเช่น

1) นักศึกษามีวิธีการคิดอย่างไร ?

2) ใครมีวิธีการแก้ปัญหาวิธีอื่นบ้าง ?

3) ให้นักศึกษาคุยกับเพื่อนว่าสิ่งที่นำเสนอมีส่วนไหนที่คล้ายคลึงกันและแตกต่างกันบ้าง ? สาเหตุเกิดจากอะไร ?

2.3 การเชื่อมโยงมโนทัศน์ใหม่ไปประยุกต์ใช้กับความรู้อื่น ๆ

2.3.1 ครูตั้งปัญหาทางพีชคณิตใหม่ที่คล้ายคลึงกันหรือยากขึ้นทันทีหลังจากขั้น 2.2 ปัญหาทางพีชคณิต ดังนี้

ปัญหาที่ 3 เมื่อ s และ t เป็นสเกลาร์ และ A,B และ C เป็นเมทริกซ์ขนาดเดียวกันบนฟีลด์ F จงพิสูจน์ว่า $t(A+B) = tA + tB$

2.3.2 ครูตรวจสอบว่านักศึกษาแต่ละคนเข้าใจมากน้อยเพียงใด

**ขั้นที่ 3 การตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน**

ผู้วิจัยให้นักศึกษาที่เป็นกลุ่มเป้าหมายทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตหลังการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตแล้ว และนำผลการทดสอบมาวิเคราะห์หามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ทั้งนี้ผู้วิจัยได้จัดกิจกรรมด้วยตนเองหลังการใช้กลวิธีกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตแล้ว ได้นำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 2 มาทดสอบกับกลุ่มเป้าหมายดังกล่าว เพื่อศึกษาผลการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ซึ่งผู้วิจัยได้แบ่งผลการศึกษาออกเป็น

1. ผลของการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของนักศึกษาระดับปริญญาตรี โดยใช้สถิติทดสอบ t-test (Dependent t-test)

2. พัฒนาการของผู้เรียนหลังผ่านกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

**1. ผลของการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของนักศึกษาระดับปริญญาตรี โดยใช้สถิติทดสอบ t-test (Dependent t-test)**

ผลของการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของนักศึกษาระดับปริญญาตรี ปรากฏดังตารางที่ 4

**ตารางที่ 4** แสดงการเปรียบเทียบคะแนนมโนทัศน์ทางพีชคณิตก่อนและหลังการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

| การทดสอบ | n | $\bar{x}$ | S.D. | t | p-value |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. ก่อนการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต | 80 | 6.30 | 1.04 | -64.936* | 0.00 |
| 2. หลังการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตศาสตร์ | 80 | 17.03 | 0.08 | | |

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05



จากตารางที่ 4 พบว่า นักศึกษามีคะแนนมโนทัศน์ทางพีชคณิตที่ถูกต้องหลังการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตสูงกว่าก่อนการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

**2. พัฒนาการของผู้เรียนหลังผ่านกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต**

เพื่อให้เห็นพัฒนาการของผู้เรียนหลังผ่านกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตผู้วิจัยจึงข้อนำเสนอเปรียบเทียบตัวอย่างของผู้เรียนที่เคยมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตจากการสัมภาษณ์เชิงลึกในระยะที่ 1 ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 แสดงให้เห็นว่าหลังจากที่นักศึกษาได้ผ่านกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตแล้วมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากระยะที่ 1ส่วนมากได้หายไป ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการพิสูจน์การใช้สัญลักษณ์และการให้เหตุผลทางพีชคณิต

ข้อ 1 กำหนด $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ และ $C=[c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน

จงพิสูจน์ว่า $(A+B)+C=A+(B+C)$

**พิสูจน์**กำหนด 1. F1 $(a+b)+c=a+(b+c)$ ; $\forall a,b,c\in F$

2. นิยามการบวกของเมทริกซ์ คือ $A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$

(A1) จะแสดงว่าสมบัติเปลี่ยนกลุ่มได้ภายใต้การบวกเป็นจริง

ให้ $A=\left[a_{ij}\right],B=\left[b_{ij}\right]$ และ $C=\left[c_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน

$(A+B)+C=(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right])+\left[c_{ij}\right]$

$=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right]$ (นิยามการบวกของเมริกซ์)

$=\left[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\right]$ (นิยามการบวกของเมริกซ์)

$=\left[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\right]$ (จากนิยามของฟีลด์ (F1))

$=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}+c_{ij}\right]$ (นิยามการบวกของเมริกซ์)

$=\left[a_{ij}\right]+(\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right])$ (นิยามการบวกของเมริกซ์)

ดังนั้น $=A+(B+C)$ (นิยามการบวกของเมริกซ์)



ตัวอย่างที่ 2 แสดงให้เห็นว่าหลังจากที่นักศึกษาได้ผ่านกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตแล้วมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากระยะที่ 1ส่วนมากได้หายไป ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 จากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะทางพีชคณิต

ข้อ 2 จงหา $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T$

เมื่อกำหนดให้ $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+4 & 6+a+b \\ -1+c+d & 2d+3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $3a=a+4$ ——— (1)

$3b = 6 + a + b$ ———— (2)

$3c = -1 + c + d$ ———— (3)

$3d = 2d + 3$ ———— (4)

หาค่า a จาก (1) จะได้ $a = 2$

หาค่า b โดยแทน $a = 2$ ใน (2) จะได้

$3b = 6 + 2 + b$

$3b - b = 8$

$b = 4$

หาค่า d จาก (4) จะได้ $3d = 2d + 3$

$3d - 2d = 3$

$d = 3$

หาค่า c โดยแทน $d = 3$ ใน (3) จะได้

$3c = -1 + c + 3$

$3c - c = 2$

$c = 1$

ดังนั้น $a = 2, b = 4, c = 1, d = 3$

แทนค่า $a = 2, b = 4, c = 1, d = 3$

ใน $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T$

จะได้ $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^T$

หาค่า $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(2)+(4)(4) & (2)(1)+(4)(3) \\ (1)(2)+(3)(4) & (1)(1)+(3)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+16 & 2+12 \\ 2+12 & 1+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3 แสดงให้เห็นว่าหลังจากที่นักศึกษาได้ผ่านกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตแล้วมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากระยะที่ 1ส่วนมากได้หายไป ดังนี้

ตัวอย่างที่ 3 จากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

ข้อ 3 จงหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร ข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ -2x - y &= -4 \\ 4x + 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

**วิธีที่ 1** หาผลเฉลยโดยขั้นตอนวิธีของเกาส์จอร์แดน

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

ใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สาม $R_2 \to R_2+2R_1$ และ $R_3 \to R_3-4R_1$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 15 & -5 \end{bmatrix}$$



ใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สาม $R_1 \to R_1-1R_2$ และ $R_3 \to R_3+2R_2$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สอง $R_3 \to \frac{1}{3}R_3$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สาม $R_1 \rightarrow R_1+-3R_2$ และ $R_2 \rightarrow R_2+6R_3$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = B$$

เมทริกซ์แต่งเติมที่ได้นี้อยู่ในรูปขั้นบันไดตามแถวลดรูปแล้ว ซึ่งแทนระบบสมการเชิงเส้น

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = -\frac{1}{3}$$

และมีผลเฉลยเดียวเท่านั้น $X=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 4 แสดงให้เห็นว่าหลังจากที่นักศึกษาได้ผ่านกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตแล้วมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากระยะที่ 1ส่วนมากได้หายไป ดังนี้

ตัวอย่างที่ 4 จากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

ข้อ 4 กำหนดเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$



จงอธิบายว่า A เป็น Singular Matrix หรือ Non - singular Matrix โดยการพิสูจน์หรือแสดงวิธีทำ

วิธีทำ

$$\det A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$
$$= -3 \neq 0$$

พิจาณา

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}A = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}5 & 9\\8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\5 & 6\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}4 & 6\\8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\4 & 6\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}4 & 5\\8 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\8 & 8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 12 & -15 & 6 \\ -8 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AA^{-1}=\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right)\left(-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 12 & -15 & 6 \\ -8 & 8 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=I$$

จากตัวอย่างดังกล่าวเมื่อนักศึกษาได้ผ่านกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตแล้ว พบว่านักศึกษามีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตน้อยลงเป็นอย่างมาก