บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยนำเสนอตามลำดับหัวข้อดังต่อไปนี้

1. มโนทัศน์และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
3. ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต
4. ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
5. แนวคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต
6. การปรับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต
7. รูปแบบการปรับมโนทัศน์
8. พีชคณิตเชิงเส้น
9. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

   9.1 งานวิจัยในประเทศ

   9.2 งานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์งานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

มโนทัศน์และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

1. มโนทัศน์

มโนทัศน์ (Concept) มีความสำคัญต่อการเรียนรู้ การที่ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์ในเนื้อหานั้น ๆ ย่อมมีความสำคัญต่อการเรียนรู้มโนทัศน์ใหม่ที่มีลักษณะเชื่อมโยงกัน สามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาในเรื่องอื่น ๆ ดังนั้น การสอนให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์จึงมีความสำคัญและความจำเป็น

1.1 ความหมายของมโนทัศน์

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความหมายของมโนทัศน์ ไว้ดังต่อไปนี้

เกรียงศักดิ์ เจริญวงศ์ศักดิ์ (2546 : 2) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์เป็นภาพในความคิดที่เปรียบเสมือน ภาพตัวแทน หมวดหมู่ของวัตถุ สิ่งของ แนวคิดหรือปรากฏการณ์ ซึ่งมีลักษณะทั่ว ๆ ไปคล้ายกัน

กิลฟอร์ด (Guildford. 1952 : 1-3) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์เป็นสัญลักษณ์อย่างหนึ่งที่ได้มาจากประสบการณ์ของการพบเห็นสิ่งต่าง ๆ โดยรู้จักแยกแยะสิ่งเหล่านั้นออกเป็นจำพวก และในจำพวกหนึ่ง ๆ จะมีลักษณะร่วมกันอยู่ เช่น เมื่อเราเห็นแมวหลาย ๆ ตัว เราจะรู้ลักษณะร่วมของแมว นั่นหมายความว่าเรามีมโนทัศน์เกี่ยวกับแมวเกิดขึ้น

แมคโดนัลด์ (McDonald. 1967 : 184) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ คือความเข้าใจและความคิดขั้นสุดท้ายของคนคนหนึ่งที่มีต่อสิ่งหนึ่ง ความคิดและความเข้าใจนั้นเป็นนามธรรมและเป็นข้อสรุปเกี่ยวกับเรื่องนั้นในระยะหนึ่งหรือตลอดไปก็ได้

ดี เชคโก (De Cecco. 1968 : 390) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ หมายถึง กลุ่มของสิ่งเร้าที่มีลักษณะร่วมกัน อาจจะแยกออกเป็นประเภทของสิ่งของ การกระทำ หรือความคิด

คลอสไมเออร์ (Klausmeier. 1985 : 275) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ หมายถึง สิ่งที่จะทำให้เราทราบคุณลักษณะของสิ่งต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นวัตถุ เหตุการณ์ หรือกระบวนการ ซึ่งทำให้เราแยกสิ่งต่าง ๆ ออกจากสิ่งอื่นได้ ในขณะเดียวกันก็สามารถโยงเข้ากับกลุ่ม/ประเภทเดียวกันได้

แมคคาวน์และรูป (McCown and Roup. 1992 : 338) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความคิดของบุคคลที่เกิดจากการเรียนรู้หรือการสังเกต วัตถุ

เหตุการณ์หรือความสัมพันธ์ที่มีลักษณะแตกต่างกัน หรือเหมือนๆ กัน โดยสามารถสรุปรวมสิ่งต่างๆ เข้าด้วยกัน และสามารถแยกแยะความแตกต่างออกจากกันได้

แอเร็นด์ (Arends. 1994 : 299) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความเข้าใจ ความคิดของบุคคลที่มีต่อสิ่งต่างๆ รอบตัวเรา และสามารถบอกความเหมือนหรือความต่างของสิ่งนั้นๆ”

กูดวินและคลอสไมเออร์ (Goodwin and Klausmeier. 1995 : 303) กล่าวว่า มโนทัศน์ จะบอกให้เราทราบถึงคุณลักษณะของสิ่งต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นวัตถุ เหตุการณ์ หรือกระบวนการซึ่งทำให้เราแยกสิ่งต่าง ๆ นั้นออกจากสิ่งอื่น ๆ ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถเชื่อมโยงเข้ากับกลุ่มของสิ่งของประเภทเดียวกันได้ เราสามารถพูดถึงได้สองลักษณะ คือ Mental Construct เป็นมโนทัศน์ที่ขึ้นอยู่กับประสบการณ์การเรียนรู้โดยเฉพาะของแต่ละบุคคล ซึ่งจะมีอิทธิพลต่อการที่คนจะคิดเกี่ยวกับสิ่งต่าง ๆ รอบ ๆ ตัว และ Public Entity ได้แก่ ความหมายของคำต่าง ๆ ที่จะพบในพจนานุกรม สารานุกรม และตามหนังสือต่าง ๆ ซึ่งความหมายเหล่านี้จะเป็นที่รับรู้ร่วมกันในกลุ่มคนที่พูดภาษาเดียวกัน

บีทและเฮนเนสซี่ (Beeth and Hennessey. 1996 : 5) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ เกี่ยวข้องกับความเข้าใจ ความมีเหตุผล และความคิดของบุคคลที่เกิดจากการเรียนรู้

สรุปได้ว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความคิดของบุคคลที่เกิดจากการเรียนรู้สิ่งต่างๆ รอบตัว จนเกิดเป็นภาพในความคิดที่เปรียบเสมือน ภาพตัวแทน เกิดเป็นสัญลักษณ์ ทำให้เราทราบคุณลักษณะของสิ่งต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นวัตถุ เหตุการณ์ เป็นกระบวนการซึ่งทำให้เราแยกสิ่งต่าง ๆ นั้นออกจากสิ่งอื่น ๆ ได้ และสามารถเชื่อมโยงเข้ากับกลุ่มของสิ่งของประเภทเดียวกันได้

1.2 ความสำคัญของมโนทัศน์

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ ไว้ดังต่อไปนี้

เกรียงศักดิ์ เจริญวงศ์ศักดิ์ (2546 : 58-59) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์มีความสำคัญมากในการกำหนดความเป็นมนุษย์ เพราะมโนทัศน์มีหน้าที่ในการทำความเข้าใจและใช้เหตุผล โดยทำหน้าที่ที่สำคัญดังนี้ สมองจะกำหนดมโนทัศน์ที่มีเกี่ยวกับเรื่องต่าง ๆ เป็น กรอบต้นแบบ หรือโครงร่างคร่าว ๆ ของสิ่งนั้น เพื่อให้เกิดความเข้าใจว่าสิ่งนั้นคืออะไร ประกอบด้วยอะไร กรอบความคิดต่าง ๆ จะกลายเป็นสิ่งที่เรียกว่า ข้อสมมติ

หรือการคาดเดาว่าน่าจะเป็น สิ่งนั้น สิ่งนี้ เรื่องนั้น เรื่องนี้ ในสิ่งที่มองไม่เห็นแต่พอจะเข้าใจเพราะมีมโนทัศน์เกี่ยวกับเรื่องนั้นอยู่

พรพิมล ยังฉิม (2546 : 13) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ว่า มโนทัศน์มีประโยชน์ต่อนักเรียนเพราะจะช่วยให้นักเรียนมีการคิดที่เป็นระเบียบไม่เกิดความซับซ้อนของความคิด รู้จักจัดหมวดหมู่ของความรู้หรือประสบการณ์ที่ได้รับ ช่วยให้นำออกมาใช้สะดวกและรวดเร็วในการแก้ปัญหา และการเรียนรู้ในระดับสูงขึ้นไป

คูเนย์และคณะ (Cooney et al. 1975 : 89-90) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ 3 ประการ ได้แก่ ประการแรก การให้เหตุผลโดยการใช้มโนทัศน์ เช่น นักเรียนที่มีมโนทัศน์ เรื่อง จำนวนตรรกยะก็จะสามารถบอกได้ว่าจำนวน ๆ หนึ่งเป็นจำนวนตรรกยะหรือไม่ เพราะเหตุใด เป็นต้น ประการที่สอง มโนทัศน์ช่วยให้วางหลักการทั่วไปได้ และพบสมบัติบางประการอื่น ๆ ที่นอกเหนือจากที่ได้ให้ความหมายไว้ และประการที่สาม มโนทัศน์จะทำให้เราค้นพบความรู้ใหม่

ค็อกเบิร์นและลิตเลอร์ (Cockburn and Littler. 2010 : 3-6) ได้กล่าวถึงมโนทัศน์เป็นสิ่งสำคัญในการจัดการเรียนรู้ เนื่องจากมโนทัศน์ช่วยให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาการเรียนรู้ในเรื่องนั้น ๆ ได้ถึงระดับสูงสุด และยังช่วยให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้สิ่งที่เกี่ยวข้องได้อย่างรวดเร็วยิ่งขึ้น มโนทัศน์เป็นรากฐานของความคิด มนุษย์จะคิดไม่ได้ถ้าไม่มีมโนทัศน์พื้นฐาน เพราะมโนทัศน์จะช่วยในการตั้งกฎเกณฑ์ หลักการต่าง ๆ และยังช่วยให้สามารถแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ได้ ในการเริ่มต้นเรียนรู้เรื่องต่าง ๆ การสร้างมโนทัศน์ที่ถูกต้องให้กับนักเรียนจึงเป็นเรื่องที่มีความสำคัญที่สุด

สรุปได้ว่า มโนทัศน์มีความสำคัญในการจัดการเรียนรู้ ช่วยในการทำความเข้าใจและใช้เหตุผล ทำให้เราสามารถวางหลักการทั่วไปได้ เป็นรากฐานของความคิดช่วยจัดระบบการคิดไม่ให้เกิดความซับซ้อน ช่วยให้สามารถแก้ปัญหา และมโนทัศน์จะทำให้เราค้นพบความรู้ใหม่ ช่วยให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาการเรียนรู้ในเรื่องนั้น ๆ ได้ถึงระดับสูงสุด

1.3 ประเภทของมโนทัศน์

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงประเภทของมโนทัศน์ ไว้ดังต่อไปนี้

สุวัฒนา เอี่ยมอรพรรณ (2549 : 33) ได้จำแนกมโนทัศน์ไว้ 2 ประเภท คือ

มโนทัศน์ที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ ซึ่งมีทั้งนามธรรมและรูปธรรม เช่น ทะเล ลม พืช สัตว์ เป็นต้น และมโนทัศน์ที่มนุษย์กำหนดหรือประดิษฐ์ขึ้น เช่น ความดี ความชั่ว ความสวย โต๊ะ เก้าอี้ เป็นต้น

รัสเซลล์ (Russell. 1961 : 124-155) ได้แบ่งมโนทัศน์ออกเป็น 8 ลักษณะคือ

1. มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Concept) คือมโนทัศน์เกี่ยวกับจำนวน การวัด

2. มโนทัศน์ในเรื่องเวลา (Concept of Time) เป็นมโนทัศน์ที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวกับเวลา

3. มโนทัศน์ทางวิทยาศาสตร์ (Scientific Concept) คือมโนทัศน์เกี่ยวกับเวลาและการวัด เพราะวิทยาศาสตร์ขึ้นอยู่กับการวัดที่แน่นอน เวลา น้ำหนัก และปรากฏการณ์อื่น ๆ

4. มโนทัศน์เกี่ยวกับตนเอง (Self Concept) คือการที่บุคคลมีความรู้สึกว่าตัวเองคือใคร เป็นอะไร และเป็นอย่างไร

5. มโนทัศน์ทางสังคม (Social Concept) เป็นมโนทัศน์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างบุคคล ชุมชน ประชาธิปไตย ศีลธรรม

6. มโนทัศน์ทางสุนทรียภาพ (Aesthetic Concept) เป็นมโนทัศน์ซึ่งสัมพันธ์กับมโนทัศน์ที่เกี่ยวกับความสวยงาม และขึ้นอยู่กับมโนทัศน์ทางสังคม

7. มโนทัศน์เกี่ยวกับความขบขัน (Humour Concept) เป็นมโนทัศน์ที่อยู่ในขอบข่ายของสังคมนั้น เช่นอาจเป็นสิ่งขบขันในสังคมหนึ่งแต่ไม่อาจขบขันในอีกสังคมหนึ่งก็ได้

8. มโนทัศน์เกี่ยวกับเรื่องอื่น ๆ (Miscellaneous Concept) เช่น เกี่ยวกับความตาย เพศ สงคราม เป็นต้น

กิ๊ปสัน (Gibson. 1980 : 276) ได้แบ่งมโนทัศน์ออกเป็น 2 ประเภท คือ ประเภทแรก มโนทัศน์เชิงรูปธรรม (Concrete Concept) เป็นความคิดที่สามารถเชื่อมโยงไปสู่กลุ่มของวัตถุที่สามารถสังเกตได้ เช่น บ้าน หนังสือ สุนัข หรือ คุณภาพของวัตถุ เช่น สี ขนาด รูปร่าง เป็นต้น และประเภทที่สอง มโนทัศน์เชิงนามธรรม (Abstract Concept) เป็นความคิดที่ไม่สามารถเชื่อมโยงไปสู่วัตถุที่สังเกตได้หรือคุณภาพของวัตถุได้โดยตรง มีลักษณะเป็นนามธรรม

คลอสไมเออร์ (Klausmeier. 1985 : 276) ได้จำแนกประเภทมโนทัศน์ได้ 2 ลักษณะ คือ Mental Construct เป็นมโนทัศน์ที่ขึ้นกับกระบวนการการเรียนรู้โดยเฉพาะของแต่ละคน อันมีอิทธิพลต่อการคิดในสิ่งรอบๆ ตัว และ Public Entity เป็นมโนทัศน์เกี่ยวกับความหมายของคำต่าง ๆ ซึ่งอาจจะพบในพจนานุกรม สารานุกรม ความหมายเหล่านี้เป็นที่รับรู้ร่วมกันในกลุ่มที่ใช้ภาษาเดียวกัน

นอกจากนี้ มีนักการศึกษาหลายท่านที่จำแนกประเภทของมโนทัศน์ในลักษณะที่คล้ายคลึงกัน เช่น ทราเวอร์ส โรเบิร์ท (Travers Robert. 1967 : 137-138) ออซูเบล (Ausubel. 1968 : 520) ดี เซคโก (De Cecco. 1968 : 390-392) มอแกนและคณะ (Morgan et al. 1984 : 181-182) แอเร็นด์ (Arends. 1994 : 298) ซึ่งพอสรุปออกเป็น 3 ประเภท ได้ดังต่อไปนี้

1. มโนทัศน์ที่มีลักษณะร่วมกัน (Conjunction Concepts) หมายถึง มโนทัศน์ที่เกิดจากการมีส่วนร่วมกันของลักษณะเฉพาะ ตั้งแต่สองลักษณะขึ้นไป เช่น สมุดสีเขียว ดอกไม้สีแดง สุนัขขนยาวสีขาว หรือ สิ่งเร้าที่เราพบเห็นโดยทั่วไปมีลักษณะร่วมกัน ได้แก่ รูปร่าง ขนาด สี เป็นต้น มโนทัศน์ต่างๆ ที่เราคุ้นเคยในชีวิตประจำวัน มักเป็นมโนทัศน์ที่มีลักษณะร่วมกัน

2. มโนทัศน์แยกลักษณะ (Disjunctive Concepts) หมายถึง มโนทัศน์ที่เป็นโอกาสให้ตัดสินใจเลือกเอาอย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่างรวมกัน เช่น คำว่า "กา" อาจเป็นนกหรือกาต้มน้ำ หรือเครื่องหมายกากบาท สัญลักษณ์ "0" อาจเป็นจำนวนศูนย์ (Zero) วงกลม ตัวโอในภาษาอังกฤษ หรือไข่ฟองหนึ่งก็ได้

3. มโนทัศน์เชิงสัมพันธ์ (Relation Concepts) หมายถึง มโนทัศน์ที่เกิดจากความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ สภาวะหรือสิ่งเร้า ตั้งแต่สองอย่างขึ้นไป เช่น การทำไม้ขีดไฟ ไปสัมพันธ์กับบุหรี่ เพราะว่าเราใช้ไม้ขีดไฟจุดบุหรี่ หรือภาษีเงินได้สัมพันธ์กับระดับของรายได้

สรุปได้ว่า ประเภทของมโนทัศน์สามารถจำแนกได้เป็นมโนทัศน์ที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ ประกอบด้วย มโนทัศน์เชิงรูปธรรม มโนทัศน์เชิงนามธรรม และมโนทัศน์ที่มนุษย์กำหนดหรือประดิษฐ์ขึ้น ประกอบด้วย มโนทัศน์ที่ขึ้นกับกระบวนการการเรียนรู้ของแต่ละคน มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ มโนทัศน์ในเรื่องเวลา มโนทัศน์ทางวิทยาศาสตร์ มโนทัศน์ทางสังคม มโนทัศน์ทางสุนทรียภาพ มโนทัศน์เกี่ยวกับความขบขัน มโนทัศน์เกี่ยวกับความหมายของคำต่างๆ มโนทัศน์ที่มีลักษณะร่วมกัน มโนทัศน์แยกลักษณะ มโนทัศน์เชิงสัมพันธ์ เป็นต้น

1.4 กระบวนการสร้างมโนทัศน์

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงกระบวนการสร้างมโนทัศน์ ไว้ดังต่อไปนี้

รัสเซลล์ (Russel. 1956 : 249) กล่าวถึงกระบวนการสร้างมโนทัศน์ว่า เป็นผลมาจากการรับรู้ ความจำ และจินตนาการ รวมทั้งสิ่งแวดล้อมภายนอกและภายในอินทรีย์ ได้แก่ องค์ประกอบทางอารมณ์ ความตึงเครียด ความต้องการ หรือปัญหาที่ต้องแก้ไข การที่จะสร้างมโนทัศน์ได้นั้นต้องผ่านกระบวนการ 3 ขั้น คือ การแยกแยะ การย่นย่อ และการสรุปครอบคลุม กระบวนการทั้ง 3 นี้ จะต้องมีการบูรณาการเข้าด้วยกัน และเกิดขึ้นในระหว่างที่มีการรับสัมผัส (Sensory Impression) การทำงานของกล้ามเนื้อ การใช้กล้ามเนื้อ การตั้งคำถาม การอ่าน และการแก้ปัญหา ซึ่งทั้งหมดนี้จะรวมกันเข้าเป็นโครงสร้างของมโนทัศน์

บรูเนอร์และคณะ (Bruner et al. 1957 : 1) ได้เสนอแนวคิดว่า กระบวนการสร้างมโนทัศน์ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่ระบบไม่สับสน เรียนรู้ง่ายไม่ยุ่งยาก

โพเดล (Podell. 1958 : 1-20) ได้เสนอแนวคิดว่า กระบวนสร้างมโนทัศน์ใน 2 ลักษณะ คือ ลักษณะแรก การเห็นลักษณะร่วม (Composite Photograph) คือการที่ผู้เรียนสามารถมองเห็นหรือเข้าใจลักษณะร่วมกันของวัตถุหรือสถานการณ์กลุ่มใดกลุ่มหนึ่งโดยผู้เรียนมิได้กระทำกิจกรรมเพื่อค้นหามโนทัศน์มากนัก เช่น เด็กคนหนึ่งเห็นสุนัขบ่อย ๆ ทั้ง ๆ ที่สุนัขเหล่านั้นเป็นชนิดที่ต่างกัน แต่เด็กก็สามารถมองเห็นลักษณะร่วมของสุนัขได้คือมีสี่ขา มีปากยาว ฯลฯ ครั้งต่อไปถ้าเขาเห็นสัตว์ที่มีลักษณะเช่นนี้อีกเขาก็ทราบว่ามันเป็นสัตว์ประเภทเดียวกัน ลักษณะที่สอง การกระทำเพื่อค้นหามโนทัศน์ (Active Search) คือการที่ผู้เรียนต้องกระทำกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อค้นหามโนทัศน์ โดยที่นักเรียนต้องคาดการณ์ไว้ก่อนล่วงหน้าว่าลักษณะร่วมของสิ่งต่าง ๆ เหล่านั้นคืออะไร แล้วจึงค่อยทำกิจกรรมเพื่อเป็นการทดสอบการสร้างมโนทัศน์แบบนี้ผู้เรียนไม่ได้อยู่เฉย แต่ต้องกระทำกิจกรรมอยู่เสมอ

เครชและครัทช์ฟิลด์ (Krech and Crutchfield. 1959 : 464–465) ได้กล่าวว่า กระบวนการสร้างมโนทัศน์ เป็นกระบวนการค้นพบลักษณะบางประการที่เป็นลักษณะร่วมของวัตถุ ซึ่งเป็นจำพวกเดียวกัน เช่น พบว่าหมู ช้าง คน ปลาวาฬ ต่างก็มีต่อมน้ำนมสำหรับเลี้ยงลูกอ่อน ลักษณะร่วมเช่นนี้แตกต่างไปจากสัตว์จำพวกอื่นๆ การค้นพบลักษณะร่วมนี้เป็นการสร้างมโนทัศน์ของ คำว่า “สัตว์เลี้ยงลูกด้วยน้ำนม” ขึ้น

โลเวลล์ (Lovell. 1996 : 12-13) ได้กล่าวถึง กระบวนการสร้างมโนทัศน์ มี 3 กระบวนการ คือ การรับรู้ (Perception) การย่นย่อ (Abstraction) และการสรุปครอบคลุม (Generalization) ซึ่งกระบวนการย่นย่อนับเป็นจุดสำคัญของการสร้างมโนทัศน์ ซึ่ง ได้แก่

ลักษณะเด่นที่ร่วมกันของวัตถุหรือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น จากนั้นจึงสรุปครอบคลุมจนได้ลักษณะที่ร่วมกันของสิ่งที่ค้นพบ

เบิร์น (Bourne. 1966 : 24-44) ได้กล่าวถึงกระบวนการสร้างมโนทัศน์ ดังนี้

1. ทฤษฎีความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งเร้าและการตอบสนอง (S.R. Association Theories) กล่าวว่า การมีมโนทัศน์คือการที่สามารถแยกแยะสิ่งเร้าซึ่งมีลักษณะซับซ้อน (Complex Stimuli) และสามารถมองเห็นลักษณะที่สัมพันธ์กันหรือเหมือนกันในสิ่งเร้าเหล่านั้น

2. ทฤษฎีการสร้างมโนทัศน์โดยอาศัยการทดสอบสมมติฐาน (Theories Based on Hypothesis Testing) ทฤษฎีบทนี้ได้อธิบายการสร้างมโนทัศน์ไว้ดังนี้

2.1 ไม่เลือกตอบสนองต่อคุณลักษณะทั่วไปของสิ่งเร้าแต่จะเลือกตอบสนองเฉพาะลักษณะที่ตั้งสมมติฐานเอาไว้ในใจ

2.2 การตอบสนองตามสมมติฐานที่ตั้งไว้เพื่อทดสอบว่าสมมติฐานนั้น ๆ ถูกหรือไม่ ถ้าถูกก็เกิดมโนทัศน์ขึ้นมา ถ้าผิดก็ต้องตั้งสมมติฐานใหม่และทดสอบใหม่จนกว่าจะถูก

แมคโดนัลด์ (McDonald. 1967 : 162) มีแนวคิดว่า กระบวนการสร้างมโนทัศน์ของนักเรียนจะผ่านกระบวนการดังต่อไปนี้ คือ การแยกแยะ (Discrimination) คือ นักเรียนจะต้องสามารถแยกความแตกต่างของสิ่งที่เรียนกับสิ่งอื่น ๆ และการสรุปครอบคลุม (Generalization) คือ นักเรียนจะต้องนึกถึงลักษณะของสิ่งที่เรียนเชื่อมโยงกับสิ่งอื่น ๆ ได้

คลอสไมเออร์ (Klausmeier. 1985 : 278-279) มีแนวคิดว่า กระบวนการสร้างมโนทัศน์ มีลำดับขั้นการสร้างมโนทัศน์พอจะสรุปได้เป็น 4 ระดับ ดังนี้

1. ระดับรูปธรรม (Concrete Level) ซึ่งผู้เรียนจำวัตถุสิ่งต่างๆ ได้และนึกถึงชื่อของสิ่งนั้นๆ ได้ เช่น เด็กเล็กๆ เรียนรู้คำว่า "สุนัข" เป็นต้น

2. ระดับรวมกลุ่ม (Identity Level) เป็นระดับที่ผู้เรียนจำสิ่งใดสิ่งหนึ่งในสภาพการณ์และเวลาที่แตกต่างกันได้ ลักษณะสำคัญของการเรียนรู้ระดับนี้คือความสามารถสรุปความคล้ายคลึงและแผ่ขยายมโนทัศน์ได้ (Generalization) เช่น สุนัขก็ย่อมเป็นสุนัขเสมอไม่ว่าจะอยู่ในสถานที่ เวลา หรือมุมมองที่แตกต่างกันอย่างไรก็ตาม

3. ระดับจัดจำพวก (Classification Level) คือความสามารถในการจัดประเภทสิ่งที่มีลักษณะร่วมกันเข้าด้วยกัน เช่น สุนัข ไม่ว่าจะมีรูปร่าง ขนาด สี หรือพันธุ์แตกต่างกันอย่างไรก็เรียกว่า สุนัข ทั้งนั้น

4. ระดับนามธรรม (Formal Level) เป็นการเรียนรู้ระดับที่ผู้เรียนสามารถใช้ชื่อมโนทัศน์อธิบายความหมาย จำแนกความแตกต่างกับมโนทัศน์อื่นๆ ได้ถือเป็นระดับที่เรียนรู้มโนทัศน์ได้สมบูรณ์

สรุปได้ว่า กระบวนการสร้างมโนทัศน์ว่าเป็นผลมาจากการรับรู้ ความจำ จินตนาการ รวมทั้งสิ่งแวดล้อมภายนอกและภายในอินทรีย์ การที่จะสร้างมโนทัศน์ได้นั้นต้องผ่านกระบวนการต่าง ๆ คือ การมองสิ่งต่าง ๆ เป็นรูปธรรม การรวมกลุ่ม การจัดจำพวก การจินตนาการสิ่งต่าง ๆ เป็นนามธรรม การรับรู้ การย่นย่อ การสรุปครอบคลุม การเห็นลักษณะร่วม ซึ่งกระบวนการสร้างมโนทัศน์ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่เป็นระบบ ไม่สับสน เรียนรู้ง่ายไม่ยุ่งยาก

2. มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังต่อไปนี้

อัมพร ม้าคนอง (2547 : 5) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นความคิดนามธรรมที่ทำให้มนุษย์สามารถแยกแยะวัตถุ หรือเหตุการณ์ว่าเป็นตัวอย่างหรือไม่เป็นตัวอย่างของความคิดที่เป็นนามธรรมนั้น เช่น มโนทัศน์ของการเท่ากัน มโนทัศน์ของการเป็นสับเซต มโนทัศน์เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม เป็นต้น

กู๊ด (Good. 1959 : 118) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่าเป็นความคิดสำคัญ ความเข้าใจเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือเรื่องใดเรื่องหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาของคณิตศาสตร์ ในด้านการคำนวณ ความสัมพันธ์จำนวน และการให้เหตุผลอย่างมีระบบ รวมถึงคุณลักษณะภายนอกของสิ่งของ อันเกิดจากการสังเกตหรือได้รับประสบการณ์แล้วนำลักษณะนั้นมาประมวลเข้าด้วยกันเป็นข้อสรุปทางคณิตศาสตร์

โดโนแวนและเจอราลด์ (Donovan and Gerald. 1972 : 168) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความคิดของบุคคลซึ่งเป็นนามธรรมเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น สมบัติของวัตถุ หรือเหตุการณ์ต่างๆ โดยสามารถบอกลักษณะร่วมและลักษณะที่แตกต่างของแต่ละมโนทัศน์ได้ เช่น มโนทัศน์ สาม เป็นมโนทัศน์ที่เป็นนามธรรมที่ใช้แทนความหมายของสิ่งของสามสิ่ง

คูเนย์และคณะ (Cooney et al. 1975 : 85) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความเข้าใจเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้ โดยนักเรียนสามารถสรุป

ความเข้าใจที่ได้ออกมาในรูปของนิยามหรือความหมายของเรื่องนั้น เช่นการมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชัน คือนักเรียนสามารถบอกนิยามของฟังก์ชันได้

เบลล์ (Bell. 1981 : 108) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นความคิดนามธรรมในการจัดกลุ่มสิ่งของหรือเหตุการณ์ใด ๆ ที่เป็นตัวอย่างและไม่ใช่ตัวอย่าง เช่น คำว่า เซต สับเซต การเท่ากัน การไม่เท่ากัน รูปสามเหลี่ยม ลูกบาศก์ รัศมี และเลขยกกำลัง เป็นมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ นั่นคือคนที่จะเรียนรู้มโนทัศน์ของรูปสามเหลี่ยมจะต้องสามารถจำแนกเซตของรูปต่าง ๆ เป็น 2 กลุ่ม กลุ่มที่เป็นสามเหลี่ยมกับกลุ่มที่ไม่ใช่รูปสามเหลี่ยม

ทูมาซิส (Toumasis. 1995 : 98) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความคิดขั้นสุดท้ายเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เกิดจากการเรียนรู้ของนักเรียนที่มีต่อสิ่งเร้า โดยนักเรียนสามารถแยกประเภทของสิ่งเร้าที่มีความสัมพันธ์กันและไม่สัมพันธ์กันได้"

เอ็กเกนและโคช๊าค (Eggen and Kauchak. 1996 : 108) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความคิด ความเข้าใจของบุคคลที่มีต่อสิ่งเร้า ซึ่งบุคคลสามารถจัดประเภทหรือจัดกลุ่มของสิ่งเร้าที่มีคุณสมบัติบางประการร่วมกัน โดยผ่านกระบวนการเรียนรู้ เช่น มโนทัศน์ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดของมุมทั้งสี่เท่ากันและเท่ากับ 90 องศา มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันและขนานกัน เป็นต้น"

ชวาทซ์และเฮอร์สโคฟวิส (Schwarz and Hershkowiz. 1999 : 363) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความเข้าใจของบุคคลที่เป็นผลมาจากกระบวนการเรียนรู้มโนทัศน์ ซึ่งสามารถสรุปออกมาเป็นบทนิยามทางคณิตศาสตร์

ค็อกเบิร์นและลิตเลอร์ (Cockburn and Littler. 2010 : 3-6) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความคิดสำคัญในการทำความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์เฉพาะเรื่องใดเรื่องหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ ความสัมพันธ์กับจำนวน รวมถึงการให้เหตุผลอย่างเป็นระบบ หรือความคิดสำคัญเกี่ยวกับลักษณะภายนอกของสิ่งของที่เกิดจากการสังเกต หรือการได้รับประสบการณ์ที่มีการนำมาประมวลเป็นข้อสรุปทางคณิตศาสตร์

สรุปได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดที่เป็นนามธรรม ที่เดจากความเข้าใจที่เกิดจากกระบวนการเรียนรู้เกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ ด้านการคำนวณ ความสัมพันธ์จำนวน และการให้เหตุผลอย่างมีระบบ โดยนักเรียนสามารถสรุปความเข้าใจที่

ได้ออกมาในรูปของบทนิยามทางคณิตศาสตร์ การจัดกลุ่มสิ่งของหรือเหตุการณ์ใด ๆ ที่เป็นตัวอย่างและไม่ใช่ตัวอย่าง

2.2 แนวทางในการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ดังต่อไปนี้

ทราเวอร์ส (Travers. 1967 : 142) ได้กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า นักเรียนจะเกิดมโนทัศน์อย่างไรนั้นขึ้นอยู่กับวิธีสอนของครู ครูจะต้องใช้วิธีสอนให้เหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียน ซึ่งแนวทางในการจัดสภาพการเรียนการสอนเพื่อให้เกิดมโนทัศน์มีดังนี้

1. สิ่งที่จะอำนวยความสะดวกให้แก่นักเรียนในการเรียนมโนทัศน์ คือ นักเรียนเห็นความแตกต่างระหว่างตัวอย่างทางบวกและตัวอย่างทางลบ
2. ปัญหาที่มีลักษณะซ้ำ ๆ กันมักจะแก้ไขได้ง่ายกว่าปัญหาที่มีลักษณะไม่ซ้ำกัน
3. นักเรียนจะเรียนรู้มโนทัศน์ได้ง่ายขึ้น ถ้ามีตัวอย่างทางบวกและตัวอย่างทางลบควบคู่กัน
4. การศึกษาส่วนใหญ่พบว่า นักเรียนจะเรียนรู้มโนทัศน์ใหม่ได้ง่ายกว่าถ้าลดจำนวนคุณลักษณะที่ไม่เกี่ยวข้องออกไป
5. ทักษะการเรียนรู้มโนทัศน์จะเพิ่มขึ้นตามอายุ
6. มโนทัศน์ที่ง่ายความวิตกกังวลอาจจะช่วยในการเรียนรู้ได้ แต่ถ้าเป็นมโนทัศน์ที่ซับซ้อนความวิตกกังวลจะบั่นทอนประสิทธิภาพของนักเรียน
7. การเรียนรู้มโนทัศน์จะง่ายขึ้นถ้าครูแนะจุดเด่นหรือลักษณะที่ควรสังเกตได้ให้นักเรียนทราบ
8. บางครั้งควรจะต้องแสดงตัวอย่างทางบวกหลาย ๆ ตัวอย่างพร้อม ๆ กัน แต่ไม่ควรจะให้เกิน 4 ตัวอย่าง
9. การเรียนรู้มโนทัศน์จะง่ายขึ้นและสามารถที่จะนำไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ได้ ถ้านักเรียนสามารถสื่อสารมโนทัศน์ให้แก่ตัวเองได้
10. การทราบผลการเรียนทันที จะช่วยให้เกิดการเรียนรู้ดียิ่งขึ้น
11. การเรียนรู้มโนทัศน์ใหม่ ๆ ในขั้นสูงจะง่ายขึ้นถ้านักเรียนได้เรียนรู้มโนทัศน์ขั้นต้นมาอย่างสมบูรณ์ โดยได้เรียนรู้จากตัวอย่างที่ถูกต้องและมากพอ

12. ควรสอนมโนทัศน์ที่สัมพันธ์กันด้วย

13. ควรใช้วิธีการหลากหลายในการสอนมโนทัศน์ ควรให้นักเรียนมีเวลาเพียงพอที่จะปรับเนื้อหาทั้งหมดให้กับโครงสร้างของมโนทัศน์เดิม

เดอ เซคโก (De Cecco. 1968 : 402-416) ได้กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. กำหนดพฤติกรรมที่คาดหวังให้ชัดเจนว่า หลังจากที่ได้เรียนมโนทัศน์นั้นไปแล้ว นักเรียนจะทำอะไรได้บ้าง

2. วิเคราะห์มโนทัศน์ที่จะสอน ถ้ามโนทัศน์ที่จะสอนมีลักษณะเฉพาะหลายลักษณะ ครูควรลดลักษณะที่ไม่จำเป็นลง เน้นลักษณะเด่นและสำคัญ โดยการจัดเป็นหมู่เพื่อให้นักเรียนเข้าใจได้ง่าย

3. การใช้ภาษาในการสอน ครูควรใช้ภาษาให้นักเรียนเข้าใจง่าย และเข้าใจความหมายได้ถูกต้อง

4. เสนอตัวอย่างทั้งทางบวกและทางลบของมโนทัศน์ที่ต้องการสอนให้นักเรียนได้สังเกตและศึกษา โดยตัวอย่างทางลบและตัวอย่างทางบวกต้องมีมากเพียงพอที่จะทำให้นักเรียนสามารถสรุปลักษณะของมโนทัศน์นั้น และจำแนกลักษณะที่ไม่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์นั้นออกไปได้

5. เสนอตัวอย่างทั้งทางบวกและทางลบทีละอย่างในเวลาใกล้เคียงกันหรือพร้อมกัน

6. เสนอตัวอย่างทางบวกใหม่ของมโนทัศน์ที่ต้องการสอนให้นักเรียนพิจารณา เพื่อต้องการให้นักเรียนหาข้อสรุปจากความคิดทั่วไปและตอบสนองสิ่งเร้าใหม่ได้

7. เสนอตัวอย่างใหม่ ๆ ทั้งทางบวกและทางลบหลาย ๆ ตัวอย่างมา ให้นักเรียนเลือกเฉพาะตัวอย่างทางบวกหรือที่เกี่ยวข้องเท่านั้น

8. ให้นักเรียนให้คำจำกัดความของมโนทัศน์นั้น

9. ให้โอกาสนักเรียนได้ใช้มโนทัศน์ที่เรียนมาแล้ว และเสริมแรงให้นักเรียนได้เรียนรู้มโนทัศน์นั้น ๆ

คลอสไมเออร์และริปเปิล (Klausmeier and Ripple. 1971 : 422 - 432) ได้กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. การเน้นคุณลักษณะของมโนทัศน์ ครูควรชี้แจงให้นักเรียนเห็นถึงคุณลักษณะของสิ่งเร้านั้น เพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถแยกแยะลักษณะที่แตกต่างกันได้ ซึ่งทำให้นักเรียนสามารถเรียนรู้มโนทัศน์ได้ง่ายขึ้น

2. การใช้คำที่เหมาะสม การสอนมโนทัศน์ต้องให้นักเรียนใช้คำที่ใช้แทนมโนทัศน์นั้น ครูควรให้นักเรียนสามารถใช้คำที่เหมาะสมกับมโนทัศน์นั้น หรือมโนทัศน์อื่นด้วย

3. การชี้ให้เห็นธรรมชาติของมโนทัศน์ที่เรียน การสอนมโนทัศน์ครูจะต้องสอนให้นักเรียนทราบพื้นฐาน นิยาม โครงสร้างของมโนทัศน์นั้นเสียก่อนตั้งแต่ต้น

4. การพิจารณาการจัดลำดับของการเสนอตัวอย่าง ครูควรเสนอตัวอย่างทางบวกและทางลบให้มากพอที่นักเรียนจะเห็นลักษณะเฉพาะเพื่อให้นักเรียนสามารถแยกแยะความแตกต่างและสรุปมโนทัศน์ได้

5. ส่งเสริมให้นักเรียนต้องการค้นคว้า ครูควรให้นักเรียนมีทั้งความรู้และแนวทางในการแก้ปัญหาพอ ๆ กับการที่นักเรียนมีโอกาสในการตัดสินใจ และรับผิดชอบสิ่งที่ตนกระทำ

6. จัดให้มีการเรียนการใช้ประโยชน์ ครูควรมีส่วนช่วยเหลือให้นักเรียนสามารถนำมโนทัศน์ที่ได้เรียนรู้ไปใช้ให้เกิดประโยชน์

7. ให้นักเรียนรู้จักวัดผลตนเองว่าเข้าใจในความรู้นั้นหรือไม่ ถ้าไม่เข้าใจก็จะได้เริ่มต้นใหม่

สรุปได้ว่า แนวทางในการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ มีวิธีการดังนี้ คือ ครูควรวิเคราะห์มโนทัศน์ที่จะสอน ควรสอนมโนทัศน์ที่สัมพันธ์กัน ใช้วิธีการสอนมโนทัศน์ที่หลากหลาย ใช้ภาษาให้นักเรียนเข้าใจง่าย ครูควรใช้ปัญหาที่หลากหลาย ใช้สถานการณ์ปัญหาใหม่ ๆ มีตัวอย่างทางบวกและตัวอย่างทางลบควบคู่กัน ควรส่งเสริมให้นักเรียนค้นคว้าและเสริมแรงให้นักเรียนได้เรียนรู้มโนทัศน์ใหม่ ๆ การทราบผลการเรียนทันทีจะช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ดียิ่งขึ้น การเรียนรู้มโนทัศน์ใหม่ ๆ ในขั้นสูงจะง่ายขึ้นถ้านักเรียนได้เรียนรู้มโนทัศน์ขั้นต้นมาอย่างสมบูรณ์

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน (Misconceptions) คือ ความเชื่อและความเข้าใจที่ได้มาจากแนวคิดหรือความรู้ที่ไม่ถูกต้อง ความรู้ที่ไม่สมบูรณ์ คลุมเครือ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจึงเป็นแนวคิดหรือความรู้ที่แตกต่างไปจากข้อตกลงที่เป็นที่ยอมรับทั่วไป

1. ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ดังต่อไปนี้

แฮลอนและแฮสตีนส์ (Halloun and Hestence. 1985 : 1058) ได้กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นความรู้ที่ได้มาจากประสบการณ์ของบุคคล ซึ่งอาจจะได้โดยไม่สมบูรณ์

ฟิชเชอร์ (Fisher. 1985 : 53-54) ได้กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นความคลาดเคลื่อนจากมโนทัศน์ของผู้ทรงคุณวุฒิหรือผู้เชี่ยวชาญในแขนงวิชานั้น ๆ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเพียงเรื่องเดียวหรือจำนวนหนึ่งจะขยายออกไปจากเรื่องที่ง่ายไปสู่เรื่องที่ยากขึ้น เนื่องจากมีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นที่แตกต่างกันของแต่ละบุคคล มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจำนวนไม่น้อยที่ยากต่อการเปลี่ยนแปลงแก้ไขหรือแก้ไขได้น้อยมากถ้าใช้วิธีการสอนแบบดั้งเดิม มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวโยงกันอย่างมีระบบ ทำให้นักเรียนมีแนวโน้มที่จะนำไปใช้ในชีวิตของเขาด้วย และมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนบางเรื่องเป็นสิ่งที่ถ่ายทอดกันมาแต่อดีต จากผู้ที่เป็นผู้นำทางความรู้ในแขนงวิชานั้นๆ แล้วถูกถ่ายทอดมาสู่นักเรียน

ปีเตอร์สันและทรีเกรส (Peterson and Treagust. 1989 : 301) ได้กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เป็นความคิดความเข้าใจที่แตกต่างไปจากแนวคิดที่ได้รับการยอมรับของแต่ละเนื้อหา

ไดค์สตราและคณะ (Dykstra et al. 1992 : 615) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นการให้คำตอบที่เข้าใจผิดของผู้เรียน เมื่อผู้เรียนได้เผชิญกับสถานการณ์ที่เฉพาะเจาะจงหนึ่ง ๆ เป็นความเชื่อพื้นฐานต่าง ๆ ที่ผู้เรียนมีเกี่ยวกับเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นบนโลก ซึ่งผู้เรียนนำมาใช้อย่างหลากหลายในสถานการณ์ต่าง ๆ ที่แตกต่างกัน และเป็นสิ่งที่ผู้เรียนยึดถือในการที่จะอธิบายความหมายของการเกิดเหตุการณ์เหล่านั้น

ชินและบรูสเตอร์ (Chinn and Brewster. 1993 : 5) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่าเป็น ความเชื่อบางอย่างที่ไม่ถูกต้อง นักเรียนจะเชื่ออย่างรวดเร็วและฝังรากลึกในใจของนักเรียนและนักเรียนจะไม่เปลี่ยนความเชื่อนี้อย่างง่ายดาย

ลอว์สัน (Lawson. 2001 : 165) ได้ให้ความหมายว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เปน ความรู้ของตนเองที่ไม่สอดคล้องกับทฤษฎี ซึ่งเกิดจากประสบการณ์ของตนเองโดยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนี้ถ้าเกิดขึ้นกับนักเรียนแล้วจะฝังแน่นยากที่จะเปลี่ยนแปลงแก้ไขได้

ไคและรอสโค (Chi and Roscoe. 2002 : 5) ได้กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความรู้ที่ไม่ถูกต้องและยากต่อการเปลี่ยนแปลง

ดริวส์ (Drews. 2005 : 11-17) ได้ให้ความหมายว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็น ความเชื่อและความเข้าใจที่ได้มาจากแนวคิดหรือความรู้ที่ไม่ถูกต้อง ความรู้ที่ไม่สมบูรณ์ คลุมเครือ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจึงเป็นแนวคิดและความรู้ที่แตกต่างไปจากข้อตกลงที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอาจเกิดขึ้นก่อนการเรียนรู้หรือระหว่างการเรียนรู้ โดยนักเรียนมักจะไม่รู้ว่าตนเองมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอย่างไร

แอชล็อค (Ashlock. 2010 : 311-314) ได้ให้ความหมายว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็น ความเข้าใจผิดที่อาจจะเกิดความคลาดเคลื่อนของกฎ หรือความคลาดเคลื่อนตามลักษณะทั่วไปหรือผลของการตีความของนักเรียนที่ยังมีบางสิ่งยังไม่ได้เข้าใจอย่างชัดเจน

ค็อกเบิร์นและลิตเลอร์ (Cockburn and Littler. 2010 : 6 – 10) ได้กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอาจเกิดจากการใช้สูตร กฎ ผิด การสรุปที่เกินความเป็นจริงหรือน้อยกว่าความเป็นจริง การแปลความคิดที่คลาดเคลื่อนหรือนักเรียนมีความเข้าใจในสิ่งที่นักเรียนคิดยังไม่ชัดเจน

สรุปได้ว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เป็นความรู้ที่ได้มาจากประสบการณ์ที่ไม่สมบูรณ์ ความคิด ความเข้าใจที่แตกต่างไปจากหลักการ ทฤษฎี ความคลาดเคลื่อนของกฎ หรือการตีความที่เกิดจากการใช้สูตร กฎ ผิด และการสรุปน้อยกว่าความเป็นจริง

2. ลักษณะของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงลักษณะของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ไว้ดังต่อไปนี้

พิบปิก (Pippig. 1975 : 623-628) ได้จำแนกการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนจากการทำซ้ำ (Errors of Perseveration) ซึ่งมีหนึ่งองค์ประกอบ ตัวอย่างเช่น

9 x 60 = 560　　　5 x 13 = 63　　　6 x 60000 = 36000　　　41 x 7 = 47

2. ความคลาดเคลื่อนจากความสัมพันธ์ (Errors of Association) ที่เกี่ยวข้องกับการมีปฏิสัมพันธ์ที่ไม่ถูกต้องระหว่างหนึ่งองค์ประกอบ ตัวอย่างเช่น

66 + 12 = 77　　　　3 x 9 = 36　　　　56 + 15 = 67

3. ความคลาดเคลื่อนจากการแทรกแซง (Errors of Interference) มีการดำเนินงานที่แตกต่างกันหรือมีแนวคิดของผู้อื่นมาแทรกแซง ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงการแทรกแซงระหว่างขั้นตอนวิธีการสำหรับการบวกและการลบ

	6845
+	372
+	35437
+	561
	30375

คำตอบที่จะได้ นักเรียนจะเพิ่มเลขโดดในเหลักหน่วยได้ 15 การบวกเลขโดดในหลักสิบและหลักร้อยจะได้ 17 และ 13 ตามลำดับ และลบออกจากส่วนที่เหลืออีกสองหลักในคำตอบ ความคลาดเคลื่อนจากการแทรกแซง ที่เกิดขึ้นก่อนหน้าที่นักเรียนจะได้เรียนรู้ทักษะหรือขั้นตอนวิธี เพราะกระบวนการที่คล้ายคลึงกันทำให้การเรียนรู้เกี่ยวกับทักษะใหม่หรือขั้นตอนวิธีจะทำได้ยาก

4. ความคลาดเคลื่อนจากการดูดซึม ซึ่งนักเรียนจะได้ยินสิ่งที่ไม่ถูกต้องทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการอ่านหรือการเขียนและเกิดความคลาดเคลื่อนด้านอื่น ๆ ความคลาดเคลื่อนดังกล่าวมักจะเป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการขาดความสนใจและขาดความเอาใจใส่ (ความคลาดเคลื่อนที่เกิดแบบสุ่มหรือเกิดจากความประมาท)

5. ความคลาดเคลื่อนจากการการถ่ายโยงการเรียนรู้ทางลบ สามารถระบุผลของความคลาดเคลื่อนที่ได้รับจากชุดของแบบฝึกหัดหรือปัญหาคำ ตัวอย่างของความคลาดเคลื่อนดังต่อไปนี้

Task

+7 →

In	Out
31	
20	
	79
42	
	68
45	

Solution by Katja (7 : 10)

+7 →

In	Out
31	38
20	27
86	79
42	49
75	68
45	52

ไพน์และเวสท์ (Pines and West. 1983 : 47-48) ได้แบ่งประเภทของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ออกเป็น 3 ประเภทตามสถานการณ์การเรียนรู้ที่แตกต่างกัน 3 รูปแบบ ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอันเกิดจากสถานการณ์ที่ขัดแย้งกัน (Misconception Derived from Conflict Learning Situation) แบ่งตามขั้นตอนของการเกิดได้ 3 ระยะคือ

1.1 ระยะของการรับรู้ (Awareness Phase) ครูจะต้องจัดเตรียมกิจกรรมต่าง ๆ อันเป็นการชักนำสิ่งที่มีอยู่ในตัวนักเรียนให้ปรากฏออกมา ครูต้องทุ่มเวลาให้กับช่วงนี้ เนื่องจากนักเรียนจะเสาะหาทำความรู้จักกับความรู้ใหม่ ๆ ภายในขอบเขตของตนเอง และเมื่อไม่พบสิ่งที่พอใจสำหรับนักเรียนอาจก่อให้เกิดแนวความคิดที่ผิดพลาดขึ้นได้ ครูจะต้องหาทางแก้ไขความคิดที่ผิด ๆ นี้

1.2 ระยะของการไม่สมดุล (Disequilibrium Phase) เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมต่าง ๆ นักเรียนจะเกิดการเรียนรู้ซึ่งจะเป็นความรู้ที่นักเรียนค้นพบจากการตีความสิ่งที่รับรู้ใหม่ตามประสบการณ์เดิมของแต่ละบุคคล ซึ่งความรู้เดิมและความรู้ใหม่อาจจะไม่สอดคล้องกันทำให้ผู้เรียนเกิดความไม่สมดุล

1.3 ระยะจัดระบบใหม่ (Reformulation Phase) เมื่อนักเรียนได้เผชิญกับปัญหาทางคณิตศาสตร์นักเรียนจะจัดระบบความรู้ใหม่ว่ามโนทัศน์ที่ถูกต้องคืออะไร ซึ่งครูเป็นผู้คอยชี้แนะและช่วยเหลือนักเรียน

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอันเกิดจากสถานการณ์ที่สอดคล้องกัน (Misconception Derived from Congruent Learning Situation) เช่น การขยาย ความหมายของคำแบบการหยั่งรู้ (Intuitive Meaning) สู่ความหมายใหม่ (New Meaning) หรือการละทิ้งบางแง่มุมของความหมายของการหยั่งรู้เพื่อคงไว้ซึ่งแง่มุมใหม่ ๆ ที่ตนพอใจ ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหมายของคำอันกลายเป็นปรากฏการณ์ธรรมดาของเด็ก ๆ เช่น มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับกระบวนการสังเคราะห์แสงและอาหารของพืช ซึ่งนักเรียนจะนำความหมายของคำว่าอาหาร โดยทั่วไปเชื่อมโยงกับความหมายของคำว่าแหล่งอาหารของพืช ทำให้เกิดความสับสนและเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่าอาหารของพืชมาจากการที่พืชดูดอาหารจากดิน

3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอันเกิดจากสถานการณ์ที่ให้ความรู้โดยใช้สัญลักษณ์ (Misconception Derived from a Symbolic Knowledge Situation) ความรู้จากสัญลักษณ์ต่าง ๆ คือนักเรียนไม่สามารถนำความรู้จากสัญลักษณ์ (Symbolic Knowledge) ให้มาสัมพันธ์กับความรู้จริง (Real World Knowledge) ได้

สรุปได้ว่า ลักษณะของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากสถานการณ์ที่ขัดแย้งกัน จากการแทรกแซง จากการการถ่ายโยงการเรียนรู้ทางลบ จากการดูดซึม ความคลาดเคลื่อนเกิดจากสถานการณ์ที่สอดคล้องกัน จากการทำซ้ำ จากความสัมพันธ์ และความคลาดเคลื่อนเกิดจากสถานการณ์ที่ให้ความรู้โดยใช้สัญลักษณ์ จากการทำซ้ำ

3. สาเหตุของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึง สาเหตุของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ไว้ดังต่อไปนี้

ตามแนวคิดของนักวิชาการต่างประเทศ ซิมสันและมาร์ค (Simson and Marek. 1988 : 362) ฟิชเชอร์ (Fisher. 1985 : 53-54) ฮอลลอน และ เฮสเทนส์ (Halloun and Hestenes. 1985 : 1056) ไพน์และเวสท์ (Pines and West. 1983 : 47) สรุปสาเหตุของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ว่า อาจเกิดจาก คำอธิบายของผู้ใหญ่ที่ขาดความเข้าใจในมโนทัศน์เรื่องนั้นการจินตนาการจากคำอธิบายที่เป็นนามธรรม การแปลความหมายจากความเข้าใจที่ผิด ความขัดแย้งระหว่างประสบการณ์ในชีวิตจริงกับประการณ์ในโรงเรียน และ การใช้วิธีการแก้ปัญหาที่เคยใช้ได้ผลในบางสถานการณ์มาเป็นข้อสรุปในวิธีการแก้ปัญหาของตนต่อสถานการณ์ทั่วไป

แฮลอนและแฮสตีนส์ (Halloun and Hestenes. 1985 : 1056-1065) สรุปสาเหตุของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ว่า ในบางครั้งการแปลความหมายเกี่ยวกับปรากฏการณ์ธรรมชาติตามความเชื่อของนักปราชญ์ในอดีต ก็เป็นผลให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในเรื่องนั้น ๆ ได้เช่น อริสโตเติล เชื่อว่า ดินคืออาหารของพืช เป็นต้น

ออสบอนและเฟรเบิร์ก (Osborne and Freyberg. 1985 : 27) ได้เสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับสาเหตุที่ทำให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ว่า มโนทัศน์ที่เกิดขึ้นจริงในตัวนักเรียนจะแตกต่างจากมโนทัศน์ที่ครูต้องการให้นักเรียนมี เป็นเหตุให้นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกิดขึ้น ซึ่งมโนทัศน์ที่นักเรียนมักจะเข้าใจคลาดเคลื่อนจากที่ครูต้องการได้แก่มโนทัศน์ที่ได้จากตำราเรียน มโนทัศน์ที่เกิดจากการแก้ปัญหาทางด้านวิทยาศาสตร์ มโนทัศน์ที่เกิดจากการทำกิจกรรม และมโนทัศน์ที่ได้จากการสรุปความรู้ต่าง ๆ

ซิมสันและมาร์ค (Simson and Marek. 1988 : 362) ได้กล่าวว่า สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไม่ใช่มาจาก ประสบการณ์ในโรงเรียนเพียงสาเหตุเดียวที่ แต่อาจเกิดจากคำอธิบายของผู้ใหญ่ที่ยังไม่เข้าใจมโนทัศน์นั้น ๆ ดีพอ จึงทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจผิดโดยรู้เท่าไม่ถึงการณ์

สุวิมล เขี้ยวแก้ว (Suwimon. 1988 : 15-18) ได้กล่าวถึงสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน พอสรุปได้ว่า 4 ประการ คือ การนำเสนอข้อมูลหรือความหมายในบางเรื่องไม่ชัดเจน ความไม่พร้อมทางวุฒิภาวะและการพัฒนาทางด้านสติปัญญา นักเรียนมักนำคำที่ใช้ทางคณิตศาสตร์ไปเทียบความหมายกับคำที่ใช้ในชีวิตประจำวัน และการที่ครูมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในบางเรื่อง จึงทำให้นักเรียนได้รับการถ่ายทอดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในเรื่องนั้น ๆ จากครูต่ออีกทอดหนึ่ง

เรนเนอร์ (Renner et al. 1990 : 33) ได้กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกิดจากตำราเรียน วิธีการสอนโดยครู และ ข้อสรุปของนักเรียนมีอยู่ก่อน หรือแนวคิดที่ไม่สอดคล้องกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

สรุปได้ว่า สาเหตุของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เกิดจากคำอธิบายของผู้ใหญ่ที่ขาดความเข้าใจ ความเชื่อของนักปราชญ์ จากตำราเรียน จากการทำกิจกรรม ความไม่พร้อมทางวุฒิภาวะและพัฒนาการทางสติปัญญา วิธีการสอนโดยครู เกิดจากความประการณ์ในโรงเรียนกับประสบการณ์ในชีวิตจริงขัดแย้งกัน การแก้ปัญหา การแปลความหมายจากความเข้าใจที่ผิดของนักเรียน

4. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนกับการเรียนการสอน

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนกับการเรียนการสอนไว้ดังต่อไปนี้

โสภาพรรณ แสงศัพท์ และคณะ (2525 : 57) กล่าวว่า เมื่อมโนทัศน์เดิมคลาดเคลื่อนจะมีผลให้การรับรู้เรื่องราวต่าง ๆ ต่อมาในการเรียนการสอนเกิดความคลาดเคลื่อนได้ง่ายขึ้น และเมื่อเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแล้วทำให้ยากต่อการเปลี่ยนแปลงแก้ไข และไม่รู้สึกว่ากำลังมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอยู่ อันมีผลให้นักเรียนตีความหมายของสิ่งที่เรียนรู้ในชั้นเรียนแตกต่างกับความรู้ที่ครูตั้งใจจะให้ และเพิกเฉยต่อความแตกต่างที่เกิดขึ้น โดยนักเรียนคิดว่าเข้าใจและตีความหมายถูกต้องแล้วในสิ่งที่ครูสอน เมื่อเรียนรู้เรื่องใหม่ต่อ ๆ ไปก็จะเป็นอุปสรรคในการเรียนรู้ การเชื่อมโยงประสบการณ์ทำได้ช้าลงและไม่บังเกิดผล

ฟิชเชอร์ (Fisher. 1985 : 53-54) ได้กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจะขยายวงจากเรื่องง่ายไปเรื่องยาก แม้เพียงเรื่องเดียวก็จะสามารถขยายออกไปได้เนื่องจากคนเรามีการปะทะสังสรรค์กันและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนบางเรื่องเกี่ยวข้องกับความเชื่ออื่น ๆ ซึ่งเกี่ยวโยงกันอย่างมีระบบทำให้นักเรียนมีแนวโน้มที่จะนำไปใช้ในชีวิตของเขาด้วย

ไคและรอสโค (Chi and Roscoe. 2002 : 3) ได้กล่าวว่า การที่นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน จะเป็นอุปสรรคในการเรียนเนื้อหาใหม่และเป็นอุปสรรคในการทบทวนความรู้เดิม

ซูพิง (Suping. 2003 : 9) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการเรียนการสอนจะเกิดขึ้นได้ง่าย และผู้เรียนไม่ทราบว่าได้เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนขึ้นแล้ว ทำให้นักเรียน เป็นอุปสรรคในการเรียนรู้เรื่องต่อไปและยากต่อการเปลี่ยนแปลง

สรุปได้ว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนกับการเรียนการสอน เกิดขึ้นได้ง่ายจากประสบการณ์เดิม หรือความเชื่อที่ผิด หรือความรู้จากการรับรู้ในห้องเรียนที่คลาดเคลื่อน เมื่อเกิดขึ้นแล้วจะขยายวงกว้างไปกระทบกับการเรียนรู้เรื่องใหม่ต่อไป ยากต่อการเปลี่ยนแปลง

ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

นักคณิตศาสตรศึกษาได้วิเคราะห์ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ไว้ดังนี้

โพสท์และคณะ (Post at el. 1988 : 78-90) ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับกราฟ ว่านักเรียนไม่มีความเข้าใจในเรื่องความเป็นสัดส่วนและความไม่เป็นสัดส่วนของฟังก์ชัน (Proportionality or Non-proportionality of Functions)

บูธ (Booth. 1988 : 1984 : 2-14) ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับลำดับของการคำนวณ สมการพีชคณิต และสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร ตามลำดับ ดังนี้ คือ

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับลำดับของการคำนวณ คือ นักเรียนใช้วงเล็บและเรียงลำดับก่อนหลังการคำนวณไม่ถูกต้อง

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสมการพีชคณิต คือ การนำเสนอสัญลักษณ์แทนสถานการณ์

3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร คือ การรวมพจน์

คิลแพทริคและคณะ (Kilpatrick et al. 2001 : 150-159) ได้ระบุถึงความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับ จำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข อัตราส่วน สัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร ฟังก์ชัน และกราฟ ตามลำดับ ดังนี้ คือ

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข คือ การคำนวณการบวก / การลบทศนิยม

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับอัตราส่วนและสัดส่วน คือ ในการเขียนอัตราส่วนที่แตกต่างกันและขนาดของอัตราส่วน

3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการหาคำตอบทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร คือ นักเรียนมีความเชื่อว่าคำตอบไม่สามารถเป็นจำนวน

4. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน คือ การแปลความฟังก์ชันไม่ถูกต้อง

5. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับกราฟ คือ การแปลความกราฟไม่ถูกต้อง

คาลช์แมนและเคอดินเจอร์ (Kalchman and Koedinger. 2005 : 351-393) ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชัน และกราฟ ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน คือ ความชัน ตัวแปรอิสระ ตัวแปรตาม สมการ ตารางและการนำเสนอโดยใช้กราฟ

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับกราฟ คือ ความชันของเส้นตรง

วู (Wu. 2005 : 10-17) ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข และสมการทางพีชคณิต ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข คือ นักเรียนไม่ตระหนักถึงความหมายที่แตกต่างกันของเศษส่วน (สัมประสิทธิ์ ค่าคงที่ ความชัน และสัดส่วน ฯลฯ) และนักเรียนมีปัญหาในการทำความเข้าใจค่าของเศษส่วน

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสมการทางพีชคณิต คือ นักเรียนไม่มีความเข้าใจกระบวนการแก้สมการ และเกิดความคลาดเคลื่อนในการคำนวณ (ทศนิยม เศษส่วน และจำนวนเต็ม)

แอชล็อค (Ashlock. 2006 : 136-150) ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข และสมการทางพีชคณิต ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข คือ นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการแรเงาเศษส่วน หลักการทำให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ หลักการบวกการลบเศษส่วน หลักการคูณการหารเศษส่วน การวางตำแหน่งทศนิยมในการบวกลบคูณหารเศษส่วน ใช้เครื่องหมายไม่ถูกต้องในการบวกจำนวนเต็ม

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสมการทางพีชคณิต คือ นักเรียนไม่สามารถทำให้เป็นพจน์อย่างง่ายได้ และไม่ใช้สมบัติการแจกแจง (Distributive Property)

ชิฟเตอร์และคณะ (Schifter et al. 2008 : 413-447) ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับลำดับของการคำนวณ ว่านักเรียนมีความเชื่อที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับสมบัติการสลับที่ (Commutative Property) และสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (Associative Property) สำหรับการลบและการหาร

บลันทัน (Blanton. 2008 : 91) ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับกราฟ ว่านักเรียนมีปัญหาในเรื่องสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน (The Shape of the Function)

แวน ดี วอลเล่และคณะ (Van de Walle. 2010 : 104-105) ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชัน ว่านักเรียนไม่มีความเข้าใจในเรื่องความเป็นสัดส่วนและความไม่เป็นสัดส่วนของฟังก์ชัน (Proportionality or Non-proportionality of Functions)

สรุปได้ว่า ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ได้แก่

1. การนำเสนอสัญลักษณ์แทนสถานการณ์
2. การใช้วงเล็บเรียงลำดับก่อนหลังของการคำนวณ และการรวมพจน์

3. การเขียนสัญลักษณ์แทนอัตราส่วน

4. มีความเชื่อว่าการหาคำตอบในพีชคณิตไม่สามารถเป็นจำนวนได้

5. การแปลความฟังก์ชันไม่ถูกต้อง ปัญหาในเรื่องสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน และความเข้าใจในเรื่องความเป็นสัดส่วนและความไม่เป็นสัดส่วนของฟังก์ชัน

6. ความชันของเส้นตรง เรื่องของกราฟ การแปลความกราฟไม่ถูกต้อง

7. เข้าใจความหมายของเศษส่วนคลาดเคลื่อน และการคำนวณ โดยเฉพาะทศนิยม เศษส่วน และจำนวนเต็ม

8. ไม่เข้าใจกระบวนการแก้สมการ เข้าใจไม่ถูกต้องเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ที่ใช้ในการแก้สมการ

9. ไม่สามารถทำให้เป็นพจน์อย่างง่ายได้

ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท. 2554 : 56-82) ได้นำเสนอตัวอย่างความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ในเนื้อหาทางพีชคณิต มีเนื้อหาบางส่วนที่อาจสับสนเกี่ยวกับการให้ความหมายคำบางคำทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในลักษณะต่างกัน ดังนี้

1. จำนวนนับที่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบเพียงสองตัวคือ 1 และตัวเอง เรียกว่า จำนวนเฉพาะ

2. จำนวนนับที่มี 2 เป็นตัวประกอบ เรียกว่า จำนวนคู่

ข้อความข้างต้นให้ความหมายในลักษณะเป็น ข้อตกลง โดยใช้คำว่า “เรียกว่า” ข้อความเหล่านี้เป็นความรู้ที่ให้ในระดับเบื้องต้น ก่อนที่นักเรียนจะมีความรู้พอเพียงในเรื่องจำนวนเต็ม จากข้อตกลงข้างต้น จะมีความหมายไปในทางเดียว คือ จำนวนนับที่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบเพียงสองตัวคือ 1 และตัวเอง เรียกว่า จำนวนเฉพาะ ไม่ได้หมายความว่า จำนวนเฉพาะ จะมีเพียงจำนวนนับที่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบเพียงสองตัวคือ 1 และตัวเอง เท่านั้น ในทำนอง เดียวกัน จำนวนนับที่มี 2 เป็นตัวประกอบ เรียกว่า จำนวนคู่ ไม่ได้หมายความว่า จำนวนคู่ จะมีเพียงจำนวนนับที่มี 2 เป็นตัวประกอบ เท่านั้น ในระดับที่สูงขึ้นไป ความหมายของคำที่ปรากฏ เหล่านี้ จะมีความสมบูรณ์ชัดเจนขึ้นตามกรอบของเนื้อหา เช่น

ข้อความที่หนึ่ง p เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ p เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับ 0 หรือ ± 1 และหารลงตัวด้วย ± 1 และ ± p เท่านั้น ข้อความที่สอง จำนวนคู่ คือ จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว

ข้อความทั้งสองเป็นบทนิยาม ซึ่งข้อความใด ๆ ที่กำหนดไว้เป็นบทนิยามแล้ว ให้ยอมรับ โดยไม่มีการพิสูจน์

ความเข้าใจคลาดเคลื่อนในมโนทัศน์ทางพีชคณิต ส่วนใหญ่เป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความไม่รอบคอบ ทำให้เกิด ข้อผิดพลาดในหลาย ๆ เรื่อง เช่น เอกนาม การระบุดีกรีของเอกนาม เอกนามที่คล้ายกัน การไม่กำหนดตัวแปรที่นำมาใช้สร้างสมการในการแก้โจทย์ปัญหา ที่สำคัญคือการขาดทักษะในการดำเนินการ ทางพีชคณิต ทำให้ได้คำตอบคลาดเคลื่อนในเกือบทุกขั้นตอนของการดำเนินการ สำหรับความเข้าใจคลาดเคลื่อนที่เกิดกับครูที่พบมากที่สุด คือ ไม่เห็นความสำคัญของการตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการแก้สมการ โดยเฉพาะในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการ ไม่ได้เน้น และให้ความสำคัญกับการนำค่าของตัวแปรที่ได้ไปตรวจสอบกับเงื่อนไขในโจทย์ อีกประเด็นหนึ่งคือ ขาดการเน้นย้ำถึงการเขียนคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีกราฟเป็นเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งนักเรียน มักจะเขียนตอบว่ามีคำตอบมากมายโดยไม่ระบุว่าคำตอบเหล่านั้นจะต้องได้จากคู่อันดับ (x,y) ใด รวมถึงวิธีแก้อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีเครื่องหมาย ≠ ซึ่งครูบางคนแก้อสมการโดยไม่หาคำตอบ ผ่านการแก้สมการ สำหรับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ที่อาจพบบ่อย ๆ มีดังนี้

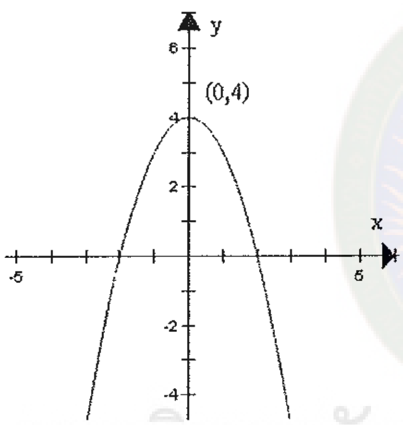
ตารางที่ 1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

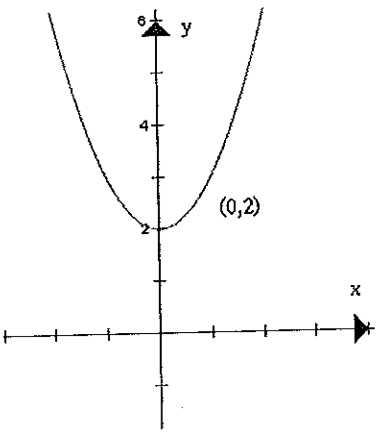
มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	มโนทัศน์ที่ถูกต้อง
ข้อที่ 1. มีความคลาดเคลื่อนในการเขียนอธิบาย เช่น กำหนดให้ $2x + 1 = 3$ เป็นสมการที่ 1	**ข้อที่ 1.** จาก สมการ $2x + 1 = 3$
1. สมการ $2x + 1 = 3$ มี $x = 1$ เป็นคำตอบ	1. $x = 1$ ไม่ใช่คำตอบของสมการ ดังกล่าว เนื่องจากเขียนอยู่ในรูปสมการ ควรตอบว่า 1 เป็นคำตอบของสมการ $2x + 1 = 3$
2. แทน $x = 3$ ลงในสมการที่ 1	2. ในการแทนตัวแปรของสมการด้วยจำนวน ควรเขียนว่า แทน x ในสมการที่1 ด้วย 3 ทั้งนี้เพราะ $x = 3$ เป็นสมการ ไม่ใช่จำนวน
ข้อที่ 2. สับสนเกี่ยวกับการหาดีกรีของเอกนาม ดังตัวอย่าง เข้าใจว่า เอกนามที่มีตัวแปรมากกว่า	**ข้อที่ 2.** ตามข้อตกลง เรียกผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวในเอกนามว่า **ดีกรีของเอกนาม**

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	มโนทัศน์ที่ถูกต้อง
หนึ่งตัวและเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นหนึ่ง เป็นเอกนามที่มีดีกรี 1 เช่น 3xy มีดีกรี 1 เข้าใจว่า ให้ใช้เลขชี้กำลังที่สูงสุดของตัวแปรในชุดของเอกนามเป็นดีกรีของเอกนาม เช่น x^2y มีดีกรี 2 เข้าใจว่า ให้หาผลบวกของเลขชี้กำลังทุกตัวที่มีในเอกนามนั้นเป็นดีกรีของเอกนาม เช่น 3^2x^3 มีดีกรีเป็น 5	ดังนี้ 3xy มีดีกรี $1 + 1 = 2$ x^2y มีดีกรี $2 + 1 = 3$ 3^2x^3 มีดีกรี 3
ข้อที่ 3. เข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเอกนามที่คล้ายกัน เช่น 1. เข้าใจผิดว่า $5x^2y^3$ และ $-7\,y^3x^2$ ไม่คล้ายกัน 2. เข้าใจผิดว่า $4x^3y^2$ และ $3\,y^3x^2$ คล้ายกัน	**ข้อที่ 3.** 1. เนื่องจากเอกนามสองเอกนามคล้ายกันเมื่อเอกนามทั้งสองมีตัวแปรชุดเดียวกันและเลขชี้กำลังของตัวแปรเดียวกันในแต่ละเอกนามเท่ากัน ดังนั้น $5x^2y^3$ และ $-7\,y^3x^2$ คล้ายกัน เพราะมีตัวแปรชุดเดียวกันคือ x กับ y และเลขชี้กำลัง x ในเอกนามทั้งสอง คือ 2 และเลขชี้กำลังของ y ในเอกนามทั้งสองเท่ากัน คือ 3 2. เอกนามทั้งสองเอกนาม ถึงแม้จะมีตัวแปรชุดเดียวกัน แต่ $4x^3y^2$ และ $3\,y^3x^2$ ไม่คล้ายกัน เพราะตัวแปรตัวเดียวกันของแต่ละเอกนามมีเลขชี้กำลังไม่เท่ากัน เอกนามแรก ตัวแปร x มีเลขชี้กำลังเป็น 3 แต่ เอกนามหลัง ตัวแปร x มีเลขชี้กำลังเป็น 2 และ เอกนามแรก ตัวแปร y มีเลขชี้กำลังเป็น 2 แต่ เอกนามหลัง ตัวแปร y มีเลขชี้กำลังเป็น 3

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	มโนทัศน์ที่ถูกต้อง
ข้อที่ 4. ขาดทักษะในการลบพหุนามเนื่องจากเข้าใจคลาดเคลื่อนเรื่องการดำเนินการของพหุนาม เช่น $8x^4 - 5x^3 = 3x$ โดยนักเรียนเข้าใจผิด ว่าสามารถนำสัมประสิทธิ์ของพหุนามมาลบกัน และนำจำนวนซึ่งเป็นเลขชี้กำลังของตัวแปรตัวเดียวกันมาลบกัน ซึ่งทำให้ได้ว่า $8x^4 - 5x^3 = 3x$	**ข้อที่ 4.** ที่ถูกต้อง คือ เอกนามทั้งสองไม่คล้ายกันจึงหาผลลบที่เป็นเอกนามไม่ได้ ต้องได้ว่าผลลบอยู่ในรูปของพหุนาม คือ $8x^4 - 5x^3$
ข้อที่ 5. เข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการคูณเอกนาม เช่น $(2x)(3xy)$ $= (2x\times 3)(2x \times x)(2x\times y)$ $= (6x)(2x^2)(2xy)$ นักเรียนเข้าใจผิดว่า สามารถใช้สมบัติการแจกแจงกับการคูณดังตัวอย่างที่ยกมาได้	**ข้อที่ 5.** ที่ถูกต้อง คือ การคูณเอกนามตั้งแต่สองเอกนามใด ๆ ไม่สามารถทำได้ดังตัวอย่างที่ยกมา แต่เป็นการคูณกันในระบบจำนวนจริงและใช้สมบัติของการคูณเลขยกกำลัง ดังนั้น $(2x)(3xy) = (2\times 3)(x\times xy)$ $= 6x^2y$
ข้อที่ 6. เข้าใจผิดว่าการหารพหุนามด้วยเอกนาม เช่น $\frac{3x^2+2x}{2x}$ ได้เท่ากับ $3x^2$ โดยใช้การตัดทอนเหมือนการหารจำนวนที่ตัวตั้งอยู่ในรูปการหารจำนวนที่ตัวตั้งอยู่ในรูปการคูณ เช่น $\frac{36+\cancel{8}}{\cancel{8}} = 36$	**ข้อที่ 6.** นักเรียนอาจมีความเข้าใจสับสนกับเรื่องการหารจำนวน ซึ่งเคยใช้การตัดทอนครู จึงควรย้ำให้เข้าใจชัดเจน ว่าการหาผลหารของการหารพหุนามด้วยเอกนามที่ไม่ใช่ศูนย์นั้นจะต้องนำเอกนามที่เป็นตัวหารไปหารทุกพจน์ของตัวตั้ง ดังนั้น $\frac{3x^2+2x}{2x} = \frac{3x^2}{2x} + \frac{2x}{2x}$ $= \frac{3}{2}x + 1$ นั่นคือ จะได้ว่า $\frac{3}{2}x + 1$ เป็นผลหาร และแสดงว่า $3x^2+1$ หารด้วย $2x$ ลงตัว การตรวจสอบความถูกต้องของการหาร

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	มโนทัศน์ที่ถูกต้อง
	เป็นเรื่องหนึ่งที่จะทำให้นักเรียนเข้าใจถูกต้องมากขึ้น โดยใช้ความสัมพันธ์ตัวตั้ง = (ตัวหาร × ผลหาร) + เศษ โดยในโจทย์ข้อนี้มีเศษเป็น 0 เพราะเป็นการหารลงตัว การตรวจสอบ จึงทำได้ดังนี้ $3x^2 + 2x = 2x \times \left(\frac{3}{2}x + 1\right) + 0$ $3x^2 + 2x = 3x^2 + 2x$ ซึ่งเป็นจริงแต่ตรวจสอบกับผลหาร $3x^2$ ที่นักเรียนหาได้ จะได้ $3x^2 + 2x = 2x\,(3x^2)$ $3x^2 + 2x = 6x^3$ ซึ่งไม่เป็นจริง
ข้อที่ 7. สับสนเกี่ยวกับการคูณพหุนามที่อยู่ในรูปยกกำลังกับการใช้สมบัติของเลขยกกำลังที่อยู่ในรูป $(ab) = a^2b^2$ ทำให้เข้าใจว่า $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ และ $(x + y)^3 = x^3 + y^3$	**ข้อที่ 7.** ครูต้องย้ำกับนักเรียนให้เข้าใจถึงความหมายของการยกกำลังของพหุนามว่าเป็นการนำพหุนามที่เป็นฐานมาคูณกันตามจำนวนของเลขชี้กำลัง เช่น $(x + y)^2$ หมายถึง $(x + y)(x + y)$ $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$ $= (x + y)(x) + (x + y)(y)$ (สมบัติการแจกแจง) $= x^2 + xy + xy + y^2$ $= x^2 + 2xy + y^2$ และ $(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$ $= (x + y)^2(x + y)$ $= (x^2 + 2xy + y^2)(x + y)$ $= (x^2 + 2xy + y^2)(x) +$ $(x^2 + 2xy + y^2)(y)$

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	มโนทัศน์ที่ถูกต้อง
	$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y +$ $2xy^2 + y^3$ $= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
ข้อที่ 8. เข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับค่าสูงสุดค่าต่ำสุดที่กล่าวถึงเรื่องพาราโบลา นักเรียนมักใช้จุดสูงสุดแทนค่าสูงสุด หรือใช้จุดต่ำสุดแทนค่าต่ำสุด เช่น ในการหาค่าสูงสุดจากสมการ $y = -x^2 + 4$ ซึ่งมีกราฟดังนี้  จะตอบว่า ค่าสูงสุดคือ (0, 4) หรือจากสมการ $y = x^2 + 2$ จะได้กราฟ ดังนี้	**ข้อที่ 8.** จากสมการ $y = -x^2 + 4$ จะได้จุดสูงสุดคือ (0, 4) และค่าสูงสุดคือ 4 และจากสมการ $y = x^2 + 2$ จะได้จุดต่ำสุดคือ (0, 2) และค่าต่ำสุดคือ 2 การเขียนกราฟซึ่งเป็นพาราโบลาลงบนระนาบในระบบพิกัดฉาก แต่ละจุดบนระนาบแสดงด้วยคู่อันดับในรูป (x, y) ดังนั้นจุดสูงสุดของกราฟ หรือจุดต่ำสุดของกราฟ จะต้องเขียนอยู่ในรูปคู่อันดับ สำหรับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด คือค่าของ y ที่สูงสุดหรือต่ำสุดในสมการนั้น ๆ

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	มโนทัศน์ที่ถูกต้อง
 จะตอบว่า ค่าต่ำสุดคือ (0. 2)	
ข้อที่ 9. ในการทำโจทย์สมการ นักเรียนมักเข้าใจคลาดเคลื่อนว่าคำตอบที่ได้จากสมการเป็นคำตอบของโจทย์ปัญหานั้น เช่น นายแดง เลี้ยงแพะและไก่รวมกันจำนวน 80 ตัว เมื่อนับจำนวนของแพะและขาของไก่รวมกันได้ 294 ขา จงหาว่ามีจำนวนแพะและจำนวนไก่อย่างละกี่ตัว ให้มีแพะจำนวน x ตัว และไก่จำนวน 80 – x ตัว สมการ คือ $4x + 2(80-x) = 294$ จากการแก้สมการได้ $x = 67$ นักเรียนก็นำ 67 ไปแทน x ในสมการแล้วดูว่าได้สมการที่เป็นจริงหรือไม่ โดยถือว่าเป็นการตรวจคำตอบของโจทย์ปัญหานั้น ความเข้าใจ	**ข้อที่ 9.** ครูต้องอธิบายให้นักเรียนเข้าใจว้าค่าของตัวแปรที่ได้จากการแก้สมการไม่ใช่คำตอบของโจทย์ปัญหาในทันที ที่ถูกต้องนักเรียนจะต้องนำค่าของตัวแปรที่ได้จากสมการไปตรวจสอบกับเงื่อนไขในโจทย์ปัญหาว่าสอดคล้องกับเงื่อนไขจริงหรือไม่ ถ้าสอดคล้องจึงสรุปได้ว่าเป็นคำตอบของโจทย์ปัญหา ในกรณีนี้จะต้องนำ 67 ไปแทนจำนวนแพะและนำ $80-67$ หรือ 13 ไปแทนจำนวนไก่ แล้วนะ 67 และ 13 ไปหาจำนวนขาของสัตว์ทั้งสองชนิดได้ $(4\times67)+(2\times13)$ ทำให้ได้จำนวนขาทั้งหมดเป็น 294 ขา ซึ่งเป็นจริงตามเงื่อนไขในโจทย์ จึงจะสรุปเป็นคำตอบของโจทย์

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	มโนทัศน์ที่ถูกต้อง
เช่นนี้เป็นความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการตรวจสอบคำตอบและการหาคำตอบของโจทย์สมการ	ปัญหาได้ว่า มีแพะ 67 ตัว และมีไก่ 13 ตัว
ข้อที่ 10. ในการแก้อสมการที่มีเครื่องหมาย ≠ มักจะหาคำตอบจากอสมการในรูปเครื่องหมาย ≠ เช่น จงหาคำตอบของ $2x - 1 \neq 5$ จะใช้วิธีทำโดยเขียน $2x \neq 5 + 1$ $2x \neq 6$ $x \neq 3$	**ข้อที่ 10.** ในการแก้อสมการที่มีเครื่องหมาย ≠ เมื่อต้องการจะหาคำตอบของอสมการที่อยู่ในรูปเครื่องหมาย ≠ จะต้องหาคำตอบผ่านการแก้สมการ เช่น จงหาคำตอบของ $2x - 1 \neq 5$ เราจะใช้วิธีการแก้สมการ $2x - 1 = 5$ จะได้ $x = 3$ ทำให้ได้ต่อไปว่า 3 เป็นคำตอบของสมการ $2x - 1 = 5$ ดังนั้น $2x - 1 \neq 5$ จะมีคำตอบเป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 3 ถึงแม้คำตอบที่ได้จากการหาคำตอบโดยไม่ผ่านการแก้สมการ จะเท่ากัน แต่วิธีการหาคำตอบไม่ถูกต้อง เนื่องจากเราไม่มีสมบัติที่ใช้สำหรับอสมการที่อยู่ในรูปเครื่องหมาย ≠ มีแต่สมบัติที่ใช้สำหรับอสมการในเครื่องหมาย < หรือ >
ข้อที่ 11. สับสนในคำสั่งที่ว่า จงหาตัวประกอบของจำนวนนับจำนวนหนึ่ง กับจงแยกตัวประกอบของจำนวนนับจำนวนหนึ่ง ทั้งยังเขียนแสดงไม่ถูกต้อง เช่น 1. จงหาตัวประกอบของ 6 นักเรียนมักตอบว่า ตัวประกอบของ 6 คือ 2, 3 และ 6 หรือ ตอบว่า 6 = 1, 2, 3, 6	**ข้อที่ 11.** จากบทนิยาม ตัวประกอบของจำนวนนับใดๆ คือ จำนวนนับที่หารจำนวนนับนั้นลงตัว ดังนั้น ตัวประกอบทั้งหมดของ 6 คือ 1, 2, 3 และ 6 การแยกตัวประกอบของจำนวนนับหนึ่ง คือ การเขียนจำนวนนั้นให้อยู่ในรูปการคูณของตัวประกอบเฉพาะ เช่น เมื่อมีคำสั่งว่า

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	มโนทัศน์ที่ถูกต้อง
2. จงแยกตัวประกอบของ 6 นักเรียนมักตอบผิดในลักษณะของคำตอบที่ต่างกัน เช่น 2×3 และ $1 \times 2 \times 3$	จงแยกตัวประกอบของ 6 จะต้องเขียนว่า $6 = 2 \times 3$ ข้อที่ครูควรย้ำกับนักเรียนที่มักหลงลืมคือ 1. ในกรณีให้หาตัวประกอบของจำนวนนับ นักเรียนมักลืมตัวประกอบ 1 และการเขียนแสดงว่าตัวประกอบของ 6 = 1, 2, 3, 6 เป็นการใช้เครื่องหมาย = อย่างไม่ถูกต้อง 2. ในกรณีให้แยกตัวประกอบ นักเรียนมักลืมเขียนในรูปประโยคที่มีเครื่องหมาย =
ข้อที่ 12. พยายามให้ความหมายของจำนวนเช่นว่า จำนวน คือ ปริมาณ ทั้งยัง สับสนในการใช้คำว่า ตัวเลขและจำนวน เช่น กล่าวว่า 1. นำเลข 15 บวกกับเลข 21 2. 18 เป็นเลขคู่ และ 17 เป็นเลขคี่ 3. 35 เป็นจำนวนสองหลัก	**ข้อที่ 12.** จำนวน เป็นคำอนิยาม มนุษย์ใช้จำนวนเพื่อบอกปริมาณ และมีสัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแสดงแทนจำนวนซึ่งเรียกว่า ตัวเลข การกล่าวที่ถูกต้อง คือ 1. นำจำนวน 15 บวกกับจำนวน 21 หรือกล่าวว่า นำ 15 บวก 21 2. 18 เป็นจำนวนคู่ และ 17 เป็นจำนวนคี่ 3. 35 เป็นจำนวนสองหลัก ครูไม่ควรให้ความหมายคำว่าตัวเลขในลักษณะเป็นบทนิยามว่า "ตัวเลข คือ สัญลักษณ์ที่ใช้แสดงจำนวน" เนื่องจากบางครั้งเราไม่ได้ใช้ตัวเลขแสดงจำนวน แต่ใช้ตัวเลขเป็นชื่อเรียกเฉพาะ เช่น ชื่อบ้านเลขที่ ชื่อซอย และเลขประจำตัว
ข้อที่ 13. ให้ความหมายว่า ∞ เป็นจำนวนที่มากเหลือคณานับ หรือเป็นจำนวนที่ได้จากการนำศูนย์ไปหารจำนวนที่ไม่เท่ากับศูนย์	**ข้อที่ 13.** ∞ ไม่ใช่จำนวน แต่เป็นสัญลักษณ์ที่แสดงความหมายว่า เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีขอบเขตจำกัด

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	มโนทัศน์ที่ถูกต้อง
ข้อที่ 14. นักเรียนมักมีความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวน เช่น เข้าใจว่า $-2\frac{1}{4}$ เป็นจำนวนที่เกิดจาก -2 รวมกับ $\frac{1}{4}$	**ข้อที่ 14.** จำนวนคละที่เป็นจำนวนลบนั้นเกิดจากจำนวนเต็มลบรวมกับเศษส่วนที่เป็นจำนวนลบ เช่น $-2\frac{1}{4}$ เกิดจาก -2 รวมกับ $-\frac{1}{4}$ หรือ $(-2)+\left(\frac{1}{4}\right)$
ข้อที่ 15. นักเรียนมีความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการหารเศษส่วนด้วยเศษส่วน เช่น $\frac{12}{15}\div\frac{3}{5}=\frac{12\div 3}{15\div 5}$ และอาจมีการสอนให้เข้าใจคลาดเคลื่อนได้โดยทำให้เห็นว่า $\frac{12}{15}\div\frac{3}{5}=\frac{12}{15}\times\frac{5}{3}$ ซึ่ง $\frac{12}{15}\times\frac{5}{3}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{12\div 3}{15\div 5}$	**ข้อที่ 15.** การหารเศษส่วนที่ตัวตั้งและตัวหารเป็นเศษส่วน เป็นการหาเศษส่วนที่เป็นผลหารตามความสัมพันธ์ ตัวหาร $\times$ ผลหาร = ตัวตั้ง ในกรณี $\frac{12}{15}\div\frac{3}{5}$ จึงมีข้อตกลงว่าได้ผลหารเป็น $\frac{12}{15}\times\frac{5}{3}$ ครูไม่ควรสอนให้นักเรียนจำในทำนองว่าในการหารเศษส่วนด้วยเศษส่วน ให้เอาตัวเศษหารด้วยตัวเศษ และตัวส่วนหารด้วยตัวส่วน
ข้อที่ 16. ไม่มีความชัดเจนในลำดับการดำเนินการของจำนวน เช่น $(-8)+2^2-3\times 10\div 6$	**ข้อที่ 16.** โดยปกติเมื่อมีการดำเนินการหลายอย่างปนกัน เช่น บวก ลบ คูณ หาร หรือ ยกกำลัง จะนิยมใช้วงเล็บช่วยในการกำหนดลำดับการคำนวณเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เดียวกันแต่บางครั้ง เราอาจพบโจทย์ที่ไม่มีวงเล็บกำกับไว้ ถ้าจำเป็นต้องทำโจทย์ในลักษณะนี้ ก็ให้ใช้หลักการดังนี้ 1. ถ้ามีการยกกำลัง ให้ทำเป็นลำดับแรก และทำจากซ้ายไปขวา 2. ถ้ามีการคูณหรือการหาร ให้ทำเป็นลำดับที่สอง และทำจากซ้ายไปขวา 3. ถ้ามีการบวกหรือการลบ ให้ทำเป็นลำดับที่สาม และทำจากซ้ายไปขวา

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	มโนทัศน์ที่ถูกต้อง
	ดังนั้น $(-8)+2^4-3\times10\div6$ $=(-8)+16-3\times10\div6$ $=(-8)+16-30\div6$ $=(-8)+16-5$ $=8-5$ $=3$ สำหรับหลักการข้างต้น ในกรณีที่มีฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ เช่น $\sqrt{9}$ และ $\sin 30^\circ$ ปะปนอยู่ด้วย ให้ทำก่อนการ ยกกำลังตามหลักการข้อ 1. และตามด้วย ข้อ 2. และข้อ 3. ข้างต้นตามลำดับ โดยทำจากซ้ายไปขวาเช่นกัน
ข้อที่ 17. นักเรียนมีความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนอตรรกยะโดยแทนค่าจำนวนอตรรกยะด้วยจำนวนตรรกยะ และมักใช้สัญลักษณ์ที่ไม่ถูกต้อง ทั้งที่โจทย์ไม่ได้กำหนดให้มา เช่นใช้ $\pi=\frac{22}{7}$ หรือ $\pi=3.14$ $\sqrt{2}=1.4$	**ข้อที่ 17.** จำนวนอตรรกยะและจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนคนละกลุ่มที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันปกติ ไม่สามารถใช้เครื่องหมายเท่ากับ (=) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในสองกลุ่มนี้ได้ แต่สามารถใช้เครื่องหมาย $\approx$ ซึ่งหมายความว่ามีค่าใกล้เคียงกัน เช่น $\pi\approx\frac{22}{7}$ หรือ $\pi\approx3.14$ $\sqrt{2}\approx1.4$

แนวคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

ได้มีนักคณิตศาสตรศึกษาได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ไว้ดังนี้

ราดาท์ส (Radatz. 1979 : 163-172) ได้วิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ในเกรดสี่ ของประเทศเยอรมนี สรุปเป็นแนวคิด ได้ดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความยากลำบากด้านภาษา (Errors Due to Language Difficulties)

2.ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความยากลำบากในการรับข้อมูลเชิงพื้นที่ (Errors Due to Difficulties on Obtaining Spatial Information)

3.ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความบกพร่องในทักษะที่จำเป็น ข้อเท็จจริงและแนวคิด (Errors Due Deficient Mastery of Prerequisite Skill, Fact and Concept)

4. ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการเชื่อมโยงที่ไม่ถูกต้องหรือความคิดที่ไม่ยืดหยุ่น (Errors Due to Incorrect Associations or Rigidity of Thinking)

5. การประยุกต์ใช้กฎหรือกลยุทธ์ที่ไม่เกี่ยวข้อง (Errors Due to the Application of Irrelevant Rules of Strategies)

ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความยากลำบากด้านภาษา (Errors Due to Language Difficulties)

ภาษาทางคณิตศาสตร์เป็นภาษาสากล สำหรับนักเรียนที่ต้องรู้และเข้าใจแนวคิด สัญลักษณ์และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ความเข้าใจผิดเกี่ยวกับความหมายภาษาทางคณิตศาสตร์ อาจก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนที่จุดเริ่มต้นของการแก้ปัญหา

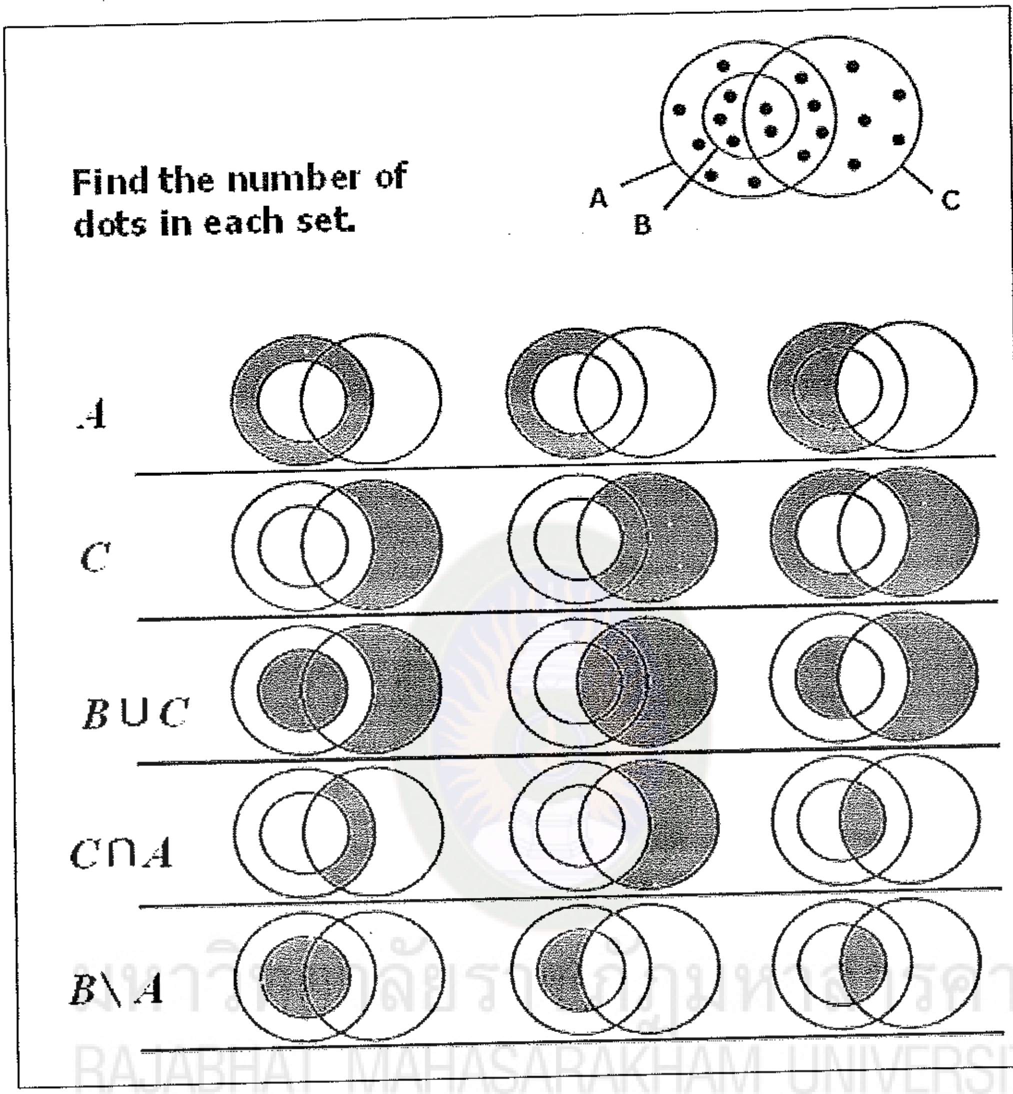
2. ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความยากลำบากในการรับข้อมูลเชิงพื้นที่ (Errors Due to Difficulties on Obtaining Spatial Information)

ตำราคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาในโรงเรียนได้แสดงให้เห็นแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นในเนื้อหาการประมวลผลแทนสัญลักษณ์และการนำเสนอความรู้ทางคณิตศาสตร์ การตีความทางการศึกษาของบรูเนอร์เกี่ยวข้องกับการพัฒนาแนวคิด (Concept) ที่เกิดขึ้นให้มีความหลากหลาย มีคำแนะนำที่เป็นสัญลักษณ์ไดอะแกรมและการสร้างของเงื่อนไขโดยใช้ภาพในการทำงานทางคณิตศาสตร์ สิ่งเหล่านี้ทำให้เกิดความต้องการความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และความสามารถในการแยกแยะภาพ แม้ว่าความต้องการ

ดังกล่าวจะน้อยกว่าความต้องการให้นักเรียนรู้เรื่องเนื้อหาที่เฉพาะเจาะจง จากตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต และการเรียนรู้ของนักเรียนจะเป็นตัวแทนที่เฉพาะเจาะจงสำหรับเนื้อหาคณิตศาสตร์ทั้งหมดที่เรียนในโรงเรียน จำนวนความคลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์จะแตกต่างกันระหว่างบุคคลอย่างมีนัยสำคัญในภาพเชิงพื้นที่และความคิดเชิงพื้นที่ (Spatial Imagery and Spatial Thinking) และมีความยากลำบากที่เกิดขึ้นสำหรับเด็กบางคนในการได้รับข้อมูลเชิงพื้นที่หรือข้อมูลที่เป็นภาพหรือในการปฏิบัติงานทางคณิตศาสตร์

จากตัวอย่าง แผนภาพที่ 1 แสดงให้เห็นเซตห้าเซต ซึ่งเป็นความคลาดเคลื่อนที่พบบ่อยที่สุดเมื่อนักเรียนอ่านแผนภาพเวนน์ ส่วนที่แรเงาตรงกับจำนวนที่กำหนดให้ซึ่งนักเรียนใช้ในการตอบคำถาม งานทางคณิตศาสตร์ใช้เป็นหนึ่งในการตรวจสอบการตอบสนองของนักเรียนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่คล้ายกันแต่มีการนำเสนอในบริบทที่แตกต่างกัน. นักเรียนแก้ปัญหาโดยเกิดความคลาดเคลื่อนที่น้อยลงและเกิดความคลาดเคลื่อนที่แตกต่างกัน ซึ่งพบว่าปัญหาเกิดจากนักเรียนไม่มีความเข้าใจในการอ่านแผนภาพเวนน์ ไม่มีความเข้าใจในสัญลักษณ์หรือไม่มีความเข้าใจในสถานการณ์ที่บริบทที่แตกต่างกัน นักเรียนจำนวนมากมีความยากลำบากในการอ่านแผนภาพเวนน์ เพราะวาดแผนภาพไม่ถูกต้องและละเลยการวาดเส้นที่ไม่เกี่ยวข้อง

จากการตรวจสอบได้แสดงให้เห็นว่าการประมวลผลแทนสัญลักษณ์และการนำเสนอความรู้ทางคณิตศาสตร์ นักเรียนมีความยากลำบากมากในการประมวลผลข้อมูลและการวิเคราะห์ถึงการรับรู้



แผนภาพที่ 1 แสดงความคลาดเคลื่อนที่พบบ่อยที่สุด (แสดงโดยการแรเงา) เมื่อนักเรียนอ่านแผนภาพเวนน์

3. ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความบกพร่องในทักษะที่จำเป็น ข้อเท็จจริงและแนวคิด (Errors Due Deficient Mastery of Prerequisite Skill, Fact and Concept)

ประเภทของความคลาดเคลื่อนนี้รวมถึงการขาดความรู้ในเนื้อหาคณิตศาสตร์และการขาดความรู้เกี่ยวกับปัญหาที่เฉพาะเจาะจง

การประสบความสำเร็จในการปฏิบัติงานทางคณิตศาสตร์ความรู้คือสิ่งที่จำเป็น แต่นักเรียนยังขาดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ นักเรียนยังมีการเรียนรู้ที่ยังไม่เพียงพอ

ในเรื่องข้อเท็จจริงพื้นฐานและนักเรียนใช้กระบวนการและเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ถูกต้อง และนักเรียนยังมีความรู้ไม่เพียงพอในเรื่องแนวคิดที่จำเป็นและสัญลักษณ์

บทบาทสำคัญของตัวแปรที่ใช้เพื่อส่งผลต่อผลลัพธ์ของการเรียนรู้ ประวัติของนักเรียนในการเรียนรู้ในโรงเรียนเป็นสิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกันของนักเรียนแต่ละคน เป็นสิ่งที่ใช้เป็นองค์ประกอบเพื่อศึกษาความรู้ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วก่อนหน้านี้สำหรับใช้ในการเรียนรู้งานทางคณิตศาสตร์ที่เฉพาะเจาะจง

พิจารณาปัญหาต่อไปนี้ที่ การบวกจำนวนที่มีสามหลักและการบวกจำนวนที่มีสี่หลักที่มีเลขโดดในแต่ละหลักเหมือนกัน นี่คือตัวอย่างความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการขาดความรู้พื้นฐาน

100 + 100 = 200	111 + 111 = 222	333 + 333 = 666
200 + 400 = 600	222 + 9999 = 10221	666 + 444 = 1110

4. ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการเชื่อมโยงที่ไม่ถูกต้องหรือความคิดที่ไม่ยืดหยุ่น (Errors Due to Incorrect Associations or Rigidity of Thinking)

ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการถ่ายโยงการเรียนรู้ทางลบที่รู้จักกันดีในทางทฤษฎี การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนในการศึกษาคณิตศาสตร์ เป็นสิ่งที่สำคัญในการศึกษากระบวนการแก้ปัญหา ความยืดหยุ่นในการถอดรหัสและการเข้ารหัสข้อมูลใหม่ หมายถึงประสบการณ์ของนักเรียนในการแก้ปัญหาที่คล้ายกันที่จะนำไปสู่ความคิดที่ไม่ยืดหยุ่น (Rigidity of Thinking) ในกรณีดังกล่าวนักเรียนจะพัฒนาองค์ความรู้ด้านการดำเนินการ นักเรียนยังคงใช้เงื่อนไขพื้นฐานในการปฏิบัติงานทางคณิตศาสตร์ที่มีการเปลี่ยนแปลงด้านเนื้อหาหรือกระบวนการแก้ปัญหา ซึ่งกระบวนการบางอย่างต้องทำการประมวลผลข้อมูลใหม่

5. การประยุกต์ใช้กฎหรือกลยุทธ์ที่ไม่เกี่ยวข้อง (Errors Due to the Application of Irrelevant Rules of Strategies)

ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการที่นักเรียนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยการประยุกต์ใช้กฎหรือกลยุทธ์ที่ไม่เกี่ยวข้อง ทำให้เกิดความมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการแก้ปัญหา โดยนักเรียนคิดว่าตนเองได้แก้ปัญหาที่ถูกต้องแล้วและไม่ตระหนักถึงการนำทฤษฎีบทนิยาม กฎ มาประยุกต์ใช้การแก้ปัญหา

วินเนอร์และคณะ (Vinner et al. 1981 : 555-570) ได้วิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนเนื้อหาการบวกเศษส่วน โดยทำการศึกษาปัจจัยบางปัจจัยด้านพุทธพิสัยที่เป็นสาเหตุของความผิดพลาด (Mistake) สอบถามนักเรียนในประเทศอิสราเอล จำนวน 494 คน อายุระหว่าง 13 - 15 ปี แบบสอบถามมี 30 ข้อ โดยเนื้อหาเศษส่วนมีการสอนเมื่อนักเรียนอายุระหว่าง 10 - 11 ปี

วัตถุประสงค์ของการศึกษาวิจัย คือการวิเคราะห์คำตอบที่ไม่ถูกต้องและคาดการณ์เกี่ยวกับกลยุทธ์ที่เป็นไปได้ที่นักเรียนจะใช้ในการแก้ปัญหา แต่ถ้านักเรียนใช้กลยุทธ์ที่เฉพาะเจาะจงนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ไม่ถูกต้อง ส่งผลให้ต้องมีการจัดหมวดหมู่กลยุทธ์ที่เป็นไปได้เพื่อเป็นแนวทางในการตรวจสอบเพิ่มเติม และนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ถูกต้อง

คำตอบที่ไม่ถูกต้องถูกนำมาวิเคราะห์ในสามขั้นตอน ในเนื้อหาการบวกและการลบเศษส่วน

1. การค้นหาตัวส่วนร่วม
2. การที่นักเรียนแสดงวิธีทำกรณีเศษส่วนที่มีตัวส่วนร่วม
3. การบวกตัวเศษของเศษส่วน

สรุปเป็นแนวคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ได้ดังนี้

หมวดหมู่ 1 ข้อบ่งชี้ของขั้นตอนวิธีของตัวส่วนร่วม (There is Indication of the Common Denominator Algorithm)

หมวดหมู่ 2 ข้อบ่งชี้ของว่านักเรียนได้แสดงความคิด (Idea) เกี่ยวกับตัวส่วนร่วม แต่นักเรียนได้แสดงความคิด (Idea) ของเศษส่วนที่เท่ากันที่สูญหายไป(There is an Indication That the Student is Activated Somehow by the Idea of the Common Denominator, but Idea of Equivalent Fractions Is Missing.)

หมวดหมู่ 3 ข้อบ่งชี้ของทั้งสองความคิดของตัวหารร่วมและความคิดของเศษส่วนที่เท่ากัน

ซึ่งมีรายละเอียดการจัดหมวดหมู่ของความคลาดเคลื่อน ดังนี้

หมวดหมู่ 1 ข้อบ่งชี้ของขั้นตอนวิธีของตัวส่วนร่วม (There is Indication of the Common Denominator Algorithm)

1. การคูณตัวเศษ และการบวกตัวส่วน $(1/2 + 2/3 = 2/5; 1/2 + 1/4 = 1/6)$ สำหรับ $1/2 + 1/4$ นอกจากนี้ยังมีความเป็นไปได้ว่าตัวเศษร่วม 1 ถูกนำไปเป็นตัวเศษของผลลัพธ์และสำหรับ $1/2 + 2/3$ ที่ตัวเศษมากกว่าจะนำไปเป็นตัวเศษของผลลัพธ์

2. การบวกตัวเศษและการคูณตัวส่วน $(1/2 + 2/3 = 3/6)$

3. การคูณตัวเศษและตัวส่วน (1 / 2 + 2 / 3 = 2 / 6)

4. ตัวเศษและตัวส่วนของการบวกเศษส่วนที่กำหนดให้ (1 / 2 + 2 / 3 = 3 / 5, 1 / 2 + 1 / 4 = 2 / 6)

5. การบวกตัวเศษและการละเว้นตัวส่วน (1 / 2+ 2 / 3 = 1 + 2)

หมวดหมู่ 2 ข้อบ่งชี้ของว่านักเรียนได้แสดงความคิด (Idea) เกี่ยวกับตัวส่วนร่วม แต่นักเรียนได้แสดงความคิด (Idea) ของเศษส่วนที่เท่ากันที่สูญหายไป(There is an Indication That the Student is Activated Somehow by the Idea of the Common Denominator, but Idea of Equivalent Fractions Is Missing.)

1. หมวดหมู่ย่อย 1-4 ในหมวดหมู่นี้มีขั้นตอนการบวกเศษส่วน ตัวอย่างเช่น แทนที่นักเรียนจะเขียน 1/2 + 2/3 = 3/5 แต่นักเรียนเขียน 1/2 + 2/3 = (1 +2) / 5

2. ตัวส่วนร่วมที่ได้จากการบวกตัวส่วนทุกตัวและตัวเศษที่บวกเพิ่มในตอนท้าย [1/2 + 2/3 = (1 + 2) / 8, 1/2 + 1/4 = (1 + 1) / 8]

หมวดหมู่ 3 ข้อบ่งชี้ของทั้งสองความคิดของตัวหารร่วมและความคิดของเศษส่วนที่เท่ากัน

1. ตัวส่วนร่วมได้มาจากการบวกตัวส่วน ตัวเศษใหม่ได้มาจากการบวกตัวเศษเดิมและตัวส่วนของเศษส่วน การเทียบเศษส่วนทำได้โดยการบวกจำนวนที่เหมือนกันกับตัวเศษและตัวส่วน [1/2 + 2/3 = (4 + 4) / 5]

2. ตัวส่วนร่วมได้มาจากการคูณตัวส่วน ตัวเศษใหม่ได้มาจากการบวกตัวเศษเดิมและตัวส่วนของเศษส่วนอื่น ๆ [1/2 + 2/3 = (4 + 4) / 6, 1/2 + 1/4 = (5 + 3) / 8]

3. ตัวส่วนร่วมได้มาอย่างถูกต้อง ตัวเศษใหม่ได้มาจากการคูณตัวเศษและตัวส่วนของเศษส่วนเดียวกัน [1/2 + 2/3 = (2 + 6) / 6, 1/2 + 1/4 = (2 + 4) / 4]

4. ตัวส่วนร่วมได้มาอย่างถูกต้อง ตัวเศษใหม่ได้มาจากการบวกตัวเศษและตัวส่วนของเศษส่วน [1/2 + 1/4 = (3 + 5) / 4]

5. ตัวส่วนร่วมใน 1/2 + 1/4 คือ 4 ตัวเศษใหม่ได้มาจากการคูณตัวเศษและใช้ตัวส่วนของเศษส่วนอื่น ๆ ตัวส่วนร่วมได้มาจากการคูณ [1/2 + 1/4 = (4 + 2) / 4]

6. ตัวส่วนร่วมใน 1/2 + 2/3 คือ 3 (จำนวนมาก) ตัวเศษใหม่ได้มาจากการบวกตัวเศษและใช้ตัวส่วนของเศษส่วนอื่น ๆ [1/2 + 2/3 = (4 + 4) / 3]

และได้จัดหมวดหมู่ความคลาดเคลื่อนที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาการบวกเศษส่วนเลขคณิตดังต่อไปนี้

1. การเสนอรายละเอียดที่ผิด : ลืมบางส่วน
2. การวินิจฉัย : การใช้ขั้นตอนวิธีการที่ไม่เหมาะสมกับสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกัน
3. การเลือกประเภทของแนวเทียบ (Analogy) ที่ผิด การวางนัยทั่วไปที่ไม่เหมาะสม
4. การตีความสัญลักษณ์ผิด
5. ความล้มเหลวในการใช้ความรู้ที่มีอยู่ตรวจสอบผลลัพธ์ในเนื้อหาใหม่

โบราสิ (Borasi. 1985 : 1-14) ได้วิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเศษส่วน ศึกษานักเรียนระดับประถมศึกษา ได้สรุปแนวคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ได้ดังนี้

1. นักศึกษาไม่เคยรู้วิธีการแก้ปัญหา
2. นักเรียนขาดทักษะที่จำเป็นในการเรียนรู้ เช่น ข้อเท็จจริง และ / หรือแนวความคิด
3. ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความสัมพันธ์ที่ไม่ถูกต้องหรือการยึดมั่นในความคิดของตนเอง
4. ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการประยุกต์ใช้กฎหรือยุทธวิธีที่ไม่เกี่ยวข้อง
5. ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องมาจากปัญหาด้านภาษา
6. นักศึกษาอาจต้องใช้เวลามากขึ้นเพื่อให้การแก้ปัญหาเสร็จสมบูรณ์
7. ความคลาดเคลื่อนในวิชาพีชคณิต
8. ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องมาถึงทางตัน (นักศึกษาคิดไม่ออก)
9. มีข้อมูลที่ขาดหาย
10. ไม่มีความพยายามที่จะแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น

ตัวอย่างความคลาดเคลื่อนเรื่องเศษส่วน

ตัวอย่างความคลาดเคลื่อนที่พบโดยทั่วไปเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาเศษส่วน 3/4+6/7= 9/11, 2/3+ 5/7 = 7/10

การวิเคราะห์หรือความคลาดเคลื่อนนี้อาจจะมาพร้อมกับคำถามตัวอย่างเช่น: อะไรคือกฎที่นักเรียนจะใช้ในการบวกเศษส่วน ? นักเรียนจะทำเช่นนั้นทำไม?

ในกรณีนี้ที่นักเรียนจะบวกเศษส่วนโดยเพิ่มตัวเศษ (Numerators) และตัวส่วน (Denominators) แยกกัน นักเรียนจะสับสนกับกฎการบวกเศษส่วนและกฎการคูณเศษส่วน

ตัวอย่างสถานการณ์ในชีวิตจริง

1. ค่าเฉลี่ยของคะแนนในการเล่นเบสบอล

หากผู้เล่นตีได้ 3 Hit (ตีแล้วลูกยังอยู่ในเขตพื้นที่เล่น และสามารถวิ่งไปถึงอย่างน้อยเบสที่ 1 โดยปลอดภัย) จาก 4 ครั้ง ในเบสที่ 1 และตีได้ 6 Hit จาก 7 ครั้ง Hit โดยเฉลี่ยของเขาคือตีได้ 9 Hit จาก 11 และผลรวมได้ 3/4 และ 6/7 (45 / 28)

2. เก็บบันทึก "ผลเกม"

ถ้าคุณได้รับรางวัล 2 รางวัลจาก 3 เกมเมื่อวานนี้ และ 5 รางวัลจาก 7 เกมในวันนี้ ดังนั้นรางวัลที่คุณได้รับทั้งหมด 7 รางวัลจาก 10 เกม และไม่ได้รับรางวัล 29/21 ได้ศึกษาการใช้ความคลาดเคลื่อนเป็นจุดเริ่มของการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ทรูแรน (Truran. 1987 : 92) ได้วิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ได้สรุปแนวคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน โดยแบ่งความคลาดเคลื่อนออกเป็น 9 ด้านคือ

1. รูปแบบของคำถาม
2. การอ่านคำถาม
3. ความเข้าใจในคำถาม
4. กลยุทธ์ในการเลือกใช้ความรู้
5. ทักษะการเลือกใช้ความรู้
6. ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้
7. การเสนอคำตอบ
8. ความคลาดเคลื่อนซึ่งไม่สามารถระบุสาเหตุที่แน่นอนได้ เนื่องจากขาดความระมัดระวัง
9. ความคลาดเคลื่อนซึ่งครูจะทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน

โมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ (Movshovitz-hadar et al. 1987 : 3-14) ได้วิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ในโรงเรียนมัธยมศึกษา เป็นการวิเคราะห์เชิงการแก้ปัญหาจากงานเขียนของนักเรียนจากการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ ระดับในมัธยมศึกษาตอนปลาย ประเทศอิสราเอล พบลักษณะความคลาดเคลื่อนจำนวน 6 ด้าน คือ 1. ด้านการใช้ข้อมูลผิด (Misused Data) 2. ด้านการตีความด้านภาษา (Misinterpreted Language) 3. ด้านการอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ (Logically Invalid Inference) 4. ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ (Distorted Theorem or Definition) 5. ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified Solution) 6. ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ (Technical Error) และใช้แบบสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย

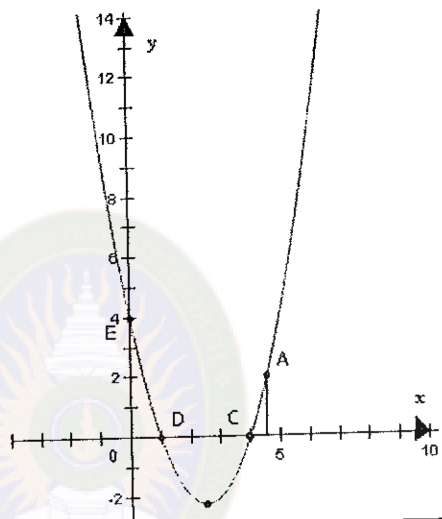
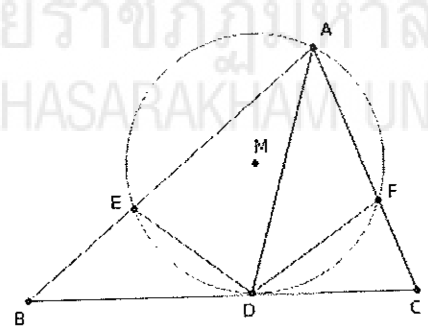
จากการทดสอบทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายในอิสราเอลเมื่อสำเร็จการศึกษา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่เกิดความคลาดเคลื่อนในการเรียนคณิตศาสตร์ การศึกษาครั้งนี้จึงมีเป้าหมายเพื่อพัฒนารูปแบบการจัดหมวดหมู่เชิงประจักษ์สำหรับความคลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ โดยเก็บรวบรวมข้อมูลจากนักเรียนเกรด 11 จำนวน 110 คน ซึ่งทำแบบทดสอบแบบอัตนัยเป็นปัญหาปลายเปิด (Open-ended) 18 ข้อ ครอบคลุมหัวข้อต่อไปนี้ : ฟังก์ชันเชิงเส้นตรงและฟังก์ชันกำลังสอง (Linear and Quadratic Functions) สมการเชิงเส้นตรงและสมการกำลังสอง (Linear and Quadratic Equations) เลขยกกำลังและลอการิทึม (Powers and Logarirhms) อนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต (Arithmetical and Geometrical Series) ระนาบและเรขาคณิตทรงตัน (Plane and Solid Geometry) สถิติเบื้องต้น (Elementary Statistics) ความน่าจะเป็น (Probability) และตรีโกณมิติ (Trigonometry) ตัวอย่างปรากฏดังตารางที่ 2.

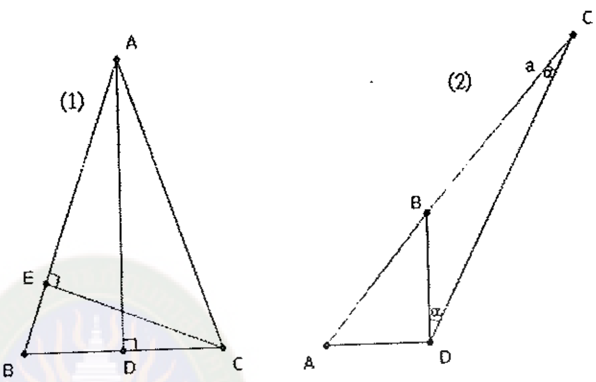
การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน

ความคลาดเคลื่อนถูกนำมาวิเคราะห์ในลักษณะเชิงคุณภาพที่เราเรียกว่าการวิเคราะห์เชิงสร้างสรรค์ (Constructive Analysis)

ตารางที่ 2 ตัวอย่างการวิเคราะห์

หัวข้อ	รายการ
ลอการิทึม (Logarithms)	a. $\log_4 X = 2.5$ ให้นักเรียนกำหนดค่าของ x โดยไม่ต้องใช้ตาราง b. $\log x = 21 \ \log 3 + ½ \log 16 - \log 27$ ให้นักเรียนกำหนดค่าของ x โดยไม่ต้องใช้ตาราง

หัวข้อ	รายการ
ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Functions)	จากกราฟของ $y = x^2 - 5x + 4$ ดังรูป ให้ส่วนของเส้นตรง AB เป็นเส้นตั้งฉากกับแกน x a. พิกัดของ E,C ? b. $\overline{AB} = 1.75$ cm. จงคำนวณหาค่า $\overline{OB}$ c. จากฟังก์ชัน ค่าของ X เป็นเชิงลบได้อย่างไร ? 
เรขาคณิต (Geometry)	จากรูป $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง BAC ∔ วงกลม M ตรง $\overline{BC}$ ในจุด D จงพิสูจน์ $BDE \sim DAF$  ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก ($\overline{AB} \perp \overline{BC}$) $\overline{AC} = 20$ ซม. , $\overline{BC} = 15$ ซม. ระนาบ ABC ทำมุม 30 องศา กับระนาบ P ผ่าน AB ระยะทางจาก C ไประนาบ P เป็นกี่เซนติเมตร ?

หัวข้อ	รายการ
ตรีโกณมิติ (Trigonometry)	รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$), $\overline{BC} = 8.2$ ซม. และส่วนสูงเป็น $\overline{AD} = 12.6$ ซม. (ดูรูป) a. มุม ABC ? b. ส่วนสูงจาก C ไป AB ?  จากแผนภาพที่ 2 จุด A, B, C เป็นเส้นตรงหนึ่งเส้น BD เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ $\overline{AD}$. $\overline{BC}$ = a, ∠BDC = ∠BCD = α มาตรการวัดของ DC และ AC ในพจน์ของ a และ α คำนวณค่า $\overline{DC}$ และ $\overline{AC}$ ถ้า $\alpha = 16°10', a = 10.5$ ซม.
ความน่าจะเป็น (Probability)	แรงงานร้อยละยี่สิบห้าป่วยเป็นโรคที่เกิดจากการทำงาน สุ่มแรงงานมาห้าคน a. จงหาความน่าจะเป็นที่แรงงานอย่างน้อย 3 คนที่สุ่มมาเป็นโรค ? b. จงหาความน่าจะเป็นที่แรงงานระหว่าง 2 ถึง 5 คนที่สุ่มมาเป็นโรค ?
อนุกรม (Series)	ผู้จัดการของโรงงานอุตสาหกรรมได้ใช้ระบบการให้รางวัล. ผลรวมของเงินรางวัล คือ \$19 250 รางวัลต่ำสุดคือ \$ 500 และแต่ละคนเป้าหมายที่ \$ 250 a. มีวิธีที่ให้รางวัลได้กี่วิธี ? b. รางวัลสูงสุดคือ ?

รูปแบบของความคลาดเคลื่อน

ลักษณะความคลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์มีทั้งหมด 6 ด้าน ดังต่อไปนี้

1. ด้านการใช้ข้อมูลผิด (Misused Data)
2. ด้านการตีความด้านภาษา (Misinterpreted Language)
3. ด้านการอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ (Logically Invalid Inference)
4. ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ (Distorted Theorem or Definition)
5. ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified Solution)
6. ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ (Technical Error)

รายละเอียดลักษณะความคลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่มีทั้งหมด 6 ด้าน เป็นดังนี้

1. ด้านการใช้ข้อมูลผิด (Misused Data)

1.1 กำหนดข้อมูลที่ไม่ได้ระบุในโจทย์ และนักเรียนได้เพิ่มข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องเข้ามา

1.2 ละเลยการใช้ข้อมูลที่จำเป็นในขั้นตอนการแก้ปัญหาและเพิ่มข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง

1.3 ทำผิดคำสั่งโดยหาคำตอบในสิ่งที่ไม่ต้องการ

1.4 เพิ่มข้อมูลที่ไม่สอดคล้องในการแก้ปัญหา (เช่น การใช้ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมแก้ปัญหาการหาค่ามัธยฐาน)

1.5 นักเรียนไม่เห็นด้วยกับข้อมูลที่กำหนดให้ (เช่น ใช้คุณสมบัติของเส้นแบ่งครึ่งมุมผ่านจุดยอดของมุม)

1.6 ใช้ค่าของตัวแปรที่ไม่ถูกต้อง (เช่นใช้ระยะทางแทนความเร็ว)

1.7 คัดลอกโจทย์ผิด

ตัวอย่าง ให้อนุกรม 1, 5, 7 เป็นจำนวนที่เพิ่มขึ้นของทั้งสามองค์ประกอบซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิต ?

การแก้ปัญหาที่ไม่ถูกต้อง :

$7 = 1 + (3 - 1)d$

$6 = 2d$

$d = 3$

การวิเคราะห์ข้อผิดพลาด : (ตัวอักษรในวงเล็บหมายถึงลักษณะดังกล่าวข้างต้น)

นักเรียนที่กำหนดไว้ในอนุกรมซึ่งเป็นคุณสมบัติของอนุกรมเลขคณิต

2. ด้านการตีความด้านภาษา (Misinterpreted Language) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ ตีความจากประโยคภาษามาเป็นประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง

3. ด้านการอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ (Logically Invalid Inference) สรุปเงื่อนไข (ถ้า p แล้ว q) Converse ทั้งในรูปแบบบวก (ถ้า p แล้ว q) หรือในรูปแบบของ Contrapositive (ถ้าไม่ p แล้วไม่ q)

4. ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ (Distorted Theorem or Definition) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้

4.1 ขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ

4.2 จำทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติผิด

5. ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified Solution) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้

5.1 ขั้นตอนถูกต้อง แต่คำตอบผิดจากที่โจทย์กำหนด หรือคำตอบไม่เป็นผลสำเร็จ

5.2 ขั้นตอนผิด แต่คำตอบถูก

6. ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ (Technical Error) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ

โคลแกน (Colgan. 1991 : 91-A) ได้วิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนเนื้อหาวิชา Finite Mathematics ของนักเรียนระดับวิทยาลัย ประเทศสหรัฐอเมริกา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนในมหาวิทยาลัยอินเดียนา จำนวน 250 คน โดยศึกษาจากการทดสอบย่อย การสอบ และจากแบบทดสอบวัดทักษะทางคณิตศาสตร์ พบว่าความคลาดเคลื่อนของนักเรียนนั้นอธิบายได้โดยใช้การแจกแจงลักษณะความคลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทย์-ฮาดาร์ ซาสลาฟสกี้ และอินบาร์ (Movshovitz-Hadar, Zaslavky and Inbar. 1987 : 18) ความคลาดเคลื่อนที่ได้เรียงจากมากไปน้อยได้แก่ ความคลาดเคลื่อนด้านการใช้ภาษา การขาดความรับผิดชอบ และเทคนิควิธีการในทุกระดับคะแนน นักศึกษามีเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนแต่ละวิชาเท่า ๆ กัน และมีนักศึกษาบางส่วนมีความคลาดเคลื่อนด้านทักษะการคิดคำนวณ และบางส่วนมีความคลาดเคลื่อนด้านทักษะการแก้ปัญหาได้ สรุปเป็นแนวคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ได้ดังนี้

1. ไม่มีคำตอบ

2. ความคลาดเคลื่อนจากข้อมูล เช่น ความคลาดเคลื่อนจากการคัดลอก

3. ความคลาดเคลื่อนจากภาษา

4. ความคลาดเคลื่อนจากตรรกะ (Logic)

5. คลาดเคลื่อนจากนิยาม ทฤษฎีบทหรือกฎ

6. วิธีการแก้ปัญหาที่ไม่สมบูรณ์

7. ความคลาดเคลื่อนทางเทคนิค (เช่นขาดทักษะพื้นฐานในการคำนวณ)

8. การขาดความรู้

สรุปได้ว่า แนวคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของนักคณิตศาสตรศึกษา ได้ดังนี้ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านภาษา คือ ไม่เข้าใจคำถาม การอธิบายโดยใช้ภาษาคณิตศาสตร์ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท นิยาม คือ การใช้ทฤษฎีบทหรือนิยามที่ไม่เกี่ยวข้อง การบิดเบือนทฤษฎีบท มีความคลาดเคลื่อนในหลักการ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านสัญลักษณ์ คือ การตีความสัญลักษณ์ผิด ใช้สัญลักษณ์ผิด : ทำให้คำตอบผิด มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะและความรู้ คือ ขาดทักษะทางพีชคณิตที่จำเป็น ขาดความรู้ในการพิสูจน์ ขาดความรู้พื้นฐานที่จำเป็น มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา คือ เพิ่มข้อมูลที่ไม่สอดคล้องในการแก้ปัญหา วิธีทำไม่สมบูรณ์ หาคำตอบในสิ่งที่โจทย์ไม่ต้องการ ใช้วิธีการที่ไม่เหมาะสมในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต การสรุปเป็นหลักการทางพีชคณิตผิด มีความคลาดเคลื่อนในการตรวจสอบผลลัพธ์ทางพีชคณิต สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการเชื่อมโยง คือความคลาดเคลื่อนในการถ่ายโยงความรู้ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการให้เหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ คือ การให้เหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ ขาดการอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์

จากการสังเคราะห์กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ (Movshovits-hadar et al. 1987 : 3-14) กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของราดาร์ส (Radatz. 1979 : 163-172) กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของวินเนอร์และคณะ (Vinner et al. 1981 : 555-570) กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโบราสิ (Borasi. 1985 : 1-14) กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของทรูแรน (Truran. 1987 : 92) และกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโคลแกน (Colgan. 1991 : 91-A) ผู้วิจัยขอสรุปกรอบแนวคิดของนักการศึกษาแต่ละท่าน พร้อมทั้งระบุจุดเด่น จุดด้อย ดังนี้

1. สรุปกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ

โมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ (Movshovitz-hadar et al. 1987 : 3-14) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การวิเคราะห์รูปแบบความคลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา” เป็นการวิเคราะห์เชิงของการแก้ปัญหาจากงานเขียนของนักเรียนจากการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ ระดับในมัธยมศึกษาตอนปลาย ประเทศอิสราเอล พบลักษณะความคลาดเคลื่อนจำนวน 6 ด้าน คือ

1.1 ด้านการใช้ข้อมูลผิด (Misused Data) นักเรียนใช้ข้อมูลที่ไม่ได้ระบุในโจทย์ และนักเรียนได้เพิ่มข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องเข้ามา ไม่ใช้ข้อมูลที่จำเป็นในขั้นตอนการแก้ปัญหา นักเรียนหาคำตอบในสิ่งที่โจทย์ไม่ต้องการ

1.2 ด้านการตีความด้านภาษา (Misinterpreted Language) นักเรียนตีความจากประโยคภาษามาเป็นประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง

1.3 ด้านการอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ (Logically Invalid Inference)

1.4 ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ (Distorted Theorem or Definition) นักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ และนักเรียนจำทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติผิด

1.5 ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified Solution) นั้น นักเรียนสามารถแสดงวิธีทำถูกต้อง แต่คำตอบผิดจากที่โจทย์กำหนด หรือนักเรียนไม่สามารถหาคำตอบได้ และนักเรียนแสดงวิธีทำผิดแต่คำตอบถูก

1.6 ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ (Technical Error) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ

จุดเด่น

1. กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเหมาะสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

2. กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนครอบคลุมเนื้อหาทั้ง 18 หัวข้อ

3. กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนสามารถวิเคราะห์ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนได้อย่างชัดเจน

จุดด้อย

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนยังไม่ครอบคลุมการแก้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบจากการสำรวจ

2. สรุปกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของราดาร์ส

ราดาร์ส (Radatz. 1979 : 163-172) ศึกษากับนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 4 ในวิชาคณิตศาสตร์ ประเทศเยอรมนี ได้ศึกษาการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนและสาเหตุต่างๆของความคลาดเคลื่อนที่มีในเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ โดยแบ่งความคลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ออกเป็น

2.1 ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความยากลำบากด้านภาษา (Errors Due to Language Difficulties)

ภาษาทางคณิตศาสตร์เป็นภาษาสากล นักเรียนที่ต้องมีความรู้และเข้าใจแนวคิด สัญลักษณ์และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ความเข้าใจผิดเกี่ยวกับความหมายภาษาทางคณิตศาสตร์ อาจก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อน

2.2 ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความยากลำบากในการรับข้อมูลเชิงพื้นที่ (Errors Due to Difficulties on Obtaining Spatial Information)

ในการศึกษาเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต จำนวนความคลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์จะแตกต่างกันระหว่างบุคคลอย่างมีนัยสำคัญในภาพเชิงพื้นที่และความคิดเชิงพื้นที่ (Spatial Imagery and Spatial Thinking) และนักเรียนบางคนจะมีความคลาดเคลื่อนในการรับข้อมูลเชิงพื้นที่หรือข้อมูลที่เป็นภาพหรือในการปฏิบัติงานทางคณิตศาสตร์

2.3 ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความบกพร่องในทักษะที่จำเป็น ข้อเท็จจริงและแนวคิด (Errors Due deficient Mastery of Prerequisite Skill, Fact and Concept)

ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความบกพร่องในทักษะที่จำเป็น ข้อเท็จจริงและแนวคิด รวมถึงการขาดความรู้ในเนื้อหาคณิตศาสตร์และการขาดความรู้เกี่ยวกับปัญหาที่เฉพาะเจาะจง

นักเรียนยังขาดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ การใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ถูกต้อง และนักเรียนมีความรู้ไม่เพียงพอเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

2.4 ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการเชื่อมโยงที่ไม่ถูกต้องหรือความคิดที่ไม่ยืดหยุ่น (Errors Due to Incorrect Associations or Rigidity of Thinking)

ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการถ่ายโยงการเรียนรู้ที่ไม่ถูกต้อง การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนในการแก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญแต่นักเรียนส่วนใหญ่มีความคิดที่ไม่ยืดหยุ่น

2.5 การประยุกต์ใช้กฎหรือกลยุทธ์ที่ไม่เกี่ยวข้อง (Errors Due to the Application of Irrelevant Rules of Strategies)

จุดเด่น

1. กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเหมาะสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา

2. กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนครอบคลุมมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเนื่องจากความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความยากลำบากด้านภาษา ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความยากลำบากในการรับข้อมูลเชิงพื้นที่ ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความบกพร่องในทักษะที่จำเป็น ข้อเท็จจริงและแนวคิด ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการเชื่อมโยงที่ไม่ถูกต้องหรือความคิดที่ไม่ยืดหยุ่น และการประยุกต์ใช้กฎหรือกลยุทธ์ที่ไม่เกี่ยวข้อง

3. กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนได้ยกตัวอย่างและแสดงรายละเอียด มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอย่างชัดเจน

จุดด้อย

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนยังไม่ครอบคลุมการแก้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบจากการสำรวจ

3. สรุปกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของวินเนอร์และคณะ

วินเนอร์และคณะ (Vinner et al. 1981 : 555-570) ได้ศึกษาปัจจัยบางปัจจัยด้านพุทธพิสัยที่เป็นสาเหตุของความผิดพลาด (Mistake) ในการบวกเศษส่วน โดยใช้แบบสอบถามจำนวน 30 ข้อ โดยศึกษานักเรียนจำนวน 494 คน อายุระหว่าง 13 - 15 ปี ในประเทศอิสราเอล วัตถุประสงค์ของการศึกษาวิจัย คือการวิเคราะห์คำตอบที่ไม่ถูกต้องและคาดการณ์เกี่ยวกับกลยุทธ์ที่เป็นไปได้ที่นักเรียนจะใช้ในการแก้ปัญหา คำตอบที่ไม่ถูกต้องถูกนำมาวิเคราะห์ในสามขั้นตอน ในเนื้อหาใช้เนื้อหาการบวกและการลบเศษส่วน

3.1 การค้นหาตัวส่วนร่วม

3.2 การที่นักเรียนแสดงวิธีทำกรณีเศษส่วนที่มีตัวส่วนร่วม

3.3 การบวกตัวเศษของเศษส่วน (ว่าตอนนี้มีตัวส่วนร่วม)

และนำมาจัดหมวดหมู่ของความคลาดเคลื่อนได้ 3 หมวดหมู่ คือ

หมวดหมู่ 1 ข้อบ่งชี้ของขั้นตอนวิธีของตัวส่วนร่วม (There is Indication of the Common Denominator Algorithm)

หมวดหมู่ 2 ข้อบ่งชี้ของว่านักเรียนได้แสดงความคิด (Idea) เกี่ยวกับตัวส่วนร่วม แต่นักเรียนได้แสดงความคิด (Idea) ของเศษส่วนที่เท่ากันที่สูญหายไป(There is an Indication That the Student is Activated Somehow by the Idea of the Common Denominator, but Idea of Equivalent Fractions is Missing.)

หมวดหมู่ 3 ข้อบ่งชี้ของทั้งสองความคิดของตัวหารร่วมและความคิดของเศษส่วนที่เท่ากัน

จุดเด่น

1. กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเหมาะสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนครอบคลุมเนื้อหาการบวกเศษส่วน

2. กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนมีการจัดหมวดหมู่มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอย่างชัดเจน

จุดด้อย

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนยังไม่ครอบคลุมการแก้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบจากการสำรวจ

4. สรุปกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโบราสิ

โบราสิ (Borasi. 1985 : 1-14) ได้ศึกษาการใช้ความคลาดเคลื่อนเป็นจุดเริ่มของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ศึกษานักเรียนระดับประถมศึกษา ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วน ได้เน้นการใช้คำถามและใช้สถานการณ์ในชีวิตจริงเพื่อวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน ตัวอย่างคำถามเช่น นักเรียนจะใช้กฎอะไรในการบวกเศษส่วน โบราสิได้สรุปความคลาดเคลื่อน ไว้ดังนี้

4.1 นักศึกษาไม่รู้วิธีการแก้ปัญหา

4.2 นักเรียนขาดทักษะที่จำเป็นในการเรียนรู้ เช่น ข้อเท็จจริง และ / หรือแนวคิด

4.3 ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากศึกษาความสัมพันธ์ที่ไม่ถูกต้องหรือการยึดมั่นในความคิดของตนเอง

4.4 ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการประยุกต์ใช้กฎหรือยุทธวิธีที่ไม่เกี่ยวข้อง

4.5 ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากปัญหาด้านภาษา

4.6 นักศึกษาใช้เวลามากขึ้นเพื่อแก้ปัญหาเสร็จสมบูรณ์

4.7 ความคลาดเคลื่อนในวิชาพีชคณิต

4.8 ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องจากถึงทางตัน

4.9 มีข้อมูลที่สูญหาย

4.10ไม่มีความพยายามในการแก้ปัญหา

จุดเด่น

1. กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเหมาะสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนครอบคลุมเนื้อหาเศษส่วน

2. ใช้คำถามเพื่อช่วยในการวิเคราะห์ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

3. ใช้การยกตัวอย่างสถานการณ์ในชีวิตจริงเพื่อให้นักเรียนได้แก้ปัญหาทำให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในสถานการณ์นั้นอย่างชัดเจน

จุดด้อย

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนยังไม่ครอบคลุมการแก้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบจากการสำรวจ

5. สรุปกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของทรูแรน

ทรูแรน (Truran. 1987 : 92) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนและเทคนิคการสอนเพื่อแก้ไขความคลาดเคลื่อน ได้วิเคราะห์ถึงสาเหตุของความคลาดเคลื่อนและแบ่งระดับความคลาดเคลื่อนไว้ 9 ด้านคือ

5.1 รูปแบบของคำถาม

5.2 การอ่านคำถาม

5.3 ความเข้าใจในคำถาม

5.4 กลยุทธ์ในการเลือกใช้ความรู้

5.5 ทักษะการเลือกใช้ความรู้

5.6 ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้

5.7 การเสนอคำตอบ

5.8 ความคลาดเคลื่อนซึ่งไม่สามารถระบุสาเหตุที่แน่นอนได้ เช่น การขาดความระมัดระวัง

5.9 ความคลาดเคลื่อนที่ครูจะทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน

จุดเด่น

1. กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนมีการจัดหมวดหมู่ความคลาดเคลื่อนที่ชัดเจน

2. มีการวิเคราะห์หาสาเหตุของความคลาดเคลื่อน

จุดด้อย

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนยังไม่ครอบคลุมการแก้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบจากการสำรวจ

6. สรุปกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโคลแกน

โคลแกน (Colgan. 1991 : 91-A) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนในการแก้ปัญหาโจทย์ในวิชา Finite Mathematics ของนักเรียนระดับวิทยาลัย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนในมหาวิทยาลัยอินเดียนา จำนวน 250 คน โดยศึกษาจากการทดสอบย่อย การสอบ ใช้แบบทดสอบวัดทักษะทางคณิตศาสตร์ ได้สรุปความคลาดเคลื่อนไว้ดังนี้

6.1 ไม่มีคำตอบ

6.2 ความคลาดเคลื่อนจากข้อมูล

6.3 ความคลาดเคลื่อนจากภาษา

6.4 ความคลาดเคลื่อนจากตรรกะ (Logic)

6.5 คลาดเคลื่อนจากนิยาม ทฤษฎีบทหรือกฎ

6.6 วิธีการแก้ปัญหาที่ไม่สมบูรณ์

6.7 ความคลาดเคลื่อนทางเทคนิค (เช่นขาดทักษะพื้นฐานในการคำนวณ)

6.8 การขาดความรู้

จุดเด่น

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเหมาะสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี เนื้อหาที่ใช้ในการวิเคราะห์ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนคือโจทย์ปัญหา วิชา Finite Mathematics

จุดด้อย

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนยังไม่ครอบคลุมการแก้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบจากการสำรวจ

การปรับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

การจัดการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบ (Model) การปรับมโนทัศน์นั้นเป็นแนวคิดหนึ่งที่ส่งเสริมการพัฒนามโนทัศน์ของนักเรียน ได้มีนักการศึกษาให้ความหมายของการปรับมโนทัศน์ไว้ ดังนี้

1. ความหมายของการปรับมโนทัศน์

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความหมายของการปรับมโนทัศน์ ไว้ดังต่อไปนี้

โพสเนอร์และคณะ (Posner et al. 1982 : 211) ได้กล่าวว่า การปรับมโนทัศน์เป็นกระบวนการที่มโนทัศน์ภายในจิตใจของบุคคลเปลี่ยนแปลงจากกลุ่มของมโนทัศน์หนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง เมื่อนักเรียนไม่พอใจมโนทัศน์เดิม และมโนทัศน์ใหม่เข้าใจได้ง่าย น่าเชื่อถือและมีประโยชน์มากกว่า ในมุมมองของนักเรียน

ไคและคณะ (Chi et al. 1994 : 439) ได้กล่าวว่า การปรับมโนทัศน์ถูกใช้แสดงถึงรูปแบบของการเรียนรู้รูปแบบหนึ่ง เมื่อนักเรียนได้เรียนรู้ข้อมูลใหม่และเกิดความขัดแย้งกับความรู้เดิม โดยจะถูกกำหนดให้จัดระบบของความรู้ที่มีอยู่ใหม่

ไคและรอสโค (Chi and Roscoe. 2002 :) ได้กล่าวว่า การปรับมโนทัศน์เป็นการแก้ไขการเข้าใจผิด เริ่มด้วยมโนทัศน์ที่ยังไม่ได้แก้ไข นักเรียนจะต้องแยกแยะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของตนเอง และแก้ไขมโนทัศน์เหล่านั้น ซึ่งในมุมมองดังกล่าวการเข้าใจผิดหมายถึง การจัดหมวดหมู่ที่คลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ ดังนั้นการปรับมโนทัศน์จึงเป็นการกำหนดมโนทัศน์ใหม่ไปยังประเภทที่ถูกต้อง

ซูพิง (Suping. 2003 : 23) ได้กล่าวว่า การปรับมโนทัศน์เป็นรูปแบบการเรียนรู้ที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวางในหมู่นักการศึกษา แม้ว่าจะยังมีมุมมองเกี่ยวกับการเกิดกระบวนการปรับมโนทัศน์ที่แตกต่างกัน แต่ดูเหมือนว่าจะไม่มีข้อโต้แย้งเกี่ยวกับการเกิดกระบวนการปรับมโนทัศน์ เนื่องจากการปรับมโนทัศน์เป็นศูนย์กลางการเรียนรู้ ในขณะที่นักทฤษฎียังคงถกเถียงถึงกระบวนการของการปรับมโนทัศน์ ครูสามารถปรับปรุงการปรับมโนทัศน์โดยการสร้างเงื่อนไขหรือภาวะที่ส่งเสริมการปรับมโนทัศน์ดังกล่าวได้

ดีเซดซา (DiSessa. 2002 : 238-290) ได้กล่าวว่า การปรับมโนทัศน์เป็นการจัดระบบใหม่ของความรู้ที่สลับซับซ้อนในความคิดของนักเรียน ในมุมมองนี้การปรับมโนทัศน์จะเกี่ยวกับการจัดระบบเชิงการรู้ของความรู้ที่ยังไม่ได้รับประสบการณ์ (Naive Knowledge) ที่แยกย่อยอยู่

อิวาร์สัน (Ivarsson et al. 2002 : 1-12) ได้กล่าวว่า มโนทัศน์ที่ยังไม่ได้รับประสบการณ์ (Naive Conception) ไม่ได้ช่วยเหลือการปรับมโนทัศน์ เพราะการปรับมโนทัศน์เกิดจากเครื่องมือทางสติปัญญา ในมุมมองนี้การปรับมโนทัศน์เป็นผลจากการปรับเปลี่ยนแนวทางเมื่อนักเรียนใช้เครื่องมือในบริบทที่หลากหลาย

โวสเนียดัว (Vosniadou. 2002 : 15) ได้กล่าวว่า การปรับมโนทัศน์เป็นกระบวนการที่สามารถทำให้นักเรียนสร้างแบบจำลองสังเคราะห์ (Synthesize Models)ในความคิดของพวกเขา เริ่มต้นด้วยกรอบการอธิบาย (Explanatory Framework) ที่พวกเขามีอยู่ เป็นกระบวนการเข้าใจที่ค่อย ๆ เกิดขึ้นซึ่งสามารถให้ผลในการพัฒนาแบบจำลองความคิด (Mental Models) โดยความรู้ที่มีอยู่ก่อนเป็นสิ่งสำคัญในการเรียนรู้

สรุปได้ว่า การปรับมโนทัศน์ เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในจิตใจของบุคคลที่เปลี่ยนความคิดความเข้าใจจากกลุ่มมโนทัศน์หนึ่งไปสู่อีกกลุ่มหนึ่ง เพื่อกำหนดมโนทัศน์ใหม่ให้ถูกต้อง โดยการปรับปรุงมโนทัศน์เดิมจากการสร้างเงื่อนไขที่ขัดแย้งกับข้อมูลเดิมให้เป็นความรู้ใหม่ เพื่อจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแนวคิด และเป็นการสร้างแบบจำลองสังเคราะห์ในความคิดของตน

2. สิ่งสำคัญในการปรับมโนทัศน์

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงสิ่งสำคัญในการปรับมโนทัศน์ ไว้ดังต่อไปนี้

โพสเนอร์และคณะ (Posner et al. 1982 : 212) ได้เสนอสิ่งสำคัญสำหรับการปรับมโนทัศน์ คือ

1. ความไม่พอใจในมโนทัศน์เดิมที่มีอยู่ (Dissatisfaction) นักเรียนต้องตระหนักว่ามีบางอย่างไม่สอดคล้องกับมโนทัศน์ที่มีอยู่และวิธีการคิดที่พวกเขามีอยู่นั้นไม่สามารถแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำลังเผชิญอยู่ได้

2. มโนทัศน์ใหม่สามารถเข้าใจได้ (Intelligibility) มโนทัศน์ใหม่ไม่เพียงแค่สร้างความเข้าใจ แต่นักเรียนจะต้องสามารถย้อนกลับไปให้เหตุผลในมโนทัศน์เดิมและเป็นไปตามหลักการ/ทฤษฎี โดยนักเรียนสามารถจะอธิบายมโนทัศน์นั้นให้เพื่อนร่วมชั้นเรียนเข้าใจได้

3. มโนทัศน์ใหม่มีเหตุผลน่าเชื่อถือ (Plausibility) มโนทัศน์ใหม่จะต้องสร้างความเข้าใจมากกว่ามโนทัศน์เดิม จะต้องมีความสามารถในการใช้แก้ปัญหาได้ดีกว่า นักเรียนควรจะสามารถตัดสินใจด้วยตนเองได้ว่าทำอย่างไรมโนทัศน์ใหม่นี้จึงจะสอดคล้องกับแนวทางในการ

คิดของพวกเขา และสามารถนึกย้อนถึงสถานการณ์ที่มโนทัศน์ใหม่นี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้

4. มโนทัศน์ใหม่มีประโยชน์ (Fruitfulness) มโนทัศน์ใหม่ควรจะสามารถทำได้มากกว่าเพียงแค่การแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำลังเผชิญอยู่ โดยควรจะเปิดกว้างไปยังขอบเขตความรู้ใหม่ที่ต้องการสืบเสาะ

สเตสฟายลิดัวและฟอสเนียเดล (Stafylidou and Vosniadou. 2004 : 503-518) ได้กล่าวถึงสิ่งสำคัญในการปรับมโนทัศน์ ได้แก่

1. กระบวนการเข้าใจความรู้ไม่ได้เป็นกระบวนการเพิ่มพูนความรู้ในโครงสร้างมโนทัศน์ที่มีอยู่เสมอไป บางครั้งการเข้าใจสารสนเทศใหม่ต้องการการจัดระบบโครงสร้างความรู้ที่มีอยู่ใหม่อย่างสุดขีด

2. การเรียนรู้ที่ต้องจัดระบบโครงสร้างความรู้ที่มีอยู่ใหม่เป็นเรื่องยากและต้องอาศัยเวลามากกว่าการเพิ่มพูนความรู้ ยิ่งไปกว่านั้นในกระบวนการจัดระบบโครงสร้างความรู้ที่มีอยู่ใหม่นั้นอาจจะสร้างความเข้าใจมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนได้

3. ความเข้าใจมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เป็นแบบจำลองสังเคราะห์ที่แสดงถึงความพยายามของนักเรียนในการดูดซึมสารสนเทศใหม่ไปยังความรู้พื้นฐานเดิมที่พวกเขามีอยู่

ฮิวสั้นและเกิร์ตซอก (Hewson and Gertzog) เสนอว่าสิ่งสำคัญในการปรับมโนทัศน์เป็นการนำทฤษฎีการปรับเปลี่ยนมโนทัศน์เป็นการรวม 2 ทฤษฎีเข้าด้วยกัน คือ ประวัติศาสตร์และสังคมศาสตร์ของวิทยาศาสตร์ คุห์น (Kuhn. 1970c : 231) และจิตวิทยาพัฒนาการของเพียเจต์ (Piaget. 1977 : 3) กระบวนการทางวิทยาศาสตร์ที่คุห์น ยกตัวอย่างคือการดูดซึมของผลลัพธ์ทางวิทยาศาสตร์ภายในกระบวนทัศน์นั้นคล้ายกับแนวทางที่เพียเจต์อธิบายถึงวิธีการรับความรู้ของแต่ละบุคคล การเปลี่ยนกระบวนทัศน์ของคุห์นมีสาเหตุจากการปฏิวัติทางวิทยาศาสตร์ ที่สามารถนำไปเปรียบเทียบกับการปรับเปลี่ยนของความรู้ใหม่ของแต่ละบุคคล ซึ่งนำไปสู่การปรับเปลี่ยนของโครงสร้างมโนทัศน์ของแต่ละบุคคล หนึ่งในยุทธวิธีการสอนที่ช่วยเหลือการปรับเปลี่ยนมโนทัศน์ คือการให้นักเรียนเผชิญกับเหตุการณ์ที่แตกต่างกันซึ่งขัดแย้งกับมโนทัศน์ที่นักเรียนมีอยู่ก่อน ซึ่งจะก่อให้เกิดสภาวะไม่สมดุล (Disequilibration) หรือความขัดแย้งเชิงมโนทัศน์ที่ชักนำให้นักเรียนสะท้อนมโนทัศน์ของพวกเขาและพยายามแก้ไขความขัดแย้งนั้น ตามวิธีการดังกล่าวนักเรียนต้องมีการเผชิญกับกระบวนการยอมรับ การใช้และการรวบรวมมโนทัศน์ใหม่ไปยังมโนทัศน์ที่มีอยู่และกระทั่งการประยุกต์ไปยังเงื่อนไขใหม่

สตีแพนส์และชมิดท์ (Stepans and Schmidt. 2009 : 22) ได้กล่าวถึงสิ่งสำคัญในการปรับมโนทัศน์ มี 4 ประการ ดังนี้

1. นักเรียนจะต้องเกิดความไม่พอใจในมโนทัศน์ที่มีอยู่ โดยจะต้องเผชิญหน้ากับปัญหาหรือสถานการณ์แปลก ๆ ซึ่งหาข้อสรุปไม่ได้ และคลายความเชื่อถือต่อมโนทัศน์ที่มีอยู่ในการแก้ปัญหาเหล่านั้น

2. มโนทัศน์ใหม่จะต้องเป็นมโนทัศน์ที่เข้าใจได้ง่าย โดยนักเรียนจะต้องสามารถมองเห็นได้ว่ามโนทัศน์ก่อให้เกิดประสบการณ์เพียงพอสำหรับการแสวงหาความรู้ต่าง ๆ อย่างไร

3. มโนทัศน์ใหม่จะต้องดูน่าเชื่อถือ อย่างน้อยมโนทัศน์ใหม่จะต้องสามารถนำไปแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ได้ นอกจากนี้มโนทัศน์ดังกล่าวจะต้องสอดคล้องกับความรู้ในสาขาอื่น ๆ อีกด้วย

4. มโนทัศน์ใหม่จะต้องมีประโยชน์สำหรับการใช้ในบริบทอื่น มโนทัศน์ดังกล่าวจะต้องมีศักยภาพที่จะขยายขอบเขตของการแสวงหาความรู้อื่น

สรุปได้ว่า สิ่งสำคัญในการปรับมโนทัศน์ คือ นักเรียนต้องไม่พอใจในมโนทัศน์เดิมที่มีอยู่ นักเรียนเผชิญกับเหตุการณ์ที่แตกต่างกันซึ่งขัดแย้งกับมโนทัศน์เดิม ซึ่งจะก่อให้เกิดสภาวะไม่สมดุล (Disequilibration) นักเรียนพยายามแก้ไขความขัดแย้งนั้น โดยการดูดซึมสารสนเทศใหม่ไปยังความรู้พื้นฐานเดิมที่พวกเขามีอยู่ ซึ่งมโนทัศน์ใหม่จะต้องเป็นมโนทัศน์ที่เข้าใจได้ง่าย มีเหตุผลน่าเชื่อถือ และมีประโยชน์

3. บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการปรับมโนทัศน์

ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงบทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการปรับมโนทัศน์ ไว้ดังต่อไปนี้

โพสเนอร์และคณะ (Posner et al. 1982 : 215) ได้พัฒนาแนวคิดการจัดการเรียนรู้เพื่อการปรับมโนทัศน์ขึ้น โดยพิจารณากระบวนการปรับมโนทัศน์เป็นสองระยะ ระยะแรกเกี่ยวกับการปรับความรู้ที่มีอยู่ของนักเรียน และอีกระยะหนึ่งเกี่ยวกับการปรับความรู้ใหม่ที่ได้เผชิญ ในระยะแรกนักเรียนถูกคาดหวังให้เข้าใจว่าความรู้ที่มีอยู่ไม่เพียงพอในการแก้ปัญหา นักเรียนจะประสบกับความขัดแย้งระหว่างความรู้ที่มีอยู่และความรู้ใหม่ ผลของความขัดแย้งภายในนี้จะกระตุ้นให้นักเรียนพร้อมสำหรับการปรับมโนทัศน์ ในระยะที่สองนักเรียนควรจะพบความรู้ใหม่ที่สามารถเข้าใจได้ มีเหตุผลและมีประสิทธิภาพ

นักคณิตศาสตร์พบว่าแนวคิดการจัดการเรียนรู้เพื่อการปรับมโนทัศน์มีผลมากในวิชาคณิตศาสตร์ แต่มีนักการศึกษาทางวิทยาศาสตร์เห็นไม่ตรงกับความคิดดังกล่าว เนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์จะขึ้นอยู่กับการพิสูจน์จากหลักทั่วไปสู่เรื่องเฉพาะแล้วไม่มีการทดลอง แต่ในความเป็นจริงนักเรียนกำลังเผชิญกับสถานการณ์ที่คล้าย ๆ กัน เมื่อพวกเขาเรียนรู้คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ เช่น จากกรณีที่นักเรียนพัฒนาฟิสิกส์บนพื้นฐานของประสบการณ์ในชีวิตประจำวัน พวกเขายังได้พัฒนาคณิตศาสตร์ไปด้วย ซึ่งเป็นเหตุผลหนึ่งที่สนับสนุนว่าแนวคิดการจัดการเรียนรู้เพื่อการปรับมโนทัศน์สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ ฟอสเนียเดลและแวมวาเกาส์ซี (Vosniadou and Vamvakoussi. 2004a : 98)

จากขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการปรับมโนทัศน์ เรนส์ (Reins. 2006 : 677) กล่าวโดยสรุปว่าครูมีบทบาท ดังนี้

1. เป็นผู้จัดการชั้นเรียน หรือสร้างบรรยากาศของชั้นเรียน โดย

1.1 กำหนดบริบทอย่างคร่าว ๆ สำหรับกิจกรรมการเรียนรู้

1.2 ตั้งปัญหาที่มีความสำคัญและมีความหมาย

1.3 สำรวจความคิดเห็นที่แตกต่างของนักเรียน โดยปราศจากการกดดัน

1.4 แนะนำงานให้นักเรียนนำแนวคิดใหม่ที่ได้ไปประยุกต์ใช้

1.5 หาวิธีการเพื่อช่วยให้นักเรียนรู้สึกไม่พอใจกับความคิดของตนเอง ซึ่งการไม่พอใจความคิดของนักเรียนดังกล่าว สามารถถูกทำให้เกิดขึ้นผ่านการดำเนินการต่อไปนี้

1.5.1 การแสดงตัวอย่างที่ไม่เหมาะสม

1.5.2 ใช้ตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่าง

1.5.3 ใช้กรณีที่แตกต่างหรือตรงกันข้าม

1.5.4 ใช้การพิสูจน์แบบนิรนัย

1.5.5 การแสดง รูป ตาราง กราฟ แผนผัง

1.5.6 การแสดงลักษณะที่ไม่สมบูรณ์ของแนวคิด

1.5.7 การแสดงการนำไปใช้ที่ไม่ถูกต้อง

2. เป็นผู้มีส่วนร่วมที่กระตือรือร้น โดย

2.1 มั่นใจว่าความคิดเห็นของตนเองไม่ได้มีผลต่อกิจกรรมในชั้นเรียนมากที่สุด

2.2 ใช้การเรียนรู้แบบค้นพบในกิจกรรม แต่ยังไม่ต้องใช้ความคิดเห็นของตนเอง

2.3 ตรวจสอบความคิดเห็นที่นำเสนอโดยนักเรียน

2.4 ตรวจสอบว่าความคิดของนักเรียนผิดอย่างไร

2.5 แสดงมุมมองของตนเองเป็นคำพูด

จากบทบาทของครูข้างต้น ลักษณะเฉพาะของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการปรับมโนทัศน์ ควรเป็นดังนี้

1. เคารพในความรู้ความเข้าใจของนักเรียน
2. เคารพในความคิดของนักเรียน
3. พยายามเข้าใจมุมมองของนักเรียน
4. สนับสนุนสื่อการเรียนรู้ที่หลากหลาย

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการปรับมโนทัศน์ นอกจากบทบาทของครูแล้วควรพิจารณาถึงบทบาทของนักเรียนเช่นกัน ซึ่งพบว่าบทบาทของนักเรียนมีดังนี้

1. เข้าใจมโนทัศน์ที่ได้เรียน ซึ่งเป็นเป้าหมายของการเรียนรู้
2. สร้างการเรียนรู้ด้วยตนเอง
3. เชื่อมั่นในความคิดของตนเอง
4. พิสูจน์ว่าข้อสรุปที่ได้จากกิจกรรมถูกต้อง
5. ยอมรับความคิดเห็นที่แตกต่าง
6. ฟังและทำความเข้าใจความคิดเห็นที่แตกต่าง
7. พยายามเข้าใจความคิดเห็นของผู้อื่น
8. สามารถไตร่ตรองความคิดเห็นที่แตกต่าง และเปลี่ยนแปลงความคิดของตนเองเมื่อความคิดเห็นอื่นดีกว่า

สรุปได้ว่า บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการปรับมโนทัศน์ คือ การกำหนดบริบทสำหรับกิจกรรมการเรียนรู้ ตั้งปัญหาที่มีความหมาย แนะนำงานให้นักเรียนนำแนวคิดใหม่ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ หาวิธีการให้นักเรียนเกิดสภาวะไม่สมดุล โดยการใช้ตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่าง ใช้กรณีที่แตกต่างหรือตรงกันข้าม ใช้การพิสูจน์แบบนิรนัย การแสดง รูป ตาราง กราฟ แผนผัง การแสดงลักษณะที่ไม่สมบูรณ์ของแนวคิด การแสดงการนำไปใช้ที่ไม่ถูกต้อง

4. ทฤษฎีการซ่อมแซม (Repair Theory)

4.1 หลักการสำคัญของทฤษฎีการซ่อมแซม

ประมาณปี ค.ศ. 1979-1980 นักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ชาวอเมริกัน 2 ท่าน คือ เคิร์ต เวนเลห์นและจอห์น ซีรี่ บราวน์ (Kurt Vanlehn and John Seely Brown) ร่วมกันทำการวิจัยเกี่ยวกับกลไกการคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในวิชาพีชคณิต เรื่อง การบวกและลบจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 2 หลักขึ้นไป จากการวิจัยครั้งนี้พบว่าความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์มีลักษณะคลาดเคลื่อนอย่างเป็นระบบ กล่าวคือ ถ้านักเรียนคนใดมีความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์เป็นอย่างไร ก็จะแสดงออกถึงลักษณะเช่นนั้นอย่างเป็นระบบ โดยสามารถสังเกตความคลาดเคลื่อนนั้นได้จากคำตอบที่นักเรียนตอบจากปัญหาที่ครูตั้งขึ้นมา และมีอยู่น้อยมากที่ความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์นั้นจะเกิดขึ้นอย่างไม่เป็นระบบ จึงต้องมีการดำเนินการเพื่อแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนี้ เรียกการดำเนินการเพื่อแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่าการซ่อมแซม หรือ Repair ซึ่งนำมาสู่ทฤษฎีซ่อมแซม

บราวและเวนเลห์น (Brown and Vanlehn. 1980 : 379-426) ได้อธิบายเกี่ยวกับทฤษฎีซ่อมแซม (Repair Theory) ไว้ว่า ทฤษฎีซ่อมแซมเป็นทฤษฎีที่อธิบายว่ามนุษย์เรียนรู้ทักษะกระบวนการหรือมโนทัศน์ที่จะใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างไร โดยมีความพยายามที่จะแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนั้น ทฤษฎีนี้อธิบายเกี่ยวกับกระบวนการสร้างมโนทัศน์ของนักเรียนแต่ละคนว่า มโนทัศน์ของแต่ละคนเกิดจากกระบวนการคิดที่แตกต่างกัน ซึ่งส่งผลให้มโนทัศน์ที่สร้างขึ้นมาในเรื่องเดียวกันหรือสิ่งเดียวกันมีความแตกต่างกัน ในความแตกต่างกันของมโนทัศน์ที่สร้างขึ้นนี้จึงมีทั้งมโนทัศน์ที่ถูกต้องและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน แต่ความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ที่สร้างขึ้นมานั้นมีลักษณะที่เป็นระบบ เรียกมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอย่างเป็นระบบนี้ว่า Bugs โดยในการเรียนการสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เพียง 1 เรื่อง อาจเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอย่างเป็นระบบ หรือ Bugs ได้หลายรูปแบบ

การดำเนินการซ่อมแซมมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนตั้งอยู่บนพื้นฐานที่ว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนบางประการของนักเรียนอาจนำไปใช้แก้ปัญหาในระดับง่ายได้ แต่เมื่อปัญหาที่ถูกกำหนดขึ้นมีความยากขึ้น มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่นักเรียนมีอยู่นั้นจะไม่สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาได้ เมื่อนักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการดำเนินการเพื่อแก้ปัญหาที่กำหนดให้แล้ว จะเกิดความพยายามปรับกระบวนการหาคำตอบหรือพยายามปรับมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิม เพื่อให้สามารถแก้ปัญหาใหม่นั้นได้ เรียกกระบวนการที่มีการ

เปลี่ยนแปลงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่นักเรียนมีอยู่เดิมไปสู่มโนทัศน์ที่ถูกต้องที่สามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องว่า Bug Migration

สรุปได้ว่า หลักการสำคัญของทฤษฎีซ่อมแซมมี 2 ประเด็น คือ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน หรือ Bugs ที่เกิดขึ้นกับตัวนักเรียน เป็นความคลาดเคลื่อนอย่างเป็นระบบ สามารถระบุและตรวจสอบได้โดยพิจารณาจากคำตอบของปัญหาที่นักเรียนแสดงออกมา และมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนสามารถเปลี่ยนแปลงไปเป็นมโนทัศน์ที่ถูกต้องได้ โดยอาศัยปัญหาหรือแบบฝึกหัดที่มีความยากมากยิ่งขึ้น ที่ทำให้นักเรียนไม่สามารถใช้มโนทัศน์ที่มีอยู่เดิมมาแก้ปัญหาได้ จึงจำเป็นต้องปรับกระบวนการและมโนทัศน์ที่มีอยู่ไปสู่มโนทัศน์ที่ถูกต้องให้สามารถแก้ปัญหานั้นได้

4.2 ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ตามแนวทฤษฎีซ่อมแซม

ในปัจจุบันนี้การนำทฤษฎีซ่อมแซมมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ มีการนำเครื่องคอมพิวเตอร์มาช่วยในขั้นตอนการปรับเปลี่ยนมโนทัศน์ของนักเรียน หรือขั้นการซ่อมแซม (Repair) โดยเวนเลห์นได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ คือ Intelligent Tutoring Systems หรือ ITS ขึ้นมาเพื่อใช้ในกระบวนการจัดการเรียนการสอนและการแก้ไขมโนทัศน์ของนักเรียน โดยในช่วงเริ่มต้นของโปรแกรมนี้ เนื้อหาของโปรแกรมมีเพียง เรื่อง การลบจำนวนเต็มตั้งแต่ 2 หลักขึ้นไป ซึ่งสอดคล้องกับการวิจัยเริ่มแรกของบราวและเวนเลห์นเท่านั้น แต่มีผู้นำความรู้และทฤษฎีซ่อมแซมไปใช้อย่างแพร่หลายมากขึ้นในเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน โปรแกรมคอมพิวเตอร์ Intelligent Tutoring Systems หรือ ITS จึงถูกพัฒนาไปสู่เนื้อหาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ เช่น เนื้อหาทางพีชคณิต เรื่อง การคูณและการหารเลขยกกำลัง ในรูปโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ชื่อ Easy Math เป็นต้น

เวนเลห์นและบราว (Vanlehn and Brown. 1980 : 1-67) ได้เสนอขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนตามแนวทฤษฎีซ่อมแซม เพื่อแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนโดยแบ่งเป็น 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นการนำเสนอมโนทัศน์ในขั้นต้น ในขั้นนี้ผู้สอนจะทำการสอนมโนทัศน์ในกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียนตามปกติ สำหรับการเรียนการสอนนี้นักเรียนจะสามารถสร้างมโนทัศน์สำหรับการแก้ปัญหาโจทย์นั้น ๆ ได้ แต่มโนทัศน์ที่สร้างขึ้นนี้อาจจะเป็นมโนทัศน์ที่ไม่ถูกต้องทั้งหมด ซึ่งจะเป็นปัญหาสำหรับการแก้ปัญหาในขั้นที่สูงขึ้น

ขั้นที่ 2 ขั้นการหาความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้น ในขั้นนี้ผู้สอนต้องใช้ปัญหาในขั้นที่สูงขึ้นให้แก่นักเรียนได้แก้ปัญหา โดยโจทย์นั้นจะต้องครอบคลุม

ทุก ๆ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในมโนทัศน์นั้น ๆ ของนักเรียน และมีจำนวนมากพอที่จะทำให้ครูสามารถพิจารณาได้ว่าที่นักเรียนตอบปัญหานั้นไม่ถูกต้อง เกิดจากความคลาดเคลื่อนในมโนทัศน์ใด สามารถนำความคลาดเคลื่อนของนักเรียนมาพิจารณาได้ว่าความคลาดเคลื่อนของนักเรียนอยู่ในส่วนใดของมโนทัศน์ที่ครูต้องการให้นักเรียนได้เรียนรู้

ขั้นที่ 3 ขั้นการแก้ไข (Repair) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียน เป็นผลมาจากความคลาดเคลื่อนที่ครูพบในขั้นที่ 2 ในขั้นของการแก้ไขนี้จะต้องมีการชี้แจงว่าข้อที่นักเรียนทำผิดนั้น เกิดจากสาเหตุใด (กระบวนการหาคำตอบที่นักเรียนใช้เป็นอย่างไร จึงทำให้ได้คำตอบเช่นนั้น) และที่ถูกต้องจะต้องคิดเช่นไรจึงจะได้คำตอบ โดยปัญหาที่ใช้สำหรับการแก้ไขนั้นจะต้องมีจำนวนมากพอที่จะทำให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่ถูกต้องเกี่ยวกับเรื่องนั้น ๆ โดยหลักสำคัญของการให้ผลป้อนกลับของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและการแก้ไขมโนทัศน์นั้นจะต้องทำโดยทันทีหรือทำโดยเร็วที่สุดเท่าที่จะทำได้

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน สำหรับนักเรียนที่ได้รับการแก้ไขมโนทัศน์แล้วจะต้องได้รับการทดสอบเกี่ยวกับมโนทัศน์นั้น ๆ ซ้ำอีกครั้งหนึ่งเพื่อตรวจสอบว่าการแก้ไขมโนทัศน์นั้นเสร็จสมบูรณ์แล้ว และจะต้องให้ผลป้อนกลับแก่นักเรียนด้วย

สรุปทฤษฎีการซ่อมแซม

บราวและเวนเลห์น (Brown and Vanlehn. 1980 : 379-426) ได้เสนอขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนตามแนวทฤษฎีซ่อมแซม เพื่อแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียน โดยแบ่งเป็น 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นการนำเสนอมโนทัศน์ในขั้นต้น ในขั้นนี้ผู้สอนจะทำการสอนมโนทัศน์ในกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียนตามปกติ สำหรับการเรียนการสอนนี้นักเรียนจะสามารถสร้างมโนทัศน์สำหรับการแก้ปัญหาโจทย์นั้น ๆ ได้ แต่มโนทัศน์อาจไม่ถูกต้องทั้งหมด

ขั้นที่ 2 ขั้นการหาความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้น เมื่อนักเรียนได้รับปัญหาที่ยากยิ่งขึ้นแล้ว จะไม่สามารถนำมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิมมาใช้แก้ปัญหานั้นให้ได้รับคำตอบที่ถูกต้องได้ เนื่องจากมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิมเป็นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ครูจะนำความคลาดเคลื่อนของนักเรียนมาพิจารณาว่าความคลาดเคลื่อนของนักเรียนอยู่ในส่วนใดของมโนทัศน์ที่ครูต้องการให้นักเรียนได้เรียนรู้

ขั้นที่ 3 ขั้นการแก้ไข (Repair) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียน เป็นผลมาจากความคลาดเคลื่อนของนักเรียนที่ครูพบในขั้นที่ 2 ในขั้นของการแก้ไขนี้จะต้องมีการชี้แจงว่าข้อที่นักเรียนทำผิดนั้น เกิดจากสาเหตุใดและที่ถูกต้องจะต้องคิดเช่นไรจึงจะได้คำตอบ ครูให้ปัญหาที่มีจำนวนมากพอที่จะทำให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่ถูกต้องเกี่ยวกับเรื่องนั้น ๆ ขั้นตอนที่ 3 จะต้องทำโดยทันทีหรือทำโดยเร็วที่สุดเท่าที่จะทำได้

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน สำหรับนักเรียนที่ได้รับการแก้ไขมโนทัศน์แล้วจะต้องได้รับการทดสอบเกี่ยวกับมโนทัศน์นั้น ๆ ซ้ำอีกครั้งหนึ่ง เพื่อยืนยันว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนได้รับการแก้ไขเสร็จสมบูรณ์แล้ว

จุดเด่น

1. ทฤษฎีครอบคลุมกระบวนการแก้ปัญหามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
2. ทฤษฎีมีขั้นตอนการจัดกระบวนการเรียนการสอนชัดเจน
3. มีการกำหนดปัญหาที่ยากขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนได้แก้ปัญหา โดยปัญหานั้นครอบคลุมข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้น

จุดด้อย

ขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนตามแนวทฤษฎีซ่อมแซมในขั้นที่ 1 ผู้สอนจะทำการสอนมโนทัศน์ในกิจกรรมการเรียนรู้ปกติ ทำให้นักเรียนไม่ได้คิดและนักเรียนไม่ถูกกระตุ้นให้แก้ปัญหานั้นเท่าที่ควร

รูปแบบการปรับมโนทัศน์

รูปแบบการปรับมโนทัศน์มีหลายรูปแบบ ได้มีนักการศึกษากล่าวถึง ไว้ดังต่อไปนี้

1. รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของสตีแพนส์และชมิดท์

จากแนวคิดของโพสเนอร์และคณะ สตีแพนส์นำมาพัฒนาเป็นรูปแบบการปรับมโนทัศน์และได้มีการนำเสนอรูปแบบนี้โดยสตีแพนส์และชมิดท์ (Stepans and Schmidt. 2009 :23) ซึ่งประกอบด้วย 6 ขั้น ดังนี้

1. ขั้นมอบหมายงาน (Commit to a Position or an Outcome)
2. ขั้นแสดงความเชื่อ (Expose Beliefs)
3. ขั้นเผชิญหน้ากับความเชื่อ (Confront Beliefs)
4. ขั้นจัดมโนทัศน์ (Accommodate the Concept)
5. ขั้นขยายมโนทัศน์ (Extend the Concept)

6. ขั้นนอกเหนือบทเรียน (Go Beyond)

ขั้นตอนของรูปแบบการปรับมโนทัศน์

สตีแพนส์กล่าวถึงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการปรับมโนทัศน์ ว่านักเรียนจะได้ทำงานร่วมกันตลอดกิจกรรม และยังมีโอกาสสร้างความหมายของมโนทัศน์ด้วยตนเอง ประกอบด้วย 6 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นมอบหมายงาน (Commit to a Position or an Outcome)

1. ครูกำหนดคำถามหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวกับมโนทัศน์หรือเรื่องที่จะเรียน ซึ่งเป็นคำถามหรือสถานการณ์ที่กระตุ้นให้นักเรียนคิด ตระหนักถึงความคิดและความเชื่อเกี่ยวกับมโนทัศน์นั้น

2. นักเรียนแสดงความคิดและความเชื่อออกมาด้วยการเขียนข้อคาดการณ์พร้อมทั้งแสดงเหตุผลในการสร้างข้อคาดการณ์ดังกล่าวจากประสบการณ์ของตนเองเป็นรายบุคคล

3. นักเรียนสามารถแสดงความคิดและความเชื่อของตนเองได้หลายแบบ เช่น การเขียน การวาดภาพหรือแผนผัง การอธิบายด้วยคำพูด

ขั้นที่ 2 ขั้นแสดงความเชื่อ (Expose Beliefs)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นของตนเอง โดยแบ่งปันและอภิปรายข้อคาดการณ์และเหตุผลในการสร้างข้อคาดการณ์จากขั้นที่ 1 แก่เพื่อนร่วมชั้น โดยเริ่มที่กลุ่มเล็กไปยังกลุ่มใหญ่ ดังนี้

1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มย่อยเพื่อแสดงและอภิปรายข้อคาดการณ์พร้อมเหตุผลในการสร้างข้อคาดการณ์กับสมาชิกภายในกลุ่ม ครูสามารถแนะนำให้นักเรียนสร้างแผนผังของข้อคาดการณ์และเหตุผลในการสร้างข้อคาดการณ์ของกลุ่ม

2. ครูให้ตัวแทนกลุ่มนำเสนอข้อคาดการณ์และเหตุผลในการสร้างข้อคาดการณ์ที่ได้จากการอภิปรายภายในกลุ่มย่อย โดยครูจะไม่แสดงความคิดเห็นหรือให้ผลตอบกลับทั้งในทางบวกและลบ

3. ในขั้นนี้จะได้ข้อคาดการณ์จำนวนมากครูและนักเรียนต้องช่วยกันจำแนกข้อคาดการณ์ดังกล่าวเพื่อนำไปทดสอบในขั้นที่ 3

ขั้นที่ 3 ขั้นเผชิญหน้ากับความเชื่อ (Confront Beliefs)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยให้นักเรียนทดสอบข้อคาดการณ์ที่ได้จากขั้นที่ 2 ดังนี้

1. ครูและนักเรียนร่วมกันออกแบบการทดสอบข้อคาดการณ์ เช่น การสำรวจ การทดลอง การสังเกต การรวบรวมข้อมูล การปรึกษาครู การใช้อินเตอร์เน็ต การใช้หนังสือหรือแหล่งข้อมูลสิ่งพิมพ์อื่น ๆ การฟังบรรยาย เป็นต้น

2. นักเรียนดำเนินการทดสอบข้อคาดการณ์ตามวิธีการที่ออกแบบ และอภิปรายผลของการทดสอบภายในกลุ่มย่อยหรือทั้งชั้นก็ได้

3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผลจากการทดสอบข้อคาดการณ์ ผลจากการทดสอบและอภิปรายจะนำไปใช้ในการสร้างความหมายของมโนทัศน์ในขั้นที่ 4

ขั้นที่ 4 ขั้นจัดมโนทัศน์ (Accommodate the Concept)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยให้นักเรียนแก้ไขหรือปรับข้อคาดการณ์ของตนเองเพื่อสร้างเป็นความหมายของมโนทัศน์หรือเรื่องที่เรียน (ซึ่งเป็นการตอบคำถามหรือสถานการณ์ในขั้นที่ 1. แล้วแบ่งปันผลลัพธ์ที่ได้กับเพื่อนร่วมชั้นพร้อมทั้งอธิบายเหตุผล ดังนี้

1. ครูให้นักเรียนสร้างความหมายของมโนทัศน์หรือสิ่งที่เรียนจากการสังเกตและการอภิปรายผลของการทดสอบข้อคาดการณ์เป็นหลัก อาจจะดำเนินการเป็นกลุ่มย่อยหรือทั้งชั้นก็ได้

2. ครูสุ่มให้นักเรียนอภิปรายความหมายของมโนทัศน์และเหตุผลในการสรุปความหมายดังกล่าว โดยครูบันทึกการอภิปรายของนักเรียนแต่ละคนบนกระดาน

3. ครูอาจจะใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงความเข้าใจในมโนทัศน์ให้มากยิ่งขึ้น เช่น การถามเพื่อให้นักเรียนวิเคราะห์มโนทัศน์ได้

ขั้นที่ 5 ขั้นขยายมโนทัศน์ (Extend the Concept)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้ความคิดและความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ได้ จากขั้นที่ 4 มีความชัดเจนขึ้น ดังนี้

1. ครูกำหนดคำถามหรือสถานการณ์ใหม่ ให้นักเรียนนำมโนทัศน์ที่ได้ไปใช้กับสถานการณ์ดังกล่าว

2. ครูให้นักเรียนเชื่อมโยงมโนทัศน์ที่ได้ไปสู่เนื้อหาวิชาอื่น ๆ และสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน

3. นอกจากนี้ครูสามารถให้นักเรียนแบ่งปันประสบการณ์ในการได้ความหมายของมโนทัศน์ ระบุหรืออธิบายข้อบกพร่องของวิธีการดังกล่าวแก่ชั้นเรียน

ขั้นที่ 6 ขั้นนอกเหนือบทเรียน (Go Beyond)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้เวลานักเรียนในการกระทำนอกเหนือขอบเขตของมโนทัศน์หรือเรื่องที่เรียน ดังนี้

1. ครูอาจตั้งคำถามหรือสถานการณ์ใหม่นอกเหนือขอบเขตของมโนทัศน์ที่ได้ให้นักเรียนติดตามดำเนินการตอบคำถาม ซึ่งคำถามใหม่นี้อาจจะแสดงความไม่แน่ใจหรือความสับสนในมโนทัศน์ใหม่ที่ได้เรียน หรือ

2. ครูตั้งคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับเหตุผลของมโนทัศน์ที่ได้เรียน เช่น ครูให้นักเรียนเขียนพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมโนทัศน์ หรือ

3. ครูตั้งคำถามที่ช่วยให้นักเรียนสานต่อความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ของตนเอง เช่น คำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับการนำมโนทัศน์ไปประยุกต์ใช้ให้มากขึ้นกว่าขั้นขยายมโนทัศน์ หรือ

4. ครูตั้งคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับงานในชั้นเรียนว่าสัมพันธ์กับทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์อย่างไร เช่น การให้นักเรียนสร้างการทดลองเพื่อทดสอบทฤษฎีการตั้งคำถามให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับการทดสอบทฤษฎีหรือความเข้าใจใหม่ ๆ

สรุปรูปแบบการปรับมโนทัศน์ของสตีแพนส์

สตีแพนส์และชมิดท์ (Stepans and Schmidt. 2009 : 22) กล่าวว่า การปรับมโนทัศน์ตามรูปแบบการปรับมโนทัศน์นักเรียนจะได้ทำงานร่วมกันตลอดกิจกรรม และยังมีโอกาสสร้างความหมายของมโนทัศน์ด้วยตนเอง ประกอบด้วย 6 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นมอบหมายงาน (Commit to a Position or an Outcome)

ครูกำหนดคำถามหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวกับมโนทัศน์หรือเรื่องที่จะเรียน ซึ่งเป็นคำถามหรือสถานการณ์ที่กระตุ้นให้นักเรียนคิด ให้นักเรียนแสดงความคิดและความเชื่อออกมาด้วยการเขียนข้อคาดการณ์และอธิบายเหตุผล เช่น การเขียน การวาดภาพหรือแผนผัง การอธิบาย

ขั้นที่ 2 ขั้นแสดงความเชื่อ (Expose Beliefs)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นของตนเอง โดยอภิปรายข้อคาดการณ์และเหตุผลในการสร้างข้อคาดการณ์แก่เพื่อนร่วมชั้น โดยเริ่มจากการอภิปรายกลุ่มเล็กไปยังกลุ่มใหญ่

ขั้นที่ 3 ขั้นเผชิญหน้ากับความเชื่อ (Confront Beliefs)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยให้นักเรียนทดสอบข้อคาดการณ์ที่ได้จากขั้นที่ 2 เช่น การสำรวจ การทดลอง การสังเกต การรวบรวมข้อมูล การใช้อินเตอร์เน็ต การใช้หนังสือ ให้นักเรียนอภิปรายผลของการทดสอบภายในกลุ่มย่อยหรือกลุ่มใหญ่ ผลจากการทดสอบและอภิปรายจะนำไปใช้ในการสร้างความหมายของมโนทัศน์ในขั้นที่ 4

ขั้นที่ 4 ขั้นจัดมโนทัศน์ (Accommodate the Concept)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยให้นักเรียนแก้ไขหรือปรับข้อคาดการณ์ของตนเองเพื่อสร้างเป็นความหมายของมโนทัศน์ แล้วแบ่งปันผลลัพธ์ที่ได้กับเพื่อนร่วมชั้นพร้อมทั้งอธิบายเหตุผล ครูอาจจะใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงความเข้าใจในมโนทัศน์ให้มากยิ่งขึ้น

ขั้นที่ 5 ขั้นขยายมโนทัศน์ (Extend the Concept)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้ความคิดและความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่ได้จากขั้นที่ 4 มีความชัดเจนขึ้น โดยการกำหนดคำถามหรือสถานการณ์ใหม่ เชื่อมโยงมโนทัศน์ที่ได้ไปสู่เนื้อหาวิชาอื่น ๆ

ขั้นที่ 6 ขั้นนอกเหนือบทเรียน (Go Beyond)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนขยายมโนทัศน์ที่ได้ไปสู่มโนทัศน์ใหม่ ๆ เช่น การใช้คำถามหรือสถานการณ์ใหม่นอกเหนือขอบเขตของมโนทัศน์ที่ได้ให้นักเรียนดำเนินการหาคำตอบ

จุดเด่น

1. มีลำดับขั้นตอนที่ชัดเจน
2. สนับสนุนให้นักเรียนค้นพบความรู้ด้วยตนเอง เป็นวิธีการที่ทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจและจดจำสิ่งที่เรียนรู้ได้นาน
3. มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันระหว่างผู้เรียนเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่สร้างขึ้น

จุดด้อย

ขาดขั้นตอนการตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนว่าหลังจากปรับมโนทัศน์ยังคงมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนคงเหลืออยู่หรือไม่

2. รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของเซอร์เบล

เซอร์เบล (Zirbel. 2005 : 10) ได้ให้ข้อแนะนำว่า ในการสร้างมโนทัศน์ใหม่หรือการปรับมโนทัศน์เดิมที่ไม่เหมาะสม นักเรียนควรจะต้องผ่านกระบวนการหลายขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การทำให้นักเรียนติดมโนทัศน์ใหม่ (ทำให้นักเรียนยอมรับสารสนเทศ) นักการศึกษาจะต้องแน่ใจว่าความคิดที่เฉพาะเจาะจงที่ต้องการให้เกิดกับนักเรียนนั้นจะต้องมีประสิทธิภาพเพียงพอที่จะให้นักเรียนสังเกตเห็น กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ความคิดใหม่จะต้องถูกตกแต่งให้เพียงพอที่จะได้รับการสังเกต และโดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนจะต้องเริ่มต้นด้วยความประหลาดใจเพียงพอที่จะอยากรู้ให้มากขึ้น

ขั้นตอนที่ 2 การแนะนำตัวเชื่อม (การดูดซึมสารสนเทศ) ความคิด/เนื้อหาจำเป็นต้องถูกนำเสนอในรูปแบบที่เข้าใจง่าย นักเรียนสามารถติดตามทุกส่วนของการอ้างเหตุผลอย่างชัดเจน อย่างน้อยที่สุดนักเรียนควรจะรู้สึกว่ามีบางสิ่งที่สร้างความเข้าใจ ความคิดที่เชื่อมโยงอย่างมีความหมายจะมีประโยชน์มาก เพราะว่าจะช่วยให้นักเรียนสร้างการเชื่อมโยงอย่างมีความหมาย ครูที่ดีควรจะสามารถแนะนำวิธีการในการใช้สารสนเทศในแนวทางอื่น ๆ ให้แก่นักเรียน

ขั้นตอนที่ 3 การตั้งคำถามและการเผชิญหน้ากับนักเรียน (การปรับเปลี่ยนสารสนเทศ) ครูที่ดีจะต้องให้นักเรียนเผชิญกับคำถามว่าทำไมความเชื่อที่มีอยู่ก่อนของพวกเขาจึงใช้การไม่ได้อีกต่อไป สิ่งที่สำคัญของจุดนี้คือนักเรียนคิดเสียงดังและกล่าวด้วยภาษาของตนเองอย่างชัดเจนถึงปัญหา ครูสามารถแนะนำนักเรียนให้เกิดความรู้สึกท้าทายด้วยคำถามที่ถูกต้องเหมาะสม

ขั้นตอนที่ 4 การปฏิบัติและการสร้าง (การสร้างความคุ้นเคยกับสารสนเทศ) ครูที่ดีควรให้ตัวอย่างที่มีความหมายที่นอกเหนือจากการย้อนกลับไปที่ปัญหารูปแบบเดิม ตัวอย่างเช่น การประยุกต์ความรู้ใหม่และทดลองใช้ความรู้ใหม่นั้น การแนะนำวิธีการถ่ายโยงมโนทัศน์ใหม่ที่ได้รับไปยังขอบเขตความรู้อื่นก็ควรจะทำด้วย เพราะจะทำให้นักเรียนได้สร้างการค้นพบด้วยตัวของนักเรียนเอง ครูที่ดีสามารถที่จะท้าทายให้นักเรียนไปไกลเกินกว่าขอบเขตอันจำกัดของพวกเขา

สรุปรูปแบบการปรับมโนทัศน์ของเซอร์เบล

เซอร์เบล (Zirbel. 2005 : 10) ได้ให้ข้อแนะนำว่า ในการสร้างมโนทัศน์ใหม่หรือการปรับมโนทัศน์เดิมที่ไม่เหมาะสม นักเรียนควรจะต้องผ่านกระบวนการหลายขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การทำให้นักเรียนติดมโนทัศน์ใหม่ (ทำให้นักเรียนยอมรับสารสนเทศ) ความคิดใหม่จะต้องถูกนำเสนอให้นักเรียนได้สนใจ และนักเรียนจะต้องเริ่มต้นด้วยความประหลาดใจที่จะอยากรู้ อยากเห็นมากขึ้น

ขั้นตอนที่ 2 การแนะนำตัวเชื่อม (การดูดซึมสารสนเทศ) ความคิดหรือเนื้อหาต้องถูกนำเสนอในรูปแบบที่เข้าใจง่าย นักเรียนสามารถหาแหล่งข้อมูลเพื่อใช้ในการอ้างเหตุผลอย่างชัดเจน

ขั้นตอนที่ 3 การตั้งคำถามและการเผชิญหน้ากับนักเรียน (การปรับเปลี่ยนสารสนเทศ) ครูตั้งคำถามที่เหมาะสมเพื่อทดสอบมโนทัศน์ที่มีอยู่ก่อนของนักเรียนว่ามโนทัศน์นั้นสามารถใช้ได้หรือใช้ไม่ได้อีกต่อไป

ขั้นตอนที่ 4 การปฏิบัติและการสร้าง (การสร้างความคุ้นเคยกับสารสนเทศ) ครูให้ปัญหาใหม่ เช่นให้นักเรียนประยุกต์ความรู้ใหม่และทดลองใช้ความรู้ใหม่นั้น

จุดเด่น

1. กระตุ้นให้ผู้เรียนอยากรู้ว่าครูจะสอนเนื้อหาใหม่อะไร
2. ตั้งคำถามเพื่อให้ผู้เรียนเผชิญหน้ากับปัญหา
3. มีการประยุกต์ความรู้ใหม่และทดลองใช้ความรู้ใหม่นั้น ๆ

จุดด้อย

ขาดขั้นตอนการตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนหลังจากใช้รูปแบบการปรับมโนทัศน์

3. รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของซาเดลา

ซาเดลา (Sadera. 2001 : 93) ได้เสนอวิธีการจัดการเรียนการสอนที่เน้นการปรับมโนทัศน์เป็นสำคัญ โดยมีขั้นตอนในการดำเนินการ 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กระตุ้นประสบการณ์เดิมต่าง ๆ ของนักเรียนและวินิจฉัยในความเชื่อต่าง ๆเหล่านั้น โดยการเสนอความคิดใหม่ที่ท้าทายต่อความคิดต่าง ๆ ของนักเรียน จะทำให้

นักเรียนเล็งเห็นความขัดแย้งหรือเกิดปัญหากับมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิมของนักเรียนที่ได้รับการสอนในห้องเรียนตามปกติ

ขั้นตอนที่ 2 นำนักเรียนเข้าสู่ข้อมูลสารสนเทศใหม่ และให้ความสำคัญกับทรรศนะต่าง ๆ ของนักเรียน โดยสนับสนุนให้นักเรียนได้ระลึกถึงวิถีทางต่าง ๆที่คลาดเคลื่อนจากสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดภายในห้องเรียน

ขั้นตอนที่ 3 นักเรียนจำเป็นต้องลงมือปฏิบัติเพื่อทำการสำรวจความสัมพันธ์ของข้อมูลสารสนเทศ เพื่อการสร้างฐานความรู้ของแต่ละบุคคล โดยในขั้นตอนนี้นักเรียนจะได้ค้นคว้าเพื่อที่ขจัดความคลาดเคลื่อนต่าง ๆ ผ่านหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย หน้าที่เหล่านั้นจะนำนักเรียนไปสู่ทรรศนะต่าง ๆ ที่ลึกซึ้งมากยิ่งขึ้นและปรับเปลี่ยนวิถีทางเฉพาะของการปฏิบัติการเพื่อที่จะทดสอบวิถีทางในการขจัดความคลาดเคลื่อนเหล่านั้น

ขั้นตอนที่ 4 เป็นขั้นตอนที่ต่อเนื่องจากขั้นตอนที่ผ่านมา โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนสร้างความเข้าใจที่แข็งแกร่งต่อความเข้าใจมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน โดยการให้นักเรียนพัฒนาความเข้าใจในส่วนของความสำคัญ ความจำเป็น และความสัมพันธ์กันภายในทรรศนะที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนเอง ซึ่งเป็นจุดที่สำคัญของกระบวนการปรับมโนทัศน์

ขั้นตอนที่ 5 การแลกเปลี่ยนความคิดของนักเรียน ซึ่งการแลกเปลี่ยนความคิดนี้เปิดโอกาสให้นักเรียนได้รับความท้าทายจากมโนทัศน์ใหม่ต่าง ๆ โดยดำเนินการผ่านการโต้แย้งกันในห้องเรียนและการร่วมประชุมเพื่ออภิปรายร่วมกัน ขั้นตอนสุดท้ายนี้จะเป็นการจัดเตรียมข้อมูลเพื่อตัดสินว่ามโนทัศน์ใหม่ของนักเรียนแต่ละบุคคลนั้นจะสามารถอยู่รอดได้ในกระบวนการปรับเปลี่ยนนี้หรือไม่

สรุปรูปแบบการปรับมโนทัศน์ของซาเดลา

ซาเดลา(Sadera. 2001 : 93) ได้เสนอวิธีการจัดการเรียนการสอนที่เน้นการปรับมโนทัศน์ โดยมีขั้นตอนในการดำเนินการ 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กระตุ้นประสบการณ์เดิมของนักเรียนและวินิจฉัยมโนทัศน์ของผู้เรียน โดยการเสนอปัญหาใหม่ที่ท้าทายให้นักเรียนได้หาคำตอบ จะทำให้นักเรียนเล็งเห็นความขัดแย้งหรือเกิดปัญหากับมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิมของนักเรียน

ขั้นตอนที่ 2 นำนักเรียนเข้าสู่ข้อมูลสารสนเทศใหม่ โดยให้นักเรียนได้ระลึกถึงคลาดเคลื่อนที่เกิดจากสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดภายในห้องเรียน

ขั้นตอนที่ 3 นักเรียนลงมือปฏิบัติ ค้นคว้าเพื่อที่ขจัดความคลาดเคลื่อนต่าง ๆ ผ่านหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย

ขั้นตอนที่ 4 เป็นขั้นตอนที่ต่อเนื่องจากขั้นตอนที่ 3 โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนสร้างความเข้าใจที่ถูกต้อง จากการที่นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติและค้นคว้าหาข้อมูลด้วยตนเอง

ขั้นตอนที่ 5 การแลกเปลี่ยนความคิดของนักเรียน เป็นการร่วมประชุมเพื่ออภิปรายร่วมกัน โดยเป็นการจัดเตรียมข้อมูลเพื่อตัดสินว่ามโนทัศน์ใหม่ของนักเรียนนั้นจะเป็นมโนทัศน์ที่ถูกต้องหรือไม่

จุดเด่น

1. กระตุ้นประสบการณ์เดิมของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนเกิดปัญหากับมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิม
2. ผู้เรียนค้นคว้าเพื่อขจัดความคลาดเคลื่อนต่าง ๆ ผ่านหน้าที่ที่รับผิดชอบ
3. มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างผู้เรียน

จุดด้อย

ขาดการตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนหลังการใช้รูปแบบการปรับมโนทัศน์

4. รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของไดค์สตราและคณะ

ไดค์สตราและคณะ (Dykstra et al. 1992 : 615) ได้นำเสนอรูปแบบการปรับมโนทัศน์ แต่ละลักษณะมีรายละเอียด ดังนี้

1. การปรับปรุงความเข้าใจ (Differentiation) เป็นการปรับมโนทัศน์ที่เกิดขึ้นเมื่อมโนทัศน์ใหม่เกิดจากมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิม โดยมีความสอดคล้องกันกับมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิมและได้เป็นมโนทัศน์ที่กว้างขึ้น ยกตัวอย่างเช่น การนำมโนทัศน์เกี่ยวกับจำนวนเต็มบนเส้นจำนวนภาพเศษส่วนที่มีส่วนทั้งหมด (The Whole) เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเท่ากับระยะหนึ่งหน่วยบนเส้นจำนวนและเศษส่วนที่เป็นบวกบนเส้นจำนวน มาขยายมโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วนที่เป็นลบบนเส้นจำนวนได้อย่างถูกต้อง

2. การขยายชั้นความเข้าใจ (Class Extension) เป็นการปรับมโนทัศน์ที่เกิดขึ้นโดยเปรียบเทียบความเหมือนหรือความแตกต่างกันกับมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิม ผลจากการเปรียบเทียบสามารถนำมาจัดกลุ่มเป็นมโนทัศน์ที่สอดคล้องกับมโนทัศน์เดิมได้ถูกต้องตัวอย่างเช่น การขยายชั้นความเข้าใจจาก "เศษส่วนจะต้องแบ่งแต่ละส่วนให้เท่าๆ กัน" ซึ่งเป็นมโนทัศน์ที่ถูกต้อง เป็นมโนทัศน์ใหม่ที่เกิดจากการเปรียบเทียบข้อแตกต่างจากมโนทัศน์เดิมคือ "ถ้าพื้นที่

ในแต่ละส่วนแบ่งไม่เท่ากันจะไม่ถือว่าเป็นเศษส่วน และถ้าต้องการทำให้เป็นภาพที่แทนเศษส่วนจะต้องแบ่งพื้นที่ให้เท่ากัน”

3. การเปลี่ยนกรอบความเข้าใจ (Reconceptualization) เป็นการปรับมโนทัศน์ที่เกิดขึ้น เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นในความสัมพันธ์กันระหว่างมโนทัศน์ย่อยของมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิม ตัวอย่างเช่น การปรับมโนทัศน์เกี่ยวกับจำนวนคละที่เป็นลบ จากข้อสรุปว่า จำนวนคละที่เป็นลบประกอบด้วยจำนวนเต็มลบและเศษส่วนที่เป็นบวก เช่น $-6\frac{2}{5}=(-6)+\frac{2}{5}$ ซึ่งเป็นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน แต่การสังเกตพบว่า ระยะ 6 หน่วยและ $\frac{2}{5}$ ที่แทน $-6\frac{2}{5}$ นั้นอยู่ทางซ้ายของ 0 บนเส้นจำนวน และจำนวนที่อยู่ทางซ้ายของ 0 บนเส้นจำนวนนั้นเป็นจำนวนที่เป็นลบ นักเรียนจึงเกิดการปรับมโนทัศน์เกี่ยวกับจำนวนคละที่เป็นลบว่า จำนวนคละที่เป็นลบประกอบด้วยจำนวนเต็มที่เป็นลบและเศษส่วนที่เป็นลบ

สรุปรูปแบบการปรับมโนทัศน์ของไดค์สตราและคณะ

ไดค์สตราและคณะ (Dykstra et al. 1992 : 615) รูปแบบการปรับมโนทัศน์มีรายละเอียด ดังนี้

1. การปรับปรุงความเข้าใจ (Differentiation) เป็นการปรับมโนทัศน์ที่เกิดขึ้นให้มีความสอดคล้องกันกับมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิมและได้เป็นมโนทัศน์ที่กว้างขึ้น

2. การขยายชั้นความเข้าใจ (Class Extension) เป็นการปรับมโนทัศน์ใหม่ เมื่อมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิม ถูกนำมาพิจารณาเปรียบเทียบความเหมือนหรือความแตกต่างกัน

3. การเปลี่ยนกรอบความเข้าใจ (Reconceptualization) เป็นการปรับมโนทัศน์ใหม่ โดยการทดสอบความสัมพันธ์กันระหว่างมโนทัศน์ย่อยของมโนทัศน์ที่มีอยู่เดิม

จุดเด่น

1. เป็นการปรับเปลี่ยนมโนทัศน์ใหม่ให้สอดคล้องกับมโนทัศน์เดิม

2. มีการเปรียบเทียบความเหมือนและความแตกต่างของมโนทัศน์เดิมกับมโนทัศน์ใหม่

จุดด้อย

ขาดขั้นตอนการตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียน

จากการสังเคราะห์รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของนักการศึกษาทั้งหมด ผู้วิจัยได้สรุปเป็นรูปแบบปรับมโนทัศน์ สำหรับการวิจัยครั้งนี้ ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กระตุ้นประสบการณ์เดิมของผู้เรียน เป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดการปะทะจริงทางความคิด จากการตั้งคำถาม/ปัญหาทางพีชคณิต การกระตุ้นประสบการณ์เดิมจะทำให้ผู้เรียนได้แสดงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของตนเองออกมาให้ผู้วิจัยทราบ

ขั้นตอนที่ 2 แก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ประกอบด้วย

2.1 สร้างมโนทัศน์ทางพีชคณิตใหม่ ผู้วิจัยทำการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน โดยให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ผู้เรียนสามารถสืบค้นข้อมูลปฐมภูมิและข้อมูลทุติยภูมิได้ เช่น การคิดค้นหาคำตอบด้วยตนเอง การพิสูจน์ด้วยตนเอง หรือการสืบค้นข้อมูลจากข้อมูลทุติยภูมิ เช่น จากหนังสือ วารสาร จากอินเตอร์เน็ต

2.2 ผู้เรียนแลกเปลี่ยนและตรวจสอบมโนทัศน์ ผู้เรียนนำเสนอวิธีการในการแก้ปัญหาของตนเองกับเพื่อนในกลุ่ม เมื่อมีการแลกเปลี่ยนกันมากขึ้นผู้เรียนจะเห็นวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เห็นข้อบกพร่อง ได้ตรวจสอบคำตอบและผู้เรียนจะรู้ค้นพบคำตอบด้วยตนเอง ในขั้นตอนนี้ผู้เรียนจะสร้างองค์ความรู้และสร้างความเข้าใจด้วยตนเอง

2.3 การเชื่อมโยงมโนทัศน์ใหม่ไปประยุกต์ใช้กับความรู้อื่น ๆ ผู้วิจัยตั้งคำถาม/ปัญหาทางพีชคณิต เพื่อให้ผู้เรียนนำองค์ความรู้ที่ได้มาปรับใช้ประยุกต์ใช้กับความรู้อื่น ๆ หรือประยุกต์ใช้ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนมีความเข้าใจที่ความคงทนยิ่งขึ้น

ขั้นตอนที่ 3 ตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ประกอบด้วย

3.1 ให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติและนำเสนอวิธีการในการแก้ปัญหาของตนเองเพื่อตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน เพื่อพิจารณาว่าผู้เรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนคงเหลืออยู่เพียงใด

3.2 แนะนำมโนทัศน์ทางพีชคณิตใหม่ที่ถูกต้องเพื่อให้ผู้เรียนได้เกิดความเข้าใจในมโนทัศน์ทางพีชคณิตที่ถูกต้องต่อไป

พีชคณิตเชิงเส้น

พีชคณิต (Algebra) ถือว่าเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเหมือนเลขคณิต แต่จะใช้ตัวแปร คือตัวอักษรในภาษาอังกฤษ เช่น x, y หรือ Z แทนจำนวน ประโยคหรือข้อความทางพีชคณิต เรียกว่านิพจน์เชิงพีชคณิต (Algebra Expression) ซึ่งประกอบด้วย 3 สิ่งคือ จำนวน ตัวแปร และเครื่องหมายของการดำเนินการ เช่น

เครื่องหมาย $+, \times$ เป็นต้น ข้อความที่แสดงการเท่ากันของนิพจน์สองนิพจน์เรียกว่าสมการ เช่น $y+8=15, 5m=30, 8p-2=3p+8, t=3$ เป็นต้น ซึ่งการศึกษาวิธีการแก้สมการนี้น่าจะเป็นรากฐานของพีชคณิต หากนับย้อนกลับไป 2000 ปี ก่อนคริสตกาล เราจะพบว่าชาวบาบิโลนได้พัฒนาวิธีการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว (Quadratic Equations) เพื่อประโยชน์ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในการดำรงชีวิต ชาวอียิปต์ก็ใช้พีชคณิตช่วยในการแก้ปัญหาในการดำรงชีวิตเช่นเดียวกัน แต่ปัญหาไม่ได้ซับซ้อนมากมาย ต่อมาชาวฮินดูได้ใช้พีชคณิตช่วยในการคิดดอกเบี้ย ส่วนลด และการจัดสรรเป็นส่วน อย่างไรก็ตาม เราทุกคนเป็นหนี้บุญคุณปราชญ์มุสลิม ที่ช่วยแปลและเผยแพร่หลักการและงานค้นคว้าทางคณิตศาสตร์ของชาวฮินดูและชาวกรีกให้พวกเราได้ศึกษามาจนทุกวันนี้ ตลอดระยะศตวรรษที่ 15 และ 16 การศึกษาคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่มุ่งไปที่การแก้สมการที่มีความซับซ้อนมากขึ้นเรื่อย ๆ และจากการพัฒนาที่ค่อยเป็นค่อยไปอย่างต่อเนื่องของพีชคณิต จึงทำให้เกิดวิชาใหม่สาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่มีคุณค่า และเป็นประโยชน์ต่อวิชาการอื่น ๆ ทุกสาขาและทุกวงการ (สมทรง สุวพานิช. 2551: 1)

สาระสำคัญของเนื้อหาด้านพีชคณิตเชิงเส้น จะเป็นการศึกษาที่เกี่ยวกับเซตที่ประกอบด้วยการดำเนินการทวิภาคสองตัวพร้อมเงื่อนไขบางอย่างว่า ฟิลด์ เช่น ฟิลด์ของจำนวนจริง ฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน เป็นต้น การกล่าวถึงฟิลด์เพื่อใช้ในการจำกัดเอกภพสัมพัทธ์ของสมาชิกในเมทริกซ์ ต่อไปจะกล่าวถึงนิยามของฟิลด์ (สมเกียรติ ชัยพรเจริญศรี, 2547 : 1-2)

ฟิลด์

นิยาม 1. ฟิลด์ (Field) หมายถึงเซต F ที่ไม่เป็นเซตว่าง สมาชิกในฟิลด์เรียกว่าสเกลาร์ (Scalar) กับการดำเนินการทวิภาคสองตัว เขียนแทนด้วย + และ $\cdot$ (เรียกการบวกและการคูณ) โดยที่ ทุก $a,b,c \in F$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

(F1) $(a+b)+c=a+(b+c)$; $\forall a,b,c \in F$

(F2) $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$; $\forall a,b,c \in F$

(F3) $a+b=b+a$; $\forall a,b \in F$

(F4) $a \cdot b=b \cdot a$; $\forall a,b \in F$

(F5) มีสมาชิกเอกลักษณ์ $0 \in F$ ที่ $0+a=a$; $\forall a \in F$

(F6) มีสมาชิกเอกลักษณ์ $1 \in F$ ที่ $1 \cdot a=a$; $\forall a \in F$

(F7) แต่ละสมาชิก $a \in F$ มีสมาชิกผกผันภายใต้การบวก $-a \in F$ ที่ $a+(-a)=0$

(F8) แต่ละสมาชิกที่ไม่ใช่ศูนย์ $a \in F$ มีสมาชิกผกผันภายใต้การคูณ $a^{-1} \in F$ ที่ $aa^{-1}=1$

(F9) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$; $\forall a,b,c \in F$

(F10) $0 \neq 1$

เพื่อความสะดวกบางครั้งจะเขียนแทน $a \cdot b$ ด้วย ab โดยละเครื่องหมายการคูณ $\cdot$ ไว้

พีชคณิตของเมตริกซ์

ต่อไปจะกล่าวถึงพีชคณิตเมทริกซ์บนฟีลด์ใด ๆ F (สมเกียรติ ชัยพรเจริญศรี, 2547 : 6-7)

นิยาม 2 การเท่ากันของเมทริกซ์ เมทริกซ์ A และ B เท่ากัน ถ้า A และ B มีขนาดเท่ากันและสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน นั่นคือ A และ $B \in M_{m \times n}(F)$ และ $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$ ที่ $a_{ij}=b_{ij}$ สำหรับ $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

นิยาม 3 การบวกของเมทริกซ์ ให้ $A=\left[a_{ij}\right]$ และ $B=\left[b_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์ขนาดเดียวกัน จะได้ว่า $A+B$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการบวกกันของสมาชิก A และ B ในตำแหน่งเดียวกัน นั่นคือ $A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$

นิยาม 4 การคูณด้วยสเกลาร์ของเมทริกซ์ ให้ $A=\left[a_{ij}\right]$ และ $t \in F$ (สเกลาร์ t)จะได้ว่า tA เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณของทุกสมาชิกของ A ด้วย t นั่นคือ $tA=t\left[a_{ij}\right]=\left[ta_{ij}\right]$

นิยาม 5 สมาชิกผกผันภายใต้การบวกของเมทริกซ์ ให้ $A=\left[a_{ij}\right]$ จะได้ว่า -A เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการแทนแต่ละสมาชิกของ A ด้วยสมาชิกผกผันภายใต้การบวกของตัวเอง นั่นคือ $-A=-\left[a_{ij}\right]=\left[-a_{ij}\right]$

นิยาม 6 การลบของเมทริกซ์ ให้ $A=\left[a_{ij}\right]$ และ $B=\left[b_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์ขนาดเดียวกัน จะได้ว่า A-B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการลบกันของสมาชิก A และ B ในตำแหน่งเดียวกัน นั่นคือ $A-B=\left[a_{ij}\right]-\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}-b_{ij}\right]$

นิยาม 7 เมทริกซ์ศูนย์ ให้ $m,n \in Z^{+}$ เมทริกซ์ใน $M_{m \times n}(F)$ ที่ทุกสมาชิกเป็นศูนย์ (สมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้การบวกในฟีลด์ F) ทั้งหมดเรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์ (ขนาด $m \times n$) เขียนแทนด้วย $\overline{0}$

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

วิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นบนฟิลด์ใด ๆ ชื่อว่า ขั้นตอนวิธีของเกาส์จอร์แดน (Gauss-Jordan Algorithm) โดยจะเริ่มนิยามรูปแบบบางรูป ดังนี้ (สมเกียรติ ชัยพรเจริญศรี, 2547 : 70)

ขั้นตอนวิธีของเกาส์จอร์แดน

วิธีนี้เริ่มจากการแปลงเมทริกซ์แต่งเติม A ที่กำหนดให้ไปเป็น เมทริกซ์แต่งเติม B อยู่ในรูปขั้นบันไดตามแถวลดรูปโดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน จะได้ว่า A สมมูลตามแถวกับ B (โดยนิยามสมมูลตามแถว)

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี A เป็นเมทริกซ์แต่งเติมกับระบบสมการเชิงเส้นที่มี B จะเป็นเมทริกซ์แต่งเติมที่มีผลเฉลยเหมือนกัน

ขั้นตอนที่ 1

หาหลักแรกที่มีสมาชิกไม่เป็นศูนย์โดยพิจารณาจากซ้ายไปขวา (ให้เป็นหลัก c_1) และจากสมาชิกไม่เป็นศูนย์นั้น โดยการดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่หนึ่ง (ถ้าจำเป็นต้องใช้) สลับแถวให้มาเป็นแถวที่หนึ่ง (ให้เป็น a_{1c_1}) จากนั้นเปลี่ยนสมาชิก a_{1c_1} ให้เป็น 1 โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สอง (นำสมาชิกผกผันภายใต้การคูณของ a_{1c_1} มาคูณ) และสำหรับสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ $a_{1c_1}, i>1$ (ถ้ามี) ในหลักที่ c_1 นำ $-a_{ic_1}$ คูณแถวที่ 1 แล้วบวกกับแถวที่ i ทำให้สมาชิกอื่นในแถวที่ i หลักที่ c_1 เป็นศูนย์ (ใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สาม)

ขั้นตอนที่ 2

ถ้าเมทริกซ์ที่เกิดขึ้นในขั้นตอนที่ 1 มีแถวที่สอง แถวที่สาม ... แถวที่ m เป็นศูนย์ทั้งหมด ดังนั้นเมทริกซ์ที่ได้อยู่ในรูปขั้นบันไดตามแถวลดรูป ในทางตรงกันข้ามสมมติหลักแรกที่มีสมาชิกไม่เป็นศูนย์เป็นแถวที่อยู่ต่ำกว่าแถวที่หนึ่ง (ให้เป็นหลัก c_2) ดังนั้น $c_1<c_2$ โดยการดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่หนึ่ง (ถ้าจำเป็นต้องใช้) สลับแถวให้มาเป็นแถวที่สอง (ให้เป็น a_{2c_2}) จากนั้นเปลี่ยนสมาชิก a_{2c_2} ให้เป็น 1 โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สอง (นำสมาชิกผกผันภายใต้การคูณของ a_{2c_2} มาคูณ) และสำหรับสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ $a_{ic_2}, i>2$ (ถ้ามี) ในหลักที่ c_2 นำ $-a_{ic_2}$ คูณแถวที่ 2 แล้วบวกกับแถวที่ i ทำให้สมาชิกอื่นในแถวที่ i หลัก ที่ c_2 เป็นศูนย์

ด้วยกระบวนการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ หลังจาก r ครั้ง จนได้เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปขั้นบันไดตามแถวลดรูป ดังนั้น มี r แถวที่ไม่เป็นศูนย์ที่มีตัวนำหน้าเป็น 1 อยู่ในหลักที่ $c_1, \ldots, c_r$ ตามลำดับ

บทแทรก 1 ถ้า $\det A \neq 0$ แล้ว A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$ (สมเกียรติ ชัยพรเจริญศรี, 2547 : 142)

พิสูจน์ เนื่องจากสเกลาร์ $\det A \neq 0$ โดยนิยามของฟิลด์ (F8) ดังนั้นมี $\frac{1}{\det A}$ นำ $\frac{1}{\det A}$ คูณทางซ้ายทั้งสองข้างของสมการ

$$\frac{1}{\det A}((\operatorname{adj} A)A) = \frac{1}{\det A}((\det A)I_n)$$

โดยการจัดรูปใหม่ ได้ว่า

$$\left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A\right)A = I_n$$

โดยนิยามของเมทริกซ์ไม่เอกฐาน จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$$

หมายเหตุ จากบทแทรก 3.2.2 สามารถหาเมทริกซ์ผกผันของ A โดยใช้เมทริกซ์ผูกพันกับตัวกำหนดของ A

ปริภูมิย่อยของ F^n

ในบทนี้ จะศึกษาเซต F^n หมายถึงเซตของเวกเตอร์หลักขนาด n บนฟิลด์ F

$$F^n = \left\{[a_1 \ \ a_2 \ \ldots \ a_n]^T \middle| a_i \in F\right\}$$

เนื่องจากสมาชิกของ F^n เป็นเวกเตอร์หลัก บางครั้งเพื่อความสะดวกจะเรียกสมาชิกของ F^n ว่าเวกเตอร์

จะศึกษาเซตย่อยที่สำคัญกลุ่มหนึ่งของ F^n เรียกว่า ปริภูมิย่อย ของ F^n โดยแนะนำสมบัติแผ่ทั่วอิสระเชิงเส้นเพื่อนำไปนิยามฐานหลักและมิติของปริภูมิย่อยต่อไป (สมเกียรติ ชัยพรเจริญศรี, 2547 : 181)

1. นิยามและตัวอย่าง

นิยาม 8 เซตย่อย S ของ F^n เรียกว่า ปริภูมิย่อย (Subspace) ของ F^n ถ้ามีสมบัติต่อไปนี้

(S1) เวกเตอร์ศูนย์อยู่ใน S นั่นคือ $\bar{0} \in S$

(S2) ถ้า $X \in S$ และ $Y \in S$ แล้ว $X+Y \in S$ (สมบัติปิดภายใต้การบวก)

(S3) ถ้า $X \in S$ และ $t \in F$ แล้ว $tX \in S$ (สมบัติปิดภายใต้การคูณด้วยสเกลาร์)

2. อิสระเชิงเส้น (สมเกียรติ ชัยพรเจริญศรี, 2547 : 191)

ถ้า $V=\text{span}\{X_1,X_2,...,X_k\}$ แล้ว แต่ละเวกเตอร์ใน V สามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $X_1,X_2,...,X_k$ อย่างน้อยหนึ่งรูปแบบ เช่น $V=\text{span}\{X_1,X_2\}$ เมื่อ

$$X_1=[1 \quad 2]^T \text{ และ } X_2=[3 \quad 6]^T$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}[-1 \ \ -2]^T &= (-1)X_1+0X_2 \\ &= (-4)X_1+X_2 \\ &= 0X_1-\frac{1}{3}X_2\end{aligned}$$

ถ้าต้องการเขียนสมาชิกในเซตแผ่ทั่วเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น ต้องอาศัยเงื่อนไขบางอย่าง ดังนี้

สมมติสองผลรวมเชิงเส้นของ $X_1,X_2,...,X_k$ เท่ากัน

$t_1X_1+t_2X_2+...+t_kX_k=s_1X_1+s_2X_2+...+s_kX_k$

การที่สองผลรวมเชิงเส้นเท่ากันนี้จะเป็นการเขียนรูปแบบเดียวกัน นั่นคือ $t_i=s_i$; $\forall i$ ถ้านำ $-s_iX_i$; $i=1,2,...,k$ มาบวกทั้งสองข้างได้ว่า

$$(t_1-s_1)X_1+(t_2-s_2)X_2+...+(t_k-s_k)X_k=\bar{0}$$

ดังนั้นเงื่อนไขที่ต้องการ (มีการเขียนผลรวมเชิงเส้นเพียงแบบเดียวเท่านั้น) คือ $t_i-s_i=0$

จากที่กล่าวมานี้ สามารถอธิบายเงื่อนไขในเซตแผ่ทั่วของเวกเตอร์ที่ทำให้เขียนผลรวมเชิงเส้นเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น ดังนี้

นิยาม 9 เซต $\{X_1,X_2,...,X_k\}$ จะเรียกว่า เซตอิสระเชิงเส้น (Linearly Independent Set) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไข

ถ้า $t_1X_1+t_2X_2+...+t_kX_k=\bar{0}$ แล้ว $t_1=t_2=...=t_k=0$ แต่ถ้า $t_1X_1+t_2X_2+...+t_kX_k=\bar{0}$ และมีบาง $t_j \neq 0$ แล้ว เรียก $\{X_1,X_2,...,X_k\}$ ว่า เซตไม่อิสระเชิงเส้น (Linearly Dependent Set)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นสมบัติสำคัญของเซตอิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 1 ถ้า $\{X_1,X_2,...,X_k\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นแล้ว แต่ละสมาชิก X ใน $\text{span}\{X_1,X_2,...,X_k\}$ มีการเขียนรูปผลรวมเชิงเส้นของ $X_1,X_2,...,X_k$ เพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น

สรุป เนื้อหาในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นที่ใช้เพื่อพัฒนากลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ประกอบด้วย พีชคณิตของเมตริกซ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น และปริภูมิย่อยของ F^n ซึ่งเนื้อหาดังกล่าวเป็นเนื้อหาที่มีประโยชน์และมีความสำคัญมากทั้งในวิชาคณิตศาสตร์และในวิชาอื่น ๆ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยในประเทศ

อัมพร ม้าคนอง (2536 : 64) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5/3 จำนวน 21 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน แบบฝึกหัดประจำบท โจทย์ประยุกต์และแบบทดสอบย่อยประจำบทผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีข้อผิดพลาดด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติ ด้านการคิดคำนวณ ด้านตีความจากโจทย์ ตามลำดับ

พลกฤษณ์ เทศสิงห์ (2554 : 100-101) ทำการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก ลบ เศษส่วน ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนจันทรุเบกษาอนุสรณ์ จังหวัดร้อยเอ็ด ปีการศึกษา 2553 จำนวน 2 ห้องเรียน จำนวนนักศึกษา 90 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบทดสอบอัตนัย และแบบสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้าง วิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีพรรณนาวิเคราะห์ ผลการวิจัย พบว่าแบบรูปของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนมี 1 แบบรูป คือ การบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยามและสมบัติ แบบรูปของข้อผิดพลาดมี 2 แบบรูป คือ ผิดพลาดในเทคนิคการทำ และขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ ขาดความเข้าใจในความหมายและหลักการในเรื่องการบวก ลบ เศษส่วน สาเหตุของการเกิดข้อผิดพลาด คือ ขาดความรอบคอบในการคิดคำนวณ ขาดการไตร่ตรองและขาดการรอบคอบในการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา แนวทางการแก้ไขการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

คือ จัดกิจกรรมการสอนซ่อมเสริมการฝึกทักษะด้วยนวัตกรรม ด้วยการเสริมแรง แนวทางการแก้ไขการเกิดข้อผิดพลาด คือ การสร้างความตระหนัก และการฝึกทักษะ

สุกัญญา สีสมบา (2554 : 97-98) ได้ทำการวิจัยเพื่อวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนศรีสมเด็จพิมพ์พัฒนาวิทยา จังหวัดร้อยเอ็ด ปีการศึกษา 2553 จำนวน 2 ห้องเรียน จำนวนนักศึกษา 87 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบทดสอบอัตนัย และแบบสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้าง วิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีพรรณนาวิเคราะห์ ผลการวิจัยพบว่าแบบรูปของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนมี 2 แบบรูป คือ การตีความด้านภาษา และด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ แบบรูปของข้อผิดพลาดมี 2 แบบรูป คือ ขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา และผิดพลาดในเทคนิคการทำ สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ได้แก่ ความคลาดเคลื่อนในมโนทัศน์ เรื่องอสมการ ความคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการใช้สมบัติของความเท่ากันของการบวก ลบ คูณ หาร และขาดทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา สาเหตุของการเกิดข้อผิดพลาด ได้แก่ ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ ขาดความรอบคอบในการตรวจสอบคำตอบ แนวทางการแก้ไขการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ การสอนซ่อมเสริมเกี่ยวกับการแก้อสมการ โดยการใช้เอกสารแนะแนวทางเป็นบทเรียนการ์ตูน บทเรียนแบบโปรแกรม ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล เพื่อสร้างความเข้าใจและหลักการแก้สมการ และการเสริมแรง แนวทางการแก้ไขการเกิดข้อผิดพลาด คือ การสร้างความตระหนัก ฝึกฝนและทบทวนด้วยตนเองสม่ำเสมอ ฝึกฝนการทำงานให้เป็นระบบ มีระเบียบวินัย รอบคอบ มีวิจารณญาณ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

อุไรวรรณ ศรีไชยมูล (2554 : 109-110) ได้ทำการวิจัยเพื่อวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนศรีสมเด็จพิมพ์พัฒนาวิทยา จังหวัดร้อยเอ็ด ปีการศึกษา 2553 จำนวน 2 ห้องเรียน จำนวนนักศึกษา 87 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบทดสอบอัตนัย และแบบสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้าง วิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีพรรณนาวิเคราะห์ ผลการวิจัย พบว่าแบบรูปของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนมี 1 แบบรูป คือ การตีความด้านภาษา และการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ แบบรูปของข้อผิดพลาดมี 2 แบบรูป คือ ผิดพลาดใน

เทคนิคการทำ และขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ ขาดทักษะการอ่านแปลความ ขาดทักษะในกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา ขาดทักษะในหลักการแก้สมการ และขาดความเข้าใจมโนทัศน์ เรื่องอัตราส่วน การเปรียบเทียบอัตราส่วนของปริมาณสองปริมาณ การทำปริมาณร่วมให้เท่ากัน สาเหตุของการเกิดข้อผิดพลาด คือ ขาดความรอบคอบ ขาดการไตร่ตรองและขาดการรอบคอบในการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา แนวทางการแก้ไขการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ สอนซ่อมเสริม การฝึกทักษะด้วยนวัตกรรม ด้วยการเสริมแรง แนวทางการแก้ไขการเกิดข้อผิดพลาด คือ การสร้างความตระหนัก และการฝึกทักษะ

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องในประเทศ พบว่า การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เป็นการศึกษาความคลาดเคลื่อนทางมโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยม การวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ ศึกษาแบบรูปของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด ศึกษาสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด และศึกษาหาแนวทางแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด ซึ่งการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์นั้น มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนมักเกิดจากความคลาดเคลื่อนด้านสัญลักษณ์ วิธีถามคำถาม การตีความ ภาษาเขียน การใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติที่คลาดเคลื่อน การที่นักเรียนมองไม่เห็นภาพ ทำให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ แต่ไม่มีงานวิจัยใดที่ศึกษาเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต และยังไม่มีงานวิจัยที่ศึกษาการพัฒนากรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต และพัฒนากลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

งานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์

ราดาร์ส (Radatz. 1979 : 163-172) ได้ศึกษาการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนในคณิตศาสตรศึกษา โดยแบ่งความคลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ออกเป็น

1. ด้านภาษา ภาษาทางคณิตศาสตร์เป็นภาษาสากล สำหรับนักเรียนที่ต้องรู้และเข้าใจแนวคิด สัญลักษณ์และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ความเข้าใจผิดเกี่ยวกับความหมายของภาษาทางคณิตศาสตร์ อาจก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนที่จุดเริ่มต้นของการแก้ปัญหา

2. ด้านการประมวลผลแทนสัญลักษณ์และการนำเสนอความรู้ทางคณิตศาสตร์

3. ความบกพร่องในทักษะที่จำเป็น ข้อเท็จจริงและแนวคิด เช่น นักเรียนอาจลืมหรือไม่สามารถจดจำข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาได้

4. การถ่ายโยงการเรียนรู้ทางลบที่เกิดจากการถอดรหัสและเข้ารหัสข้อมูล

5. การประยุกต์ใช้กฎหรือกลยุทธ์ที่ไม่เกี่ยวข้อง

บราวน์ และฮาร์ท (Brown and Hart. 1981 : 102– 119) ได้ศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนชาวอังกฤษที่มีอายุ 11-16 ปี พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีความเชื่อว่า "การคูณจะทำให้ผลลัพธ์เพิ่มขึ้นเสมอ" "การลบจะทำให้ผลลัพธ์มีค่าน้อยลง" และ "ตัวหารจะต้องน้อยกว่าตัวตั้งเสมอ"

เกอเกย์ (Gourgey. 1984 : 3-56) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์และอัตมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์กับความวิตกกังวลทางคณิตศาสตร์และวิธีการทางสถิติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนผู้ใหญ่จำนวน 92 คน เป็นชาย 16 คน และหญิง 76 คน มีอายุอยู่ระหว่าง 18-57 ปี โดยมีมัธยฐานของอายุเท่ากับ 27 ผลการศึกษาพบว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์และอัตมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สัมพันธ์กับความวิตกกังวลทางคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นอกจากนี้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ อัตมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และทักษะทางเลขคณิตมีความสัมพันธ์กับวิธีการทางสถิติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ โดยนักเรียนที่มีอายุมากและออกจากโรงเรียนไปเป็นเวลานานหลายปี แล้วกลับเข้ามาเรียนใหม่อีกครั้งหนึ่งจะมีทัศนคติในทางลบต่อวิชาคณิตศาสตร์มากที่สุด

โบราสิ (Borasi. 1985 : 1-14) ได้ศึกษาการใช้ความคลาดเคลื่อนเป็นจุดเริ่มของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และได้สรุปความคลาดเคลื่อน ไว้ดังนี้

1. นักศึกษาไม่เคยรู้วิธีการแก้ปัญหา
2. นักศึกษาขาดทักษะที่จำเป็นในการเรียนรู้ เช่น ข้อเท็จจริง และ / หรือแนวความคิด
3. ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความสัมพันธ์ที่ไม่ถูกต้องหรือการยึดมั่นในความคิดของตนเอง
4. ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการประยุกต์ใช้กฎหรือยุทธวิธีที่ไม่เกี่ยวข้อง
5. ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องมาจากปัญหาด้านภาษา
6. นักศึกษาอาจต้องใช้เวลามากขึ้นเพื่อให้การแก้ปัญหาเสร็จสมบูรณ์
7. ความคลาดเคลื่อนในวิชาพีชคณิต
8. ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องมาถึงทางตัน (นักศึกษาคิดไม่ออก)
9. มีข้อมูลที่ขาดหาย
10. ไม่มีความพยายามที่จะแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น

นีลและเคมรอล (Neal and Cameron. 1986 : 3346-A) ศึกษาความคลาดเคลื่อนที่พบบ่อย ๆ เพื่อใช้ต่อต้านมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิทยาลัยชุมชน โดยศึกษาเรื่องการแก้สมการเชิงเส้น ซึ่งกลุ่มตัวอย่างแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองจะสอนโดยการเน้นและอธิบายเกี่ยวกับรูปแบบของความคลาดเคลื่อนที่มักจะพบบ่อย ๆ ส่วนกลุ่มควบคุมสอนตามปกติ ก่อนทำการทดลองจะมีการทดสอบก่อนเรียนและหลังจากสอนจบแล้วจะมีการทดสอบหลังเรียนครั้งที่ 1 และการทดสอบหลังเรียนครั้งที่ 2 ซึ่งในการทดสอบหลังเรียนครั้งที่ 2 นี้จะดำเนินการภายหลังจากการทดสอบหลังเรียนครั้งที่ 1 ผ่านไปแล้ว 2 สัปดาห์ ผลการศึกษาพบว่าไม่มีปฏิกิริยาร่วมระหว่างความสามารถก่อนเรียนกับการแก้สมการเชิงเส้น และผลจากการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมปรากฏว่าคะแนนจากการทดสอบหลังเรียนครั้งที่ 2 ของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ส่วนคะแนนผลการทดสอบหลังเรียนครั้งที่ 1 ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกัน

ทรูแรน (Truran. 1987 : 92) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนและเทคนิคการสอนเพื่อแก้ไขความคลาดเคลื่อนนั้นในการหาสาเหตุที่ผิดและแบ่งระดับความผิดพลาดที่นักเรียนทำไว้ 9 ด้านคือ

1. รูปแบบของคำถาม
2. การอ่านคำถาม
3. ความเข้าใจในคำถาม
4. กลยุทธ์ในการเลือกใช้ความรู้
5. ทักษะการเลือกใช้ความรู้
6. ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้
7. การเสนอคำตอบ
8. ความคลาดเคลื่อนซึ่งไม่สามารถระบุสาเหตุที่แน่นอนได้ เนื่องจากขาดความระมัดระวัง
9. ความคลาดเคลื่อนซึ่งครูจะทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน

โมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ (Movshovitz-Hadar et al. 1987 : 3-14) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การวิเคราะห์รูปแบบความคลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา" ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 11 จำนวน 110 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ ลักษณะความคลาดเคลื่อนจำนวน 6 ด้าน และแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีข้อบกพร่องตามลักษณะข้อบกพร่อง เรียงตามลำดับความถี่จากมาก

ไปหาน้อยในด้านต่าง ๆ ต่อไปนี้ คือการบิดเบือนทฤษฎี กฎ สูตร และนิยาม การใช้เทคนิคในการทำผิด การใช้ข้อมูลผิด ข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา การอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์และไม่มีการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของโมว์โชวิทซ์ และคณะ ที่มีทั้งหมด 6 ด้าน ดังนี้

1. ด้านการใช้ข้อมูลผิด (Misused Data) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้

    1.1 ละเลยการใช้ข้อมูลที่จำเป็นในขั้นตอนการแก้ปัญหา

    1.2 ทำผิดคำสั่งโดยหาคำตอบในสิ่งที่ไม่ต้องการ

    1.3 คัดลอกโจทย์ผิด

2. ด้านการตีความด้านภาษา (Misinterpreted Language) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ ตีความจากประโยคภาษามาเป็นประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง

3. ด้านการอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ (Logically Invalid Inference)

4. ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ (Distorted Theorem or Definition) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้

    4.1 ขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ

    4.2 จำทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติผิด

5. ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified Solution) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้

    5.1. ขั้นตอนถูกต้อง แต่คำตอบผิดจากที่โจทย์กำหนด หรือคำตอบไม่เป็นผลสำเร็จ

    5.2 ขั้นตอนผิด แต่คำตอบถูก

6. ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ (Technical Error) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ

สิริพร ทิพย์คง (Siriporn. 1989 : 71-75) ได้ศึกษาความคลาดเคลื่อนทางมโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมของนักศึกษาครูสาขาประถมศึกษา มหาวิทยาลัยจอร์เจีย ผลการวิจัยพบว่า คะแนนมโนทัศน์และคะแนนการแก้ปัญหามีความสัมพันธ์กันในทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ความคลาดเคลื่อนทางมโนทัศน์ที่พบมากที่สุด ได้แก่ การทิ้งตัวเลขศูนย์ในตำแหน่งหลักส่วนสิบ นอกจากนี้พบว่าโจทย์ปัญหาชั้นเดียวง่ายกว่าโจทย์ปัญหาสองชั้น โจทย์เกี่ยวกับเงินตรานั้นง่ายที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับโจทย์ที่เกี่ยวกับเวลาและการวัด ทศนิยมที่มีค่ามากกว่าหนึ่งง่ายกว่าทศนิยมที่มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง

บาร์นาร์ด (Barnard. 1989 : 3-20) ศึกษาเรื่องรูปแบบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจำนวน 4,635 คน จากทั้งหมด 106 โรงเรียน ในแอฟริกาใต้ เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบวินิจฉัย ผลการศึกษาพบว่านักเรียนขาดความรู้และความเข้าใจในมโนทัศน์ทางพีชคณิตและกระบวนการ หลาย ๆ ครั้ง พบว่านักเรียนสามารถหาคำตอบได้แต่ไม่เข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์และหลักการพื้นฐานที่จำเป็น ไม่เข้าใจขั้นตอนวิธีที่ถูกต้อง และไม่มีความรู้เกี่ยวกับสัญลักษณ์ที่ใช้ทางคณิตศาสตร์

เมสทรี (Mestre. 1989 : 3-11) ศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนลาตินอเมริกาและนักศึกษาผิวขาว ผลการศึกษาพบว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนลาตินอเมริกานั้นรูปแบบของความผิดพลาดเป็นผลมาจากความแตกต่างทางภาษาและวัฒนธรรม เช่น จากข้อความ “จำนวนนักศึกษาในมหาวิทยาลัย” นักศึกษามักจะเปลี่ยนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้ “6S=6P” หรือ “6S+P=T”

โดยที่ T แทน ผลรวมของนักเรียนและอาจารย์

S แทน นักเรียน

P แทน อาจารย์

นอกจากนี้ยังพบอีกว่า รูปแบบของความผิดพลาดของนักเรียนลาตินอเมริกากับนักเรียนผิวขาวมีลักษณะเหมือนกัน เพียงแต่นักเรียนลาตินอเมริกาจะมีความถี่ในการผิดพลาดมากกว่านักเรียนผิวขาว

โคลแกน (Colgan. 1991 : 91-A) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนในการแก้ปัญหาโจทย์ในวิชา Finite Mathematics ของนักเรียนระดับวิทยาลัย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนในมหาวิทยาลัยอินเดียนา จำนวน 250 คน โดยศึกษาจากการทดสอบย่อย การสอบและจากแบบทดสอบวัดทักษะทางคณิตศาสตร์ พบว่าความคลาดเคลื่อนของนักเรียนนั้นอธิบายได้โดยใช้การแจกแจงลักษณะความคลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทย์-ฮาดาร์ ซาสลาฟสกี้ และอินบาร์ (Movshovitz-Hadar; Zaslavky; and Inbar. 1987 : 18) ความคลาดเคลื่อนที่ได้เรียงจากมากไปน้อยได้แก่ ความคลาดเคลื่อนด้านการใช้ภาษา การขาดความรับผิดชอบ และเทคนิควิธีการในทุกระดับคะแนน นักศึกษามีเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนแต่ละวิชาเท่า ๆ กัน และมีนักศึกษาบางส่วนมีความคลาดเคลื่อนด้านทักษะการคิดคำนวณ และบางส่วนมีความคลาดเคลื่อนด้านทักษะการแก้ปัญหาได้สรุปความคลาดเคลื่อน ไว้ดังนี้

1. ไม่มีคำตอบ

2. ความคลาดเคลื่อนจากข้อมูล เช่น ความคลาดเคลื่อนจากการคัดลอก

3. ความคลาดเคลื่อนจากภาษา

4. ความคลาดเคลื่อนจากตรรกะ (Logic)

5. คลาดเคลื่อนจากนิยาม ทฤษฎีบทหรือกฎ

6. วิธีการแก้ปัญหาที่ไม่สมบูรณ์

7. ความคลาดเคลื่อนทางเทคนิค (เช่นขาดทักษะพื้นฐานในการคำนวณ)

8. การขาดความรู้

จากการศึกษางานวิจัยต่างประเทศเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ พบว่า มีการศึกษาการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนในคณิตศาสตรศึกษา ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์และอัตมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์กับความวิตกกังวลทางคณิตศาสตร์และวิธีการทางสถิติ ศึกษาการใช้ความคลาดเคลื่อนเป็นจุดเริ่มของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนและเทคนิคการสอนเพื่อแก้ไขความคลาดเคลื่อน และการวิเคราะห์รูปแบบความคลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา จากการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์นั้น มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอาจมีสาเหตุ จากการที่นักเรียนไม่เข้าใจ ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ ลำดับขั้นตอนการใช้กฎในการคิดคำนวณ การใช้ภาษาในการถามคำถามของครู การตีความสัญลักษณ์การนำเสนอความรู้ทางคณิตศาสตร์ การตรวจสอบคำตอบและการมองเห็นความสัมพันธ์

งานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

เฮอร์สโควิคส์และคีแรน (Herscovics and Kieran. 1980 : 572-580) ได้ศึกษาการสร้างอย่างมีความหมายสำหรับแนวคิดของสมการ ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่า นักเรียนมีความเชื่อเกี่ยวกับค่าของตัวแปรที่ไม่ถูกต้อง แอสควิธ และคณะ (Asquith et al. 2007 : 249-272) ตัวอย่างเช่น นักเรียนมีความเชื่อเกี่ยวกับการคำนวณอักขระวิธี (Alphabet) ที่ไม่ถูกต้อง (คำนวณโดยไม่ได้ใช้ตัวเลขแต่ใช้การคำนวณอักขระวิธี (Alphabet) ซึ่งนิยมใช้กันเป็นเวลานานสำหรับนักวิชาการชาวอาหรับและมุสลิมเรียกกันว่า อักขระอัลอับญะดียะฮฺ ซึ่งแต่ละอักขระนั้นมีค่าทางคณิตศาสตร์ เช่น อะลีฟ = 1, บาอฺ = 2, ญีม = 3, ด้าล = 4, ฮาอฺ = 5, วาว = 6, ซัยย์ = 7, หาฮฺ = 8, ตออฺ = 9, ยาอฺ = 10 เป็นต้น)

วินเนอร์และคณะ (Vinner et al. 1981 : 555-570) ได้ศึกษาปัจจัยบางปัจจัยด้านพุทธพิสัยที่เป็นสาเหตุของความผิดพลาดในการบวกเศษส่วน และได้จัดหมวดหมู่ความคลาดเคลื่อนที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาการบวกเศษส่วน ดังต่อไปนี้

1. การเสนอรายละเอียดที่ผิด : ลืมบางส่วน
2. การวินิจฉัย : การใช้ขั้นตอนวิธีการที่ไม่เหมาะสมกับสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกัน
3. การเลือกประเภทของแนวเทียบ (Analogy) ที่ผิด การวางนัยทั่วไปที่ไม่เหมาะสม
4. การตีความสัญลักษณ์ผิด
5. ความล้มเหลวในการใช้ความรู้ที่มีอยู่ตรวจสอบผลลัพธ์ในเนื้อหาใหม่

คลีเมนต์ (Clement. 1982 : 16-30) ได้ศึกษาการแก้ปัญหาพีชคณิต : กระบวนการคิดพื้นฐานเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการกำหนดค่าตัวแปร

วอร์แมน (Wollman. 1983 : 169-181) ได้ศึกษาการกำหนดแหล่งที่มาของความคลาดเคลื่อนในการแปลจากประโยคไปสู่สมการ ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสมการพีชคณิต พบว่า นักเรียนไม่ตรวจสอบวิธีการแก้ปัญหา

เบลและคณะ (Bell et al. 1984 : 140) ได้ศึกษาวิจัยเรื่องทางเลือกของการดำเนินการในปัญหาเลขคณิต : ผลของจำนวนขนาดปัญหาโครงสร้างและบริบท พบว่า นักเรียนชาวอังกฤษที่มีอายุ 11-16 มีส่วนมากคิดว่า 1.07 ปอนด์คือ 1 ปอนด์ 7 ปอนด์ และความเร็ว 11.6 ไมล์ต่อชั่วโมงคือ ความเร็ว 11 ไมล์ และ 9 นาทีต่อชั่วโมง และนักเรียนส่วนมากคิดว่า 0.8 คือเศษหนึ่งส่วนแปด นอกจากนี้ได้ศึกษานักเรียนชาวอังกฤษที่มีอายุ 12 ปี เกี่ยวกับการแก้ปัญหาโจทย์ทศนิยม ตัวอย่างคำถาม เช่น น้ำมันราคาแกลลอนละ 1.33 ปอนด์ ถ้าต้องการเติมน้ำมันเพียง 0.53 แกลลอนจะต้องจ่ายเงินเท่าไร นักเรียนส่วนมากตอบว่าจะต้องจ่ายเงินเพียง 1.33+0.53 ซึ่งเท่ากับ 2.51 ปอนด์

ฟิชเบนและคณะ (Fischbein et al. 1985 : 12) ได้ศึกษาบทบาทของตัวแบบในคูณและการหาร พบว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ชาวอิตาลี คิดว่าการคูณที่มีตัวคูณเป็นทศนิยมนั้นยากและทศนิยมที่นักเรียนไม่คุ้นเคย เช่น 0.65 นั้นยากกว่าทศนิยมที่นักเรียนคุ้นเคย เช่น 0.75

บูธ (Booth. 1986 : 2-4) ได้ศึกษาความยากลำบากในพีชคณิต ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับลำดับของการคำนวณสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร และสมการทางพีชคณิต ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับลำดับของการคำนวณ สัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่า นักเรียนไม่สามารถที่จะลดความซับซ้อนได้อย่างถูกต้องเพราะนักเรียนไม่เข้าใจแนวคิดของพจน์ นักเรียนมีความเชื่อว่าคำตอบไม่เป็นจำนวน

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสมการทางพีชคณิต พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการนำเสนอสัญลักษณ์แทนสถานการณ์

เคอร์สเลค (Kerslake. 1986 : 164-174) ได้ศึกษาเศษส่วน : กลยุทธ์ของเด็กนักเรียนและความคลาดเคลื่อน ได้กล่าวถึงความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับเศษส่วนว่า เด็กอายุประมาณ 13 – 14 ปี ใช้การท่องจำเทคนิคต่าง ๆ ที่เคยเรียนในการดำเนินการเกี่ยวกับเศษส่วน โดยเชื่อว่าเป็นผลจาก “ความรู้เรื่องเศษส่วนที่เด็กมีอยู่นั้น ไม่ใช่ความรู้ที่สร้างขึ้นจากสิ่งแวดล้อมที่เป็นของจริง และในการนิยามการดำเนินการเกี่ยวกับเศษส่วนมีความเป็นนามธรรม” ความเป็นนามธรรมและนักเรียนไม่สามารถมองเห็นภาพจริงเกี่ยวกับเศษส่วนนี้ทำให้นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเศษส่วน ซึ่งส่วนใหญ่แล้วจะเกี่ยวกับการดำเนินการทางพีชคณิต (เช่น การบวก การลบ การคูณและการหาร) และเกี่ยวกับเศษส่วนที่เท่ากัน

ชัยและเอง (Chai and Ang. 1987 : 189-198) ได้ทำการศึกษาความคลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนในสิงคโปร์ เนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิตและสมการ โดยทำการศึกษากับกลุ่มนักเรียนระดับมัธยมศึกษา (อายุ 12 ปี) จำนวน 100 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบสอบวินิจฉัยความคลาดเคลื่อนรูปแบบของเซลเซีย ซึ่งสร้างโดยปรับปรุงจากแบบสอบถามของโครงการในประเทศอังกฤษ ซึ่งมีชื่อว่ามโนทัศน์ของวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (CSMS) และโครงการที่มีชื่อว่า กลวิธีและความคลาดเคลื่อนของวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (SESM) และทดสอบนักเรียนโดยการสัมภาษณ์ นำผลการสอบทั้งสองอย่างของนักเรียนแต่ละคนมาพิจารณาหาความคลาดเคลื่อนในวิธีการ 6 อย่าง คือ การประเมินตัวอักษร ตัวอักษรที่ไม่มีประโยชน์ ตัวอักษรที่ใช้แทนสิ่งของ ตัวอักษรที่ไม่ทราบความหมาย ตัวอักษรที่ใช้แทนตัวเลขและตัวแปร ผลที่พบคือ นักเรียนใช้กลวิธีของตนเองจะล้มเหลวถ้าพบปัญหาที่ยาก นอกจากนี้ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นกับนักเรียนส่วนใหญ่ก็เนื่องมาจาก การตีความหมายที่ผิด

จากการอ่านโจทย์ ความคิดที่ผิดในการตีความหมายของตัวอักษร และจากการสัมภาษณ์ทำให้พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนหรือให้ความหมายที่ผิดในการใช้วงเล็บ

ออง และลิม (Ong and Lim. 1987 : 199-205) ได้ทำการศึกษาเรื่องความเข้าใจและความคลาดเคลื่อนในวิชาพีชคณิต โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อสำรวจผลการสอนเกี่ยวกับความเข้าใจในวิชาพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในสิงคโปร์ กลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนระดับมัธยมศึกษาที่มีอายุระหว่าง 15-16 ปี จำนวน 3 กลุ่ม เป็นนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 365 คน นักเรียนระดับอุดมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 339 คน และนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัยจำนวน 267 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบสอบถามพีชคณิต ผู้วิจัยดัดแปลงมาจากของอีวานส์ (Evans) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนจำนวนมากอายุระหว่าง 15-16 ปี ไม่สามารถแก้ปัญหาพีชคณิตง่าย ๆ ได้ และสาเหตุความคลาดเคลื่อนส่วนใหญ่เนื่องจากนักเรียนไม่เข้าใจในการใช้ตัวอักษรแทนตัวแปรหรือค่าคงที่ นักเรียนใช้การแทนค่าจำนวนในสมการ โดยไม่พิจารณากรณีที่เป็นไปไม่ได้

ฮอฟเฟอร์ (Hoffer. 1988 : 285-313) ได้ศึกษา การคิดเชิงอัตราส่วนและการคิดเชิงสัดส่วน และพบความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับอัตราส่วนและสัดส่วน ดังนี้

1. นักเรียนมีปัญหาในการมองความสัมพันธ์ของอัตราส่วน

1.1 นักเรียนไม่สามารถมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างส่วนย่อย (Part) ซึ่งอาจจะมีเพียงสองส่วนย่อยหรือมากกว่าก็ได้ กับส่วนย่อย (Part)

1.2 นักเรียนไม่สามารถมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างส่วนย่อย (Part) ซึ่งอาจจะมีเพียงสองส่วนย่อยหรือมากกว่าก็ได้ กับส่วนทั้งหมดหรือส่วนรวม (Whole)

1.3 นักเรียนไม่สามารถมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างส่วนทั้งหมดหรือส่วนรวม (Whole) กับส่วนย่อย (Part)

2. นักเรียนมีปัญหาในการเขียนอัตราส่วนที่แตกต่างกัน

3. นักเรียนมีปัญหาในการทำให้เป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ

4. นักเรียนมีปัญหาในการรวมอัตราส่วนสองอัตราส่วน (นักเรียนสับสนเช่นเดียวกับการรวมเศษส่วนสองเศษส่วน)

ยูซิสคิน (Usiskin. 1988 : 8-19) ได้ศึกษามโนทัศน์ของการเรียนพีชคณิตและการใช้ตัวแปร ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษรและฟังก์ชัน ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการกำหนดค่าตัวแปร และไม่เข้าใจเรื่องตัวแปรเชิงปริมาณและเรื่องค่าสูญหายฟังก์ชัน

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน พบว่า นักเรียนไม่เข้าใจเกี่ยวกับตัวแปรและมีปัญหาในการทำความเข้าใจรูปแบบทางพีชคณิต

ล็อกฮีดและเมสทรี (Lockhead and Mestre. 1988 : 127-135) ได้ศึกษาจากคำทางพีชคณิต : การแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสมการพีชคณิต พบว่า ความคลาดเคลื่อนของลำดับการผกผัน และนักเรียนมีความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของตัวแปร

แบลนโดและคณะ (Blando et al. 1989 : 301-308) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์และหารูปแบบความคลาดเคลื่อนทางเลขคณิต และข้อบกพร่องทางการเรียนเลขคณิต ซึ่งสรุปความคลาดเคลื่อนได้ 4 ด้าน ดังนี้

1. ความผิดพลาดในการทำผิดลำดับขั้นตอน เช่น บวกก่อนคูณ บวกก่อนหาร ลบก่อนหาร ละเลยความสำคัญของวงเล็บ เป็นต้น

2. ความผิดพลาดในการทำผิดความหมาย เช่น หารแทนการบวก ลบแทนการคูณ คูณแทนการหาร เป็นต้น

3. ความผิดพลาดอื่น ๆ เช่น การปฏิเสธที่จะแก้ปัญหา

4. ความผิดพลาดที่ไม่มีรูปแบบแน่นอนเนื่องจากขาดความระมัดระวังในการคำนวณ เช่น ขาดความระมัดระวังในการบวก (บวกผิด) เป็นต้น

สเตซี่ (Stacey. 1989 : 147-164) ได้ศึกษาการค้นหาและการใช้แบบรูปในการแก้ปัญหาเชิงเส้น ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับแบบรูป พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการทำนัยทั่วไป ไม่มีความสอดคล้องกับในการทำนัยทั่วไป

สไตน์เบอร์กและคณะ (Steinberg et al. 1990 : 112-121) ได้ศึกษาความรู้ทางพีชคณิตของนักเรียนเกี่ยวกับเรื่องการเท่ากันของเศษส่วน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับภาวะเท่ากัน (Equality) พบว่า นักเรียนไม่เข้าใจสัญกรณ์ทางพีชคณิตหรือสัญลักษณ์ที่นำไปสู่ความคลาดเคลื่อนในเรื่องภาวะเท่ากัน (Equality)

บูธและวัตสัน (Booth and Watson. 1990 : 12-14) ได้ศึกษา การวิจัยสำหรับการเรียนการสอน : การเรียนการสอนพีชคณิต ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่า นักเรียนไม่สามารถที่จะลดความซับซ้อนได้

อย่างถูกต้องเพราะนักเรียนไม่เข้าใจแนวคิดของพจน์ มีความเชื่อว่าคำตอบไม่เป็นจำนวน และมีปัญหาในการรวมพจน์

ฮาร์ท (Hart. 1980 : 4 – 6) ได้ศึกษาความเข้าใจของอัตราส่วนในโรงเรียนมัธยมศึกษา พบว่า 30% ของนักเรียนอายุ 13 ปี เกิดความคลาดเคลื่อนในลักษณะนี้ และพบว่า เด็กอายุ 15 ปี บางคนก็ทำผิดพลาดเช่นกัน นักเรียนชาวอเมริกันอายุ 13 ปี พิจารณาว่า $\frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \frac{5}{16}$ และ $\frac{3}{8}$ เศษส่วนจำนวนใดที่มีค่าใกล้เคียงกับ $\frac{3}{16}$ มากที่สุด พบว่ามีนักเรียนเพียง 3% เท่านั้น ที่สามารถหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง ผลจากการศึกษานี้เป็นตัวอย่างที่แสดงเห็นได้อย่างชัดเจนว่านักเรียนไม่รู้ถึงวิธีการหาเศษส่วนที่เท่ากันและไม่สามารถสร้างความเชื่อมโยงระหว่างการเท่ากันและขนาดของจำนวนได้ นอกจากนี้แล้วฮาร์ทยังได้ศึกษาพบว่ามีนักเรียนอายุ 15 ปี เพียง 21% เท่านั้นที่สามารถหาเศษส่วนที่อยู่ระหว่าง $\frac{1}{2}$ และ $\frac{2}{3}$ ได้ และก็ยังพบว่านักเรียนมักจะไม่ตระหนักว่า ระหว่างเศษส่วน 2 จำนวน บนเส้นจำนวนนั้น มีเศษส่วนอยู่เป็นอนันต์

แครมเมอร์ และบีซุค (Cramer and Bezuk. 1991 : 34-37) ได้ศึกษา การคูณเศษส่วน : การสอนสำหรับการทำความเข้าใจ "ครูเลขคณิต" พบว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วน มีงานวิจัยที่แสดงให้เห็นว่านักเรียนโดยทั่วไปจัดการกับการคูณเศษส่วนได้ดี ซึ่งน่าจะเป็นเพราะกฎของการคูณเศษส่วนเป็นเรื่องที่ง่าย "การคูณเศษส่วนทำได้โดย การนำตัวเศษคูณกับตัวเศษ และตัวส่วนคูณกับตัวส่วน" ถึงแม้ว่านักเรียนจะไม่มีความยุ่งยากในการคูณเศษส่วน แต่นักเรียนก็มีความเข้าใจเพียงเล็กน้อย เกี่ยวกับการคูณเศษส่วน ซึ่งเหตุผลอาจมาจากประสบการณ์ในการคูณจำนวนเต็มที่นักเรียนมักจะมองและเข้าใจว่าเป็นการบวกซ้ำ แต่เมื่อนักเรียนเผชิญกับการดำเนินการคูณเศษส่วน เช่น $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ นักเรียนจะไม่สามารถแปลความอย่างสมบูรณ์ได้

เบคเกอร์ (Becker. 1992 : 2850 A) ได้ศึกษาหาสาเหตุและการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นเกี่ยวกับมโนทัศน์เรื่องฟังก์ชัน และการนำเสนอรูปแบบของฟังก์ชันโดยใช้แบบสอบถามก่อนและหลังการสอนกับนักเรียนที่เรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น และเลือกนักเรียนที่มีความสมัครใจจำนวน 20 คนมาสอนเพิ่มเติมเพื่อแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนสามารถตรวจสอบการนำเสนอรูปแบบกราฟว่าเป็นฟังก์ชันโดยการลากเส้นขนานกับแกน y หรือโดยการมองภาพ นักเรียนสามารถตรวจสอบการนำเสนอรูปแบบตารางว่าเป็นฟังก์ชัน ถ้าเป็นความสัมพันธ์แบบ 1-1 นักเรียนสามารถตรวจสอบการนำเสนอรูปแบบสมการว่าเป็นฟังก์ชัน ถ้าความสัมพันธ์นั้นอธิบายได้รูปแบบ

เดียว นักเรียนไม่สามารถเขียนรูปแบบของฟังก์ชันนักเรียนส่วนใหญ่อธิบายฟังก์ชันโดยการนำเสนอด้วยสูตรหรือกราฟ นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ชอบใช้บทนิยามในการตรวจสอบว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่ นอกจากนี้นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับมโนทัศน์เรื่องฟังก์ชัน สรุปได้ดังนี้ ฟังก์ชันเชิงเส้น ชนิดของฟังก์ชัน ฟังก์ชัน 1-1 กราฟของฟังก์ชันที่เป็นแนวราบ ความต่อเนื่องของกราฟ การนำเสนอฟังก์ชันด้วยสูตรหรือประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอฟังก์ชันในรูปของตัวแปร x

เบอร์และคณะ (Behr et al. 1992 : 296-333) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของจำนวนอัตราส่วนและสัดส่วน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับอัตราส่วนและสัดส่วนพบว่า นักเรียนไม่สามารถที่จะยูนิเทรีได้

คีแรน (Kieran. 1992 : 33-56) ได้ศึกษาการเรียนและการสอนพีชคณิต ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร และฟังก์ชัน ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่า คำตอบไม่ถูกต้องเป็นผลมาจากการที่นักเรียนไม่ใช้สมบัติการแจกแจง (Distributive Property) อย่างถูกต้อง มีปัญหาเรื่องสมบัติการแจกแจง (Distributive Property)

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน พบว่า นักเรียนมีปัญหาเรื่องความเข้าใจเกี่ยวกับตัวแปร ว่าตัวแปรสามารถแทนปริมาณต่าง ๆ ได้ (เช่น ใน $y = 3x + 2$)

เกรเบอร์ และแคมเบลล์ (Graeber and Campbell. 1993 : 408-411) ศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการคูณและการหาร มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในเรื่องการคูณและการหารนั้นนักเรียนมักจะบอกว่าการคูณ จะทำให้ผลลัพธ์เพิ่มขึ้นในขณะที่การหารจะทำให้ผลลัพธ์ลดลง ปัญหาที่เกิดขึ้นก็คือเมื่อนักเรียนต้องแก้ปัญหาเกี่ยวกับการคูณและการหารจำนวนตรรกยะที่มีค่าน้อยกว่า 1 ผลลัพธ์ที่ได้จะไม่เป็นไปตามที่นักเรียนคิด ในการแก้โจทย์ปัญหานักเรียนมักจะใช้วิธีการคูณถ้าโจทย์ถามในสิ่งที่เพิ่มมากขึ้นจากข้อมูลที่โจทย์ให้มาในตอนแรกและจะใช้วิธีการหารถ้าโจทย์ถามในสิ่งที่ลดลงจากข้อมูลที่โจทย์ให้มาในตอนแรก เช่น

จากข้อความ “รถวิ่งได้ระยะทาง 30 ไมล์ ต้องใช้ก๊าซโซลีน 1 แกลลอน ถ้ามีก๊าซโซลีน $\frac{1}{2}$ แกลลอน รถจะวิ่งได้ระยะทางเท่าไร”

เนื่องจากนักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในเรื่องการคูณ และการหารดังนั้นในการแก้ปัญหาโจทย์ข้อนี้นักเรียนจะให้เหตุผลว่าเนื่องจากก๊าซโซลีน 1 แกลลอน รถวิ่งได้ 30 ไมล์

ถ้ามีแกลลอน ถ้ามีก๊าซโซลีน $\frac{1}{2}$ แกลลอน รถจะวิ่งได้น้อยกว่า 30 ไมล์ ซึ่งจะเห็นว่าระยะทางที่รถวิ่งได้น้อยลง ดังนั้นคำตอบของปัญหานี้ต้องเอา 30 หารด้วย $\frac{1}{2}$ แทนที่จะเอา 30 คูณด้วย $\frac{1}{2}$

จากข้อความ "ถ้าคุกกี้ 1 กล่อง ต้องใช้เงิน 0.65 ปอนด์ ถ้ามีเงิน 5 ปอนด์ จะสามารถซื้อคุกกี้ได้กี่กล่อง"

จากปัญหาข้อนี้ก็เช่นเดียวกันเนื่องจากโจทย์บอกว่าคุกกี้ 1 กล่อง ต้องใช้เงิน 0.65 ปอนด์ ดังนั้นเมื่อมีเงิน 5 ปอนด์ แสดงว่าต้องได้คุกกี้มากกว่า 1 กล่อง ซึ่งจะเห็นว่าจำนวนกล่องของคุกกี้เพิ่มมากขึ้น ดังนั้นปัญหานี้จะต้องเอา 5 คูณด้วย 0.65 แทนที่จะเอา 5 หารด้วย 0.65

เพอร์รีเนทและโวลเตอร์ (Perrenet and Wolters. 1994 : 335-358) ได้ศึกษาศิลปะของการตรวจสอบ : การศึกษาเฉพาะกรณีของนักศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมการตรวจสอบที่ผิดพลาดในพีชคณิตเบื้องต้น ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสมการพีชคณิต พบว่านักเรียนมีความคลาดเคลื่อนในการตรวจสอบการแก้ปัญหา

ซวาร์ซแมน (Schwartzman. 1996 : 164-173) ศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับพีชคณิตโดยแบ่งเป็นเรื่อง ๆ ดังนี้ 1. กลุ่มของสัญลักษณ์และลำดับของการดำเนินการ โดยศึกษากับนักเรียนวิทยาลัยชุมชน จำนวน 21 คน ศึกษาโดยการตั้งคำถามเกี่ยวกับชื่อของวงเล็บและลักษณะการใช้วงเล็บ ผลการศึกษาพบว่านักเรียนบางคนตอบว่า "ไม่แน่ใจทั้งชื่อและสัญลักษณ์การใช้" นักเรียนส่วนใหญ่ตอบว่า "ใช้วงเล็บเล็กก่อนเป็นลำดับแรกหรือต้องอยู่ในตำแหน่งในสุด ตามด้วยวงเล็บก้ามปู และวงเล็บปีกกาตามลำดับ" นอกจากนี้ยังได้ศึกษาโดยใช้แบบสอบถามชนิดให้ตอบว่า "ใช่ หรือ ไม่ใช่" เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้งหนึ่ง โดยแบบสอบถามข้อที่ 1-3 จะให้สัญลักษณ์ของวงเล็บทั้งสามแบบได้แก่ ( ) [ ] { } แล้วให้นักเรียนเติมชื่อ ส่วนข้อที่ 4-14 เป็นลักษณะของการใช้วงเล็บทั้งสามแบบ ผลการศึกษาพบว่ามีนักเรียนเพียงคนเดียวที่ตอบแบบสอบถามข้อที่ 4-14 ถูกทุกข้อ นอกจากนั้นนักเรียนส่วนใหญ่จะตอบว่า "ต้องใช้วงเล็บเล็กก่อนเป็นลำดับแรก ตามด้วยวงเล็บก้ามปูและวงเล็บปีกกาเป็นลำดับนอกสุด" และนักเรียนแสดงความประหลาดใจเมื่อครูบอกว่า "กลุ่มของสัญลักษณ์เหล่านี้สามารถใช้ลำดับใดก่อนหลังก็ได้ ใช้ซ้อนหรือซ้ำกันก็ได้ด้วยเช่นกัน" นอกจากนี้ผู้ศึกษายังกล่าวอีกว่าในตำราหรือหนังสือส่วนใหญ่นั้นไม่มีผู้เขียนคนใดบอกไว้ตรง ๆ ว่าจะใช้ลำดับของวงเล็บทั้งสามแบบนี้อย่างไร แต่จะแฝงไว้ด้วยการเสนอตัวอย่าง ซึ่งเป็น

ลักษณะเดียวกันคือวงเล็บเล็กจะอยู่ในสุด ตามด้วยวงเล็บก้ามปู และวงเล็บปีกกาในตำแหน่งนอกสุด ทำให้ผู้เรียนคิดว่านั่นคือสิ่งที่ถูกต้อง ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผู้เรียนเรียนรู้จากตัวอย่างไม่ใช่การเรียนรู้จากรูปแบบการใช้ที่ถูกต้องจริง ๆ

ลินเซฟสกีและเฮอร์สโควิคส์ (Linchevski and Herscovics. 1996 : 39-65) ได้ศึกษาการข้ามช่องว่างขององค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ระหว่างเลขคณิตและพีชคณิต การดำเนินงานในบริบทของสมการ ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับภาวะเท่ากัน (Equality) และสมการทางพีชคณิต ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับภาวะเท่ากัน (Equality) พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการทำความเข้าใจแนวคิดของสมการที่สมมูลกัน (Equivalent Equations) ถึงแม้ว่านักเรียนจะได้คำตอบที่ถูกต้องเหมือนกันในการอินเวอร์ส (Inverse Operations) สมการที่สมมูลกัน แต่นักเรียนจะมีมุมมองที่แตกต่างกัน

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสมการทางพีชคณิต พบว่า ความคลาดเคลื่อนในการใช้การอินเวอร์ส (Inverse Operations)

สเตซี่และแมคเกรเกอร์ (Stacey and MacGregor. 1997b : 110-113) ได้ศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับสัญลักษณ์ที่นักเรียนนำมาใช้ในพีชคณิต ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร ไว้ดังนี้

1. นักเรียนมีปัญหาในการกำหนดค่าตัวแปร

2. นักเรียนมีความเชื่อเกี่ยวกับค่าของตัวแปรที่ไม่ถูกต้อง แอสควิธ และคณะ (Asquith et al. 2007 : 272) เช่น มีความเชื่อเกี่ยวกับการคำนวณอักขระวิธี (Alphabet) ที่ไม่ถูกต้อง

3. นักเรียนไม่มีความเข้าใจว่าเรื่องตัวแปรเชิงปริมาณและไม่มีความเข้าใจในเรื่องค่าสูญหาย สเตซี่และแมคเกรเกอร์ (Stacey and MacGregor. 2000 : 149-167)

4. นักเรียนไม่สามารถเขียนนิพจน์พีชคณิตสำหรับสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

5. นักเรียนไม่สามารถที่จะลดความซับซ้อนได้อย่างถูกต้องเพราะนักเรียนไม่เข้าใจแนวคิดของพจน์

6. นักเรียนมีความเชื่อว่าคำตอบจะไม่สามารถเป็นจำนวน

7. นักเรียนมีปัญหาในการรวมพจน์

ลินเซฟสกีและลิฟเนห์ (Linchevski and Livneh. 1999 : 39-65) ได้ศึกษาการข้ามช่องว่างขององค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ระหว่างเลขคณิตและพีชคณิต การดำเนินงานในบริบท

ของสมการ ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับลำดับของการคำนวณ พบว่า ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความเชื่อของนักเรียนที่เชื่อว่าควรคำนวณจากซ้ายไปขวา และนักเรียนมีความเชื่อที่ไม่ถูกต้อง นักเรียนเชื่อว่าการบวกมาก่อนการลบหรือการคูณมาก่อนการหาร(ลำดับการคำนวณจากซ้ายไปขวา)

เฮอร์รี่และฮอลลี่ (Healy and Hoyles. 1999 : 59-84) ได้ศึกษาการมองเห็นและการให้เหตุผลเชิงสัญลักษณ์ในวิชาคณิตศาสตร์: การเชื่อมต่อกับคอมพิวเตอร์ ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับแบบรูป พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการอธิบายแบบรูปของสัญลักษณ์

ซิงห์ (Singh. 2000 : 271-292) ได้ศึกษาความเข้าใจในแนวคิดของสัดส่วนและอัตราส่วนของนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่หก ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับอัตราส่วนและสัดส่วน พบว่า นักเรียนไม่สามารถที่แปลงอัตราส่วนเป็นสัดส่วนได้

แรดฟอร์ด (Radford. 2000 : 237-268) ได้ศึกษาสัญลักษณ์และความหมายในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน : การวิเคราะห์ Semiotic ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับแบบรูป พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการอธิบายแบบรูปของสัญลักษณ์

สวอน (Swan. 2000 : 16-19) ได้ศึกษาความรู้สึกเชิงพีชคณิต ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่า นักเรียนมีแนวคิดที่ว่าตัวแปรสองตัวแปรที่แตกต่างกัน (เช่น x,y) ในสมการเดียวกันไม่สามารถมีค่าเดียวกันได้

นาธานและโคดินเจอร์ (Nathan and Koedinger. 2000 : 168-190) ได้ศึกษาความเชื่อของครูและนักวิจัยเกี่ยวกับการพัฒนาเหตุผลเชิงพีชคณิต ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสมการ พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการนำเสนอสัญลักษณ์แทนสถานการณ์

สวาฟฟอร์ดและแลงเกลล์ (Swafford and Langrall. 2000 : 89-112) ได้ศึกษาการเรียนการสอนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ใช้การอธิบายสมการและการแสดงสถานการณ์ปัญหา ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสมการ พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการแสดงค่าผกผัน ($\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ ฯลฯ) ในสมการ

ฮาดจิดีเมทริอูและวิลเลียม (Hadjidemetriou and Williams. 2001 : 25–32) ได้ศึกษาแนวคิดแบบกราฟิกของนักเรียน : การประเมินการเรียนรู้สำหรับการเรียนการสอน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชัน และกราฟ ได้ระบุความคลาดเคลื่อน ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการลงพิกัดแกน X และแกน Y

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับกราฟ พบว่า นักเรียนมีคำตอบที่ไม่ถูกต้องในการแปลความกราฟ

ดีบล็อกและคณะ (De Bock et al. 2002 : 311-334) ได้ศึกษาการให้เหตุผลเชิงเส้นที่ไม่เหมาะสม : การศึกษาในเชิงลึกของธรรมชาติและความคลาดเคลื่อนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในเรื่องการให้เหตุผลเชิงเส้น ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับอัตราส่วนและสัดส่วน พบว่า นักเรียนไม่สามารถประยุกต์ใช้กระบวนการเรียนรู้ในการทำความเข้าใจในปัญหาและสามารถปรับใช้กับสถานการณ์ได้

คาร์เพนเทอร์และคณะ (Carpenter et al. 2002 : 41) ได้ศึกษาวิจัยเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อนทางมโนทัศน์ของทศนิยม พบว่า นักเรียนชาวอเมริกันที่มีอายุ 12-16 ปีมีปัญหาเกี่ยวกับการเรียงทศนิยมจากมากไปหาน้อยหรือจากน้อยไปหามาก ประมาณร้อยละ 50 ของนักเรียนจะตัดจุดทศนิยมออกและคิดว่าทศนิยมนั้นคือจำนวนเต็ม จึงทำให้การเรียงทศนิยมผิดพลาดไป

กอนซาเลซและคณะ (Gonzales et al. 2004 : 1) ได้วิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเรื่องเครื่องหมายเท่ากับ ของนักเรียนเกรด 3 เกรด 5 และเกรด 6 โดยให้นักเรียนหาคำตอบของประโยคเปิดของจำนวน เช่น $14+\square=13+4$ และ $\square = 25 - 12$ จากการศึกษาพบว่านักเรียนเกรด 3 มีการตอบสนองที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับโครงสร้างของประโยค ซึ่งนักเรียนส่วนใหญ่จะพิจารณาความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ ในเรื่องการคำนวณโดยไม่นึกถึงความหมายในเรื่องความสัมพันธ์เลย ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากการที่นักเรียนไม่สามารถหาคำตอบของประโยคในลักษณะ $12+7=7+\square$ ได้ สำหรับนักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 ส่วนใหญ่สามารถตอบคำถามได้ถูกต้อง และสามารถใช้เครื่องหมายเท่ากับในลักษณะของสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์ แต่มักตอบผิดในกรณีที่การดำเนินการเป็นลบ

สเตนเล่ และสเตซี่ (Steinle and Stacey. 2004 : 1-8) ได้ศึกษาความคงทนของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในเรื่องผิดทศนิยมและความพร้อมความชำนาญของนักเรียน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข พบว่า นักเรียนมีปัญหาในเรื่องตำแหน่งของทศนิยม ตัวอย่างเช่น จำนวนโดดหลังจุดทศนิยมเป็นการบอกว่า จำนวนนั้นเป็นทศนิยมกี่ตำแหน่ง และมีปัญหาในการรียงลำดับทศนิยม (นักเรียนตอบไม่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนโดดหลังจุดทศนิยม)

อินเรย์และคณะ (Ainley et al. 2004 : 271- 290) ได้ศึกษาความหมายของการสร้างและงานทางพีชคณิต ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับแบบรูป พบว่า นักเรียนไม่สามารถที่จะระบุแบบรูปได้

บาร์เซลลอส (Barcellos. 2005 : 98-114) ได้ทำการวิจัยเรื่อง มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เรื่องพีชคณิต ของนักเรียนระดับมหาวิทยาลัย ผู้วิจัยได้ทำการศึกษากลุ่มตัวอย่างที่อยู่ในชั้นเรียนที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้น จำนวนครึ่งหนึ่งของนักเรียนที่สอบผ่านเท่านั้น โดยสัมภาษณ์หัวข้อเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ ที่ทำให้นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ระหว่างความคลาดเคลื่อนในระเบียบวิธีการ และความสะเพร่าเล็ก ๆน้อย ๆ ตามปกติ พบว่ามีความคลาดเคลื่อน 4 กรณี ได้แก่ กรณีที่ 1 คือการไม่เข้าใจในการใช้เครื่องหมายแสดงการเท่ากัน และอีก 3 กรณีเป็นการใช้สมบัติการแจกแจง นักเรียนที่ไม่เข้าใจในการใช้เครื่องหมายแสดงความเท่ากัน มีสาเหตุมาจากการเขียนข้อความที่สมมูลกันกับข้อความก่อนหน้า หรือมีสาเหตุมาจากการบกพร่องเกี่ยวกับสัญลักษณ์ที่จะใช้เขียนเพื่ออธิบายขั้นตอนการแก้ปัญหา ส่วนความไม่เข้าใจเกี่ยวกับสมบัติการแจกแจง มีสาเหตุมาจากความไม่เข้าใจเนื้อหาของการดำเนินการที่ถูกต้อง ข้อค้นพบดังกล่าวมีผลมาจากทั้งความเข้าใจผิดพลาดที่พบมาก (การใช้กระบวนการที่ไม่ถูกต้อง) และความเข้าใจคลาดเคลื่อนที่พบบ่อย (ไม่สามารถใช้กระบวนการที่ถูกต้อง) สิ่งที่นักเรียนบอก คือจำนวนจริงที่ติดกรณฑ์ไม่สามารถถอดรากได้จะเป็นกรณีพิเศษที่สามารถถอดรากได้โดยการดำเนินการของจำนวนจริง

สตีเฟน (Stephens. 2005 : 96-100) ได้ศึกษาการพัฒนาความเข้าใจเรื่องตัวแปรของนักเรียน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่า นักเรียนมีแนวคิดที่ว่าตัวแปรสองตัวแปรที่แตกต่างกัน (เช่น x, y) ในสมการเดียวกันไม่สามารถมีค่าเดียวกันได้ และไม่มีความเข้าใจในเรื่องตัวแปรเชิงปริมาณและไม่มีความเข้าใจในเรื่องค่าสูญหาย (Missing Data)

บราวน์ และควีน (Brown and Quinn. 2006 : 28-40) ได้ศึกษาความยากของพีชคณิตในเรื่องของเศษส่วน : การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข พบว่า การประยุกต์ใช้วิธีการคำนวณที่ไม่ถูกต้องในการคำนวณเศษส่วน และการเลือกใช้การดำเนินการที่ผิดในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วน

คาพาโรและจอฟฟรีออน (Capraro and Joffrion. 2006 : 147-164) ได้ศึกษาสมการพีชคณิต : นักเรียนระดับมัธยมศึกษาสามารถให้ความหมายและแปลจากคำเป็นสัญลักษณ์ทาง

คณิตศาสตร์ ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่า นักเรียนมีการแสดงออกเกี่ยวกับการลบ นักเรียนเขียนนิพจน์ไม่ถูกต้อง ตัวอย่างเช่น นักเรียนเขียน 4 - n แทน n - 4

แอชล็อค (Asquith. 2007 : 249-272) ศึกษานักเรียนระดับประถมศึกษา ได้ทำการศึกษาความรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับความเข้าใจแนวคิดของพีชคณิต : เครื่องหมายเท่ากับและตัวแปร และได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับภาวะเท่ากัน (Equality) และสัญลักษณ์ที่เกี่ยวกับพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับภาวะเท่ากัน (Equality) พบว่า นักเรียนมีปัญหาในเรื่องภาวะเท่ากัน และการใช้การอินเวอร์ส (Inverse Operations)

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ที่เกี่ยวกับพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการกำหนดค่าตัวแปร มีความเชื่อเกี่ยวกับค่าของตัวแปรที่ไม่ถูกต้อง เช่น มีความเชื่อเกี่ยวกับการคำนวณอักขระวิธี (Alphabet) ที่ไม่ถูกต้อง และไม่มีความเข้าใจเรื่องตัวแปรเชิงปริมาณและไม่มีความเข้าใจในเรื่องค่าสูญหาย

ซาดี (Sadi. 2007 : 4-5) ได้ศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเรื่องจำนวน พบว่าการสอนการคูณเศษส่วนควรเน้นไปที่สถานการณ์จริงเกี่ยวกับผลคูณของเศษส่วน 2 จำนวน และมีการอธิบายว่าทำไมการคูณเศษส่วน 2 จำนวน จึงดำเนินการเช่นนั้น การหารเศษส่วนเป็นปัญหาอย่างมากสำหรับนักเรียน นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถมองเห็นความเป็นรูปธรรมในการหารเศษส่วน เช่น $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ สำหรับนักเรียนส่วนใหญ่การดำเนินการเช่นนี้ค่อนข้างจะไม่มีความหมาย ยิ่งไปกว่านั้นนักเรียนยังล้มเหลวในการที่จะพบประเด็นหรือความเข้าใจเชิงตรรกะเบื้องหลัง การดำเนินการหารตามหลักการที่ว่า “การหารจำนวนใด ๆ ด้วยเศษส่วน อาจคิดได้จากการนำจำนวนนั้นคูณกับส่วนกลับของเศษส่วนที่เป็นตัวหาร”

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการบวกและการลบเศษส่วน การบวกเศษส่วนเป็นอีกปัญหาหนึ่งสำหรับนักเรียน ทั้ง ๆ ที่ส่วนใหญ่แล้วนักเรียนไม่มีปัญหาในการทำความเข้าใจความหมายของ $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ แต่นักเรียนก็ยังสับสนในการหาผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เมื่อนักเรียนเผชิญกับการบวกเศษส่วน นักเรียนมักจะเลือก “วิธีที่ง่ายที่สุดในการหาคำตอบ” โดยไม่คำนึงถึงการทำให้ตัวส่วนเท่ากัน แต่มักจะบวกตัวเศษและตัวส่วนเข้าด้วยกัน หรือทำตามกฎ “ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ ” ความเข้าใจมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนส่วนหนึ่งอาจเป็นผลมาจากกฎของการคูณเศษส่วน

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเศษส่วนที่เท่ากัน มโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วนที่เท่ากันมีความจำเป็นอย่างยิ่งในการนำมาประยุกต์ใช้ในเนื้อหาต่าง ๆ ของการเรียน ตัวอย่างเช่น การเปรียบเทียบเศษส่วน การหาจำนวนที่ใกล้เคียงเศษส่วนที่กำหนดให้ การหาจำนวนที่อยู่ระหว่างเศษส่วน 2 จำนวน

วลาสซิส (Vlassis. 2008 : 555-570) ได้ศึกษาบทบาทของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพัฒนาแนวคิดของจำนวน : ศึกษากรณีของเครื่องหมายลบ ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข และสมการทางพีชคณิต ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการลบ โดยใช้เครื่องหมายลบ มีความคลาดเคลื่อนในการตรวจสอบคำตอบ โดยการนำตัวแปรที่ได้จากการแก้สมการไปแทนลงในสมการที่กำหนดให้ เพื่อดูว่าค่าดังกล่าวเป็นคำตอบของสมการหรือไม่ และละเลยการใช้เครื่องหมายลบ

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสมการทางพีชคณิต พบว่า นักเรียนได้คำตอบที่ไม่ถูกต้องในการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็ม

เบลและคณะ (Ball et al. 2008 : 389-407) ได้ศึกษาความรู้ในการสอน : อะไรทำให้ความรู้ในการสอนเป็นสิ่งพิเศษ ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับภาวะเท่ากัน (Equality) พบว่า นักเรียนมีความเชื่อเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ (=)ไม่ถูกต้อง

โคลเนอร์และคณะ (Koellner et al. 2008 : 304-310) ได้ศึกษาการพูดคุยทั่วไปในห้องเรียนพีชคณิต ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับแบบรูป พบว่า นักเรียนมีความคลาดเคลื่อนในการนับแบบรูป

โชฮานแมนและแวน การ์เดอเรน (Scheuermann and Van Garderen. 2008 : 471-477) ได้ศึกษาการวิเคราะห์การใช้กราฟิกในการนำเสนอของนักเรียน : มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและรูปแบบ ความคลาดเคลื่อนของสำหรับการเรียนการสอน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับกราฟ พบว่านักเรียนมีความคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์เรื่องกราฟ

ดาร์เลย์ (Darley. 2009 : 458-464) ได้ศึกษาเนื้อหาจากเลขคณิตไปสู่พีชคณิต ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข พบว่า นักเรียนมีปัญหาในการทำความเข้าใจค่าของเศษส่วน มีปัญหาในการวางแผนการลงจุดแทนตำแหน่งของเศษส่วนในพิกัดแกน X และแกน Y ในกราฟและแทนตำแหน่งของเศษส่วนบนเส้นจำนวน และมีปัญหาในการแทนตำแหน่งของเศษส่วนบนเส้นจำนวน

เด็สเม็ทและคณะ (Desmet et al. 201O : 521-532) ได้ศึกษาการพัฒนาการเปลี่ยนแปลงในการเปรียบเทียบเศษส่วนและทศนิยม ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเชิงตัวเลข พบว่า นักเรียนมีปัญหาในเรื่องตำแหน่งของทศนิยมและการเรียงลำดับทศนิยม

ลาบาโต้และแอลิส (Labato and Ellis. 2010 : 291-299) ได้ศึกษาการพัฒนาความเข้าใจที่จำเป็นของอัตราส่วน สัดส่วนและการให้เหตุผลเชิงสัดส่วน : เกรด 6-8 ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับอัตราส่วนและสัดส่วน กราฟ และฟังก์ชัน ไว้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับอัตราส่วนและสัดส่วน คือ นักเรียนไม่ตระหนักถึงการแบ่งส่วนซึ่งแต่ละส่วนต้องเท่ากัน

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับกราฟ คือ นักเรียนมีปัญหาในการหาความชันของเส้นตรง

3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับฟังก์ชัน คือ นักเรียนมีปัญหาในการหาความชันของเส้นตรง

ดิงและลิ (Ding and Li. 2010 : 147-171) ได้ศึกษาการวิเคราะห์เปรียบเทียบหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาในสหรัฐอเมริกาและจีน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร พบว่านักเรียนมีปัญหาเรื่องสมบัติการแจกแจง (Distributive Property)

พุกาลี (Pugalee. 2010 : 41-50) ได้ศึกษาการพัฒนาการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนของนักเรียน ได้ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชัน และกราฟ พบว่า นักเรียนไม่มีความเข้าใจในเรื่องความเป็นสัดส่วนและความไม่เป็นสัดส่วนของฟังก์ชัน (Proportionality or Non-proportionality of Functions)

จากการศึกษางานวิจัยต่างประเทศเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต พบว่ามีการศึกษาที่ระบุความคลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตและการใช้ตัวอักษร ลำดับของการคำนวณ สมการทางพีชคณิต ฟังก์ชัน แบบรูป ความสัมพันธ์ของจำนวน อัตราส่วนและสัดส่วน คูณและการหาร ภาวะเท่ากัน (Equality) กราฟ จำนวนเศษส่วน และการศึกษาสาเหตุของความผิดพลาด (Mistake) ในการบวกเศษส่วน การศึกษาเรื่องความเข้าใจและความคลาดเคลื่อนในวิชาพีชคณิต และศึกษาหาสาเหตุและการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นเกี่ยวกับมโนทัศน์เรื่องฟังก์ชัน ซึ่งการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตนั้นอาจมีสาเหตุจากการที่นักเรียนไม่เข้าใจสัญลักษณ์และ

เครื่องหมาย เกิดจากความคลาดเคลื่อนในการแปลความ นักเรียนมีความคลาดเคลื่อนในการใช้ลำดับการดำเนินการ นักเรียนไม่เข้าใจทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ อย่างไรก็ตามยังไม่พบงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนากลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในและต่างประเทศ สรุปได้ว่า ในประเทศไทยและในต่างประเทศได้ให้ความสำคัญกับการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์และการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ แต่ยังไม่พบงานวิจัยใดที่ทำการพัฒนากรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตและพัฒนากลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตในระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษา และระดับปริญญาตรี จากเหตุผลดังกล่าวผู้วิจัยจึงมีความสนใจพัฒนากลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตในระดับปริญญาตรี เพื่อให้นักศึกษาในระดับปริญญาตรีได้มีมโนทัศน์ทางพีชคณิตที่ถูกต้องและสามารถถ่ายทอดมโนทัศน์ทางพีชคณิตแก่นักเรียนอย่างถูกต้องและลึกซึ้ง