ภาคผนวก

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ภาคผนวก ก

1. การสังเคราะห์กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

2. การสังเคราะห์กลวิธีการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

การสังเคราะห์กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

1. วิเคราะห์กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

ศึกษาและวิเคราะห์กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ของโมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ (Movshovits-hadar et. al. 1987 : 3-14) ราดาร์ส (Radatz. 1979 : 163-172) วินเนอร์และคณะ (Vinner et al. 1981 : 555-570) โบราสิ (Borasi. 1985 : 1-14) ทรูแรน (Truran. 1987 : 92) และโคลแกน (Colgan. 1991 : 91-A) ผลการวิเคราะห์ สรุปปรากฏดังตารางภาคผนวก ที่ 1

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางภาคผนวกที่ 1 ผลการวิเคราะห์ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของราดาร์ส	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของวินเนอร์และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโบราสิ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของทรูแรน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโคลแกน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
ด้านการใช้ข้อมูลผิด (Misused Data)	-	-	-	-	ความคลาดเคลื่อนจากข้อมูล เช่น ความคลาดเคลื่อนจากการคัดลอก	-
ตีความด้านภาษา (Misinterpreted Language)	ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความยากลำบากด้านภาษา (Errors Duc to Language Difficulties)	-	ความคลาดเคลื่อนอันเนื่องมาจากปัญหาด้านภาษา	การอ่านคำถามความเข้าใจในคำถาม	ความคลาดเคลื่อนจากภาษา	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์และภาษา** 1. ไม่เข้าใจคำถาม 2. ใช้ภาษาคณิตศาสตร์ในการอธิบายความได้ไม่สมบูรณ์ ไม่ถูกต้อง ไม่ชัดเจน

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของราดาร์ส	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของวินเนอร์และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโบราสิ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของทรูแรน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโคลแกน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
ด้านการอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ (Logically Invalid Inference)	-	-	-	-	ความคลาดเคลื่อนจากตรรกะ (Logic)	-
ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ (Distorted Theorem or Definition)	การประยุกต์ใช้กฎหรือกลยุทธ์ที่ไม่เกี่ยวข้อง (Errors Due to the Application of Irrelevant Rules of Strategies)	-	ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการประยุกต์ใช้กฎหรือยุทธวิธีที่ไม่เกี่ยวข้อง	-	คลาดเคลื่อนจากนิยาม ทฤษฎีบทหรือกฎ	มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์และภาษา การใช้ทฤษฎีบทหรือนิยามที่ไม่เกี่ยวข้อง การบิดเบือนทฤษฎีบทและหลักการ

มหาวิทยาลัยมหาสารคาม MAHASARAKHAM UNIVERSITY

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของราดาร์ส	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของวินเนอร์และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโบราสิ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของทรูแรน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโคลแกน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified Solution)	-	-	-	-	-	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา** การตรวจสอบคำตอบในระหว่างการแก้ปัญหาทางพีชคณิต และการตรวจสอบคำตอบเมื่อแก้ปัญหาทางพีชคณิตเสร็จสิ้น
ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ (Technical Error)	-	-	-	-	-	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา** แก้ปัญหาทางพีชคณิตไม่สมบูรณ์
-	2.ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความยากลำบากในการรับข้อมูลเชิงพื้นที่ (Errors Due to Difficulties on Obtaining Spatial Information)	-	-	-	-	-

มหาวิทยาลัยมหาสารคาม MAHASARAKHAM UNIVERSITY

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของราดาร์ส	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของวินเนอร์และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโบราสิ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของทรูแรน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโคลแกน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
-	ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากความบกพร่องในทักษะที่จำเป็น ข้อเท็จจริงและแนวคิด (Errors Due Deficient Mastery of Prerequisite Skill, Fact, and Concept)	-	นักเรียนไม่มีความรู้เรื่องนั้น	1. กลยุทธ์ในการเลือกใช้ความรู้ 2. นักเรียนเลือกใช้ความรู้ไม่เป็น 3. นักเรียนประยุกต์ใช้ความรู้ไม่ได้	นักเรียนขาดทักษะพื้นฐานในการคำนวณ	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้** ขาดทักษะทางพีชคณิตที่จำเป็น
-	-	การเสนอรายละเอียดที่ผิด: ลืมบางส่วน	-	-	-	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา** 1. การลืมเสนอรายละเอียดบางส่วน 2. นักศึกษาละเลยข้อมูลที่จำเป็นในการแก้ปัญหา

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของราดาร์สและคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของวินเนอร์และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโบราสิ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของทรูแรน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโคลแกน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
-	-	การใช้วิธีการที่ไม่เหมาะสมในการแก้ปัญหา	-	-	-	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา** ใช้วิธีการที่ไม่เหมาะสมในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต
-	-	การสรุปเป็นหลักการผิด	-	-	-	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา** การสรุปเป็นกรณีทั่วไปทางพีชคณิตไม่ได้
-	-	การตีความสัญลักษณ์ผิด	-	-	-	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์และภาษา** ใช้สัญลักษณ์ผิด ทำให้คำตอบผิด
-	-	นักเรียนมีความคลาดเคลื่อนในการตรวจสอบผลลัพธ์	-	-	-	-

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของราดาร์ส	กรอบลักษณะ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของวินเนอร์และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโบราสิ	กรอบลักษณะ มโนทัศน์ที่คลาด เคลื่อนของทรูแรน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโคลแกน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
-	-	-	ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากนักเรียนมีความเข้าใจผิด	-	-	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา** แก้ปัญหาโดยขาดหลักการทางพีชคณิต
-	-	-	วิธีทำไม่สมบูรณ์	-	วิธีการแก้ปัญหาไม่สมบูรณ์	-
-	ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการเชื่อมโยงที่ไม่ถูกต้องหรือความคิดที่ไม่ยืดหยุ่น (Errors Due to Incorrect Associations or Rigidity of Thinking)	-	-	เสนอคำตอบคลาดเคลื่อน	-	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา** 1. แก้ปัญหาไม่ตรงกับที่โจทย์ต้องการ 2. ขาดความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร SAKAHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโมว์โชวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของราดาร์ส	กรอบลักษณะ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของวินเนอร์และคณะ	กรอบลักษณะ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโบราสิ	กรอบลักษณะ มโนทัศน์ที่คลาด เคลื่อนของทรูแรน	กรอบลักษณะ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของโคลแกน	กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
-	-	-	-	-	ความรู้พื้นฐานไม่เพียงพอ	**มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้** 1. ขาดความรู้ในการพิสูจน์ทางพีชคณิต 2. ขาดความรู้ในการเลือกใช้วิธีแก้ปัญหาทางพีชคณิต 3. ขาดความรู้พื้นฐานทางพีชคณิต

มหาวิทยาลัยมหาสารคาม MAHASARAKHAM UNIVERSITY

จากตารางภาคผนวกที่ 1 สรุปเป็น 3 ด้าน ดังนี้

1.1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์และภาษา

1.1.1 ไม่เข้าใจคำถาม

1.1.2 ใช้ภาษาคณิตศาสตร์ในการอธิบายความได้ไม่สมบูรณ์ ไม่ถูกต้อง ไม่ชัดเจน

1.1.3 การใช้ทฤษฎีบทหรือนิยามที่ไม่เกี่ยวข้อง การบิดเบือนทฤษฎีบทและหลักการ

1.1.4 ใช้สัญลักษณ์ผิด ทำให้คำตอบผิด

1.2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

1.2.1 การตรวจสอบคำตอบในระหว่างการแก้ปัญหาทางพีชคณิต และการตรวจสอบคำตอบเมื่อแก้ปัญหาทางพีชคณิตเสร็จสิ้น

1.2.2 แก้ปัญหาทางพีชคณิตไม่สมบูรณ์

1.2.3 การลืมเสนอรายละเอียดบางส่วน

1.2.4 นักศึกษาละเลยข้อมูลที่จำเป็นในการแก้ปัญหา

1.2.5 ใช้วิธีการที่ไม่เหมาะสมในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

1.2.6 การสรุปเป็นกรณีทั่วไปทางพีชคณิตไม่ได้

1.2.7 แก้ปัญหาโดยขาดหลักการทางพีชคณิต

1.2.8 แก้ปัญหาไม่ตรงกับที่โจทย์ต้องการ

1.2.9 ขาดความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

1.3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้

1.3.1 ขาดทักษะทางพีชคณิตที่จำเป็น

1.3.2 ขาดความรู้ในการพิสูจน์ทางพีชคณิต

1.3.3 ขาดความรู้ในการเลือกใช้วิธีแก้ปัญหาทางพีชคณิต

1.3.4 ขาดความรู้พื้นฐานทางพีชคณิต

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

การสังเคราะห์กลวิธีการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

1. สังเคราะห์แนวคิด ทฤษฎีที่เกี่ยวกับการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของสตีแพนส์และชมิดท์ (Stepans and Schmidt. 2009 : 22) เซอร์เบล (Zirbel. 2005 : 10) ซาเดลา (Sadera. 2001 : 93) ไดค์สตราและคณะ(Dykstra et al. 1992 : 615) และทฤษฎีการซ่อมแซม และนำผลการสัมภาษณ์เชิงลึกไปออกแบบกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต แล้วนำเสนอร่างกลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ต่อคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ดังนี้

จากการศึกษาและสังเคราะห์แนวคิด ทฤษฎีที่เกี่ยวกับการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ได้แก่ รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของสตีแพนส์ รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของเซอร์เบล รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของซาเดลา รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของไดค์สตราและคณะ และทฤษฎีการซ่อมแซม ผลการสังเคราะห์กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ปรากฏดังตารางภาคผนวกที่ 2

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางภาคผนวกที่ 2 การสังเคราะห์กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของสตีแพนส์และชมิดท์	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของเซอร์เบล	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของซาเดลา	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของไดค์สตราและคณะ	ทฤษฎีการซ่อมแซม	กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
ขั้นที่ 1 ขั้นมอบหมายงาน (Commit to a Position or an Outcome)	-	**ขั้นตอนที่ 1** กระตุ้นประสบการณ์เดิมต่าง ๆ ของผู้เรียนและวินิจฉัยในความเชื่อต่าง ๆ เหล่านั้น **ขั้นตอนที่ 2** นำผู้เรียนเข้าสู่ข้อมูลสารสนเทศใหม่	1. การปรับปรุงความเข้าใจ (Differentiation)	**ขั้นที่ 1 ขั้นการนำเสนอมโนทัศน์ในขั้นต้น**	**ขั้นที่ 1 กระตุ้นประสบการณ์เดิมของผู้เรียน**

รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของสตีแพนส์และชมิดท์	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของเซอร์เบล	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของซาเดลา	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของไดค์สตราและคณะ	ทฤษฎีการซ่อมแซม	กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
ขั้นที่ 1 ขั้นมอบหมายงาน (Commit to a Position or an Outcome)	-	**ขั้นตอนที่ 3** ผู้เรียนจำเป็นต้องลงมือปฏิบัติเพื่อทำการสำรวจความสัมพันธ์ของข้อมูลสารสนเทศ **ขั้นตอนที่ 4** เปิดโอกาสให้ผู้เรียนสร้างความเข้าใจที่แข็งแกร่งต่อความเข้าใจมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	-	-	-
ขั้นที่ 2 ขั้นแสดงความเชื่อ (Expose Beliefs)	-	**ขั้นตอนที่ 5** การแลกเปลี่ยนความคิดของผู้เรียน	-	-	-

รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของสตีแพนส์และชมิดท์	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของเซอร์เบล	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของซาเดลา	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของไดค์สตราและคณะ	ทฤษฎีการซ่อมแซม	กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
ขั้นที่ 3 ขั้นเผชิญหน้ากับความเชื่อ **(Confront Beliefs)**	-	-	2. การขยายชั้นความเข้าใจ (Class Extension)	ขั้นที่ 2 ขั้นการหาความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ที่ผู้เรียนสร้างขึ้น	ขั้นที่ 2 วิเคราะห์ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน
ขั้นที่ 4 ขั้นจัดมโนทัศน์ **(Accommodate the Concept)**	-	-	3. การเปลี่ยนกรอบความเข้าใจ (Reconceptualization)	ขั้นที่ 3 ขั้นการแก้ไข **(Repair)**	ขั้นที่ 3 แก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน 3.1 สร้างมโนทัศน์ทางพีชคณิตใหม่ 3.2 ให้ผู้เรียนแลกเปลี่ยนและตรวจสอบมโนทัศน์
ขั้นที่ 5 ขั้นขยายมโนทัศน์ **(Extend the Concept)**	-	-	-	-	ขั้นที่ 3 การแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต 3.3 การเชื่อมโยงมโนทัศน์ใหม่ไปประยุกต์ใช้กับความรู้อื่น ๆ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของสตีแฟนส์และชมิดท์	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของเซอร์เบล	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของซาเดลา	รูปแบบการปรับมโนทัศน์ของไดค์สตราและคณะ	ทฤษฎีการซ่อมแซม	กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น
ขั้นที่ 6 ขั้นนอกเหนือบทเรียน (Go Beyond)	**ขั้นตอนที่ 1** การทำให้ผู้เรียนติดมโนทัศน์ใหม่ **ขั้นตอนที่ 2** การแนะนำตัวเชื่อม **ขั้นตอนที่ 3** การตั้งคำถามและการเผชิญหน้ากับผู้เรียน **ขั้นตอนที่ 4** การปฏิบัติและการสร้าง	-	-	-	-
-	-	-	-	**ขั้นที่ 4** ขั้นตรวจสอบการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	**ขั้นที่ 4** การตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน ว่ายังคงมีอยู่หรือไม่

RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

จากตารางภาคผนวกที่ 2 พบว่า ผลการสังเคราะห์กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต เป็น 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กระตุ้นประสบการณ์เดิมของผู้เรียน

ขั้นที่ 1 ขั้นมอบหมายงาน

ขั้นที่ 2 ขั้นกระตุ้นประสบการณ์เดิมต่าง ๆ ของผู้เรียน

ขั้นที่ 3 ขั้นนำผู้เรียนเข้าสู่ข้อมูลสารสนเทศใหม่

ขั้นที่ 4 ขั้นการปรับปรุงความเข้าใจ

ขั้นที่ 5 ขั้นเปิดโอกาสให้ผู้เรียนสร้างความเข้าใจ

ขั้นที่ 6 ขั้นลงมือปฏิบัติ

ขั้นที่ 7 ขั้นแลกเปลี่ยนความคิดของผู้เรียน

ขั้นตอนที่ 2 วิเคราะห์ลักษณะ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตที่นักเรียนสร้างขึ้น

ขั้นที่ 1 ขั้นการค้นหาความคลาดเคลื่อน

ขั้นที่ 2 ขั้นแสดงความคลาดเคลื่อน

ขั้นที่ 3 ขั้นเผชิญหน้ากับความคลาดเคลื่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการขยายชั้นความคลาดเคลื่อน

ขั้นตอนที่ 3 การแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

ขั้นที่ 1 ขั้นขจัดความคลาดเคลื่อน

ขั้นที่ 2 ขั้นเปลี่ยนกรอบความเข้าใจ

ขั้นที่ 3 ขั้นการสร้างมโนทัศน์ทางพีชคณิตใหม่

ขั้นที่ 4 ขั้นแลกเปลี่ยนและตรวจสอบมโนทัศน์

ขั้นที่ 5 ขั้นขยายมโนทัศน์

ขั้นที่ 6 ขั้นเชื่อมโยงมโนทัศน์ใหม่ไปประยุกต์ใช้กับความรู้อื่น ๆ

ขั้นที่ 7 ขั้นทำให้ผู้เรียนติดมโนทัศน์ใหม่

ขั้นตอนที่ 4 การตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

ขั้นที่ 1 ขั้นการตั้งคำถามและการเผชิญหน้ากับผู้เรียน

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติและการสร้าง

ขั้นที่ 3 ขั้นตรวจสอบการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ภาคผนวก ข

1. แบบบันทึกการสนทนากลุ่ม
2. แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 1
3. แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 2
5. แบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

แบบบันทึกการสนทนากลุ่ม (Focus Group)
เรื่อง การพัฒนากลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

วัน.....เดือน .....พ.ศ. .....

สถานที่สนทนากลุ่ม.....

ผู้เข้าร่วมสนทนากลุ่ม

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เริ่มการสนทนากลุ่มเวลา.....น.

สาระการสนทนากลุ่ม

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

เลิกการสนทนากลุ่ม เวลา.....น.

(ลงชื่อ).....ผู้จดบันทึกการสนทนากลุ่ม

(.....)

(ลงชื่อ).....ผู้ตรวจสอบบันทึกการสนทนากลุ่ม

(.....)

ตำแหน่ง.....

แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 1

คำชี้แจง

แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตฉบับนี้เป็นแบบวัดชนิดอัตนัยเพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ของนักศึกษาชั้นปีที่ 4 แบบวัดมีจำนวน 5 ข้อ

ข้อ 1 กำหนด $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า $(A + B) + C = A + (B+ C)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 2 จงใช้สองวิธีที่แตกต่างในการหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร ข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ -2x - y &= -4 \\ 4x + 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 3 กำหนดเมทริกซ์

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

จงอธิบายว่า A เป็น Singular Matrix หรือ Non - singular Matrix

โดยการพิสูจน์หรือแสดงวิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 4 จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์

$$\{[2\ \ 0\ -2\ \ 3]^T, [2\ 1\ 0\ 7]^T, [1\ \ 1\ 3\ 0]^T\}$$

ใน R^4 เป็น Linearly Independent Set

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 5 จงแสดงว่า $S = \{\begin{bmatrix} 2s-t \\ s-3t \\ -s+t \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in F\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbf{F}^4$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

เกณฑ์การให้คะแนนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 1

ข้อ 1 ถึงข้อ 5

ระดับคะแนน	คำอธิบาย
0	นักศึกษามีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้ง 3 ด้าน
1	นักศึกษามีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 2 ด้าน
2	นักศึกษามีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 1 ด้าน
3	นักศึกษาไม่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

หมายเหตุ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้ง 3 ด้าน คือ

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา

1.1 ใช้ทฤษฎีบทหรือนิยามที่ไม่เกี่ยวข้อง บิดเบือนทฤษฎีบทและหลักการ

1.2 ใช้สัญลักษณ์ผิด ทำให้คำตอบผิด

1.3 ไม่เข้าใจคำถาม

1.4 ใช้ภาษาคณิตศาสตร์ในการอธิบายความได้ไม่สมบูรณ์ ไม่ถูกต้อง ไม่ชัดเจน

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้

2.1 ขาดทักษะทางพีชคณิตที่จำเป็น

2.2 ขาดความรู้ในการพิสูจน์ทางพีชคณิต

2.3 ขาดความรู้ในการเลือกใช้วิธีแก้ปัญหาทางพีชคณิต

2.4 ขาดความรู้พื้นฐานทางพีชคณิต

3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

3.1 แก้ปัญหาโดยขาดหลักการทางพีชคณิต

3.2 การตรวจสอบคำตอบในระหว่างการแก้ปัญหาทางพีชคณิต และการตรวจสอบคำตอบเมื่อแก้ปัญหาทางพีชคณิตเสร็จสิ้น

3.3 แก้ปัญหาทางพีชคณิตไม่ตรงกับที่โจทย์ต้องการ

3.4 การลืมเสนอรายละเอียดบางส่วน

3.5 ละเลยข้อมูลที่จำเป็นในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

3.6 ใช้วิธีการที่ไม่เหมาะสมในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

3.7 การสรุปเป็นกรณีทั่วไปทางพีชคณิตไม่ได้

3.8 ขาดความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

3.9 แก้ปัญหาทางพีชคณิตไม่สมบูรณ์

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 2

คำชี้แจง

แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตฉบับนี้เป็นแบบวัดชนิดอัตนัยเพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ของนักศึกษาชั้นปีที่ 4 แบบวัดมีจำนวน 6 ข้อ

ข้อ 1. กำหนด $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า $(A + B) + C = A + (B + C)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 2. จงหา $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T$

เมื่อกำหนดให้ $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 3. จงใช้สองวิธีที่แตกต่างในการหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร ข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ -2x - y &= -4 \\ 4x + 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 4. กำหนดเมทริกซ์

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

จงอธิบายว่า A เป็น Singular Matrix หรือ Non - singular Matrix

โดยการพิสูจน์หรือแสดงวิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 5. จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์

$$\{[2\ \ 0\ -2\ \ 3]^T, [2\ 1\ 0\ 7]^T, [1\ \ 1\ 3\ 0]^T\}$$

ใน R^4 เป็น Linearly Independent Set

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 6. จงแสดงว่า $S = \{\begin{bmatrix} 2s-t \\ s-3t \\ -s+t \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in F\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbf{F}^4$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

เกณฑ์การให้คะแนนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 2

ข้อ 1 ถึงข้อ 6

ระดับคะแนน	คำอธิบาย
0	นักศึกษามีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้ง 3 ด้าน
1	นักศึกษามีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 2 ด้าน
2	นักศึกษามีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 1 ด้าน
3	นักศึกษาไม่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

หมายเหตุ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้ง 3 ด้าน คือ

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา

1.1 ใช้ทฤษฎีบทหรือนิยามที่ไม่เกี่ยวข้อง บิดเบือนทฤษฎีบทและหลักการ

1.2 ใช้สัญลักษณ์ผิด ทำให้คำตอบผิด

1.3 ไม่เข้าใจคำถาม

1.4 ใช้ภาษาคณิตศาสตร์ในการอธิบายความได้ไม่สมบูรณ์ ไม่ถูกต้อง ไม่ชัดเจน

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้

2.1 ขาดทักษะทางพีชคณิตที่จำเป็น

2.2 ขาดความรู้ในการพิสูจน์ทางพีชคณิต

2.3 ขาดความรู้ในการเลือกใช้วิธีแก้ปัญหาทางพีชคณิต

2.4 ขาดความรู้พื้นฐานทางพีชคณิต

3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

3.1 แก้ปัญหาโดยขาดหลักการทางพีชคณิต

3.2 การตรวจสอบคำตอบในระหว่างการแก้ปัญหาทางพีชคณิต และการตรวจสอบคำตอบเมื่อแก้ปัญหาทางพีชคณิตเสร็จสิ้น

3.3 แก้ปัญหาทางพีชคณิตไม่ตรงกับที่โจทย์ต้องการ

3.4 การลืมเสนอรายละเอียดบางส่วน

3.5 ละเลยข้อมูลที่จำเป็นในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

3.6 ใช้วิธีการที่ไม่เหมาะสมในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

3.7 การสรุปเป็นกรณีทั่วไปทางพีชคณิตไม่ได้

3.8 ขาดความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

3.9 แก้ปัญหาทางพีชคณิตไม่สมบูรณ์

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

แบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง

ข้อ 1. ให้นักศึกษาอธิบายวิธีการพิสูจน์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 2. ให้นักศึกษาอธิบายวิธีการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 3. ให้นักศึกษาอธิบายวิธีการลดรูป

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 4. ให้นักศึกษาอธิบายวิธีการหาค่า A^{-1}

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ภาคผนวก ค

1. แบบประเมินความสอดคล้องของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 1 กับกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

2. แบบประเมินความสอดคล้องของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 2 กับกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

แบบประเมินความสอดคล้อง
ของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ทางพีชคณิตชุดที่ 1 กับ
กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

คำชี้แจง โปรดพิจารณาความสอดคล้องของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตกับกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

พิจารณาแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตแต่ละข้อต่อไปนี้

โดยทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่อง ☐ โดยที่

☐ สอดคล้อง มีค่า +1

☐ ไม่แน่ใจ มีค่า 0

☐ ไม่สอดคล้อง มีค่า -1

ตามความคิดเห็นของท่าน พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลหรือข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

คำถามที่ 1

คำถามที่ 1 กำหนด $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า $(A + B) + C = A + (B + C)$

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

☐ สอดคล้อง ☐ ไม่แน่ใจ ☐ ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม MAHASARAKHAM UNIVERSITY

คำถามที่ 2

คำถามที่ 2 จงใช้สองวิธีที่แตกต่างในการหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร ข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ -2x - y &= -4 \\ 4x + 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

☐ สอดคล้อง ☐ไม่แน่ใจ ☐ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

คำถามที่ 3

คำถามที่ 3 กำหนดเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

จงอธิบายว่า A เป็น Singular Matrix หรือ Non - singular Matrix

โดยการพิสูจน์หรือแสดงวิธีทำ

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

☐ สอดคล้อง ☐ไม่แน่ใจ ☐ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

คำถามที่ 4

คำถามที่ 4 จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์

$$\{[2\ \ 0\ -2\ \ 3]^T, [2\ \ 1\ \ 0\ \ 7]^T, [1\ \ 1\ \ 3\ \ 0]^T\}$$

ใน R^4 เป็น Linearly Independent Set

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

☐ สอดคล้อง ☐ ไม่แน่ใจ ☐ ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

คำถามที่ 5

คำถามที่ 5 จงแสดงว่า $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2s-t \\ s-3t \\ -s+t \\ t \end{bmatrix} \middle| s,t \in F \right\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ F^4

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

☐ สอดคล้อง ☐ ไม่แน่ใจ ☐ ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

แบบประเมินความสอดคล้อง
ของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ทางพีชคณิตชุดที่ 2 กับ
กรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

คำชี้แจง โปรดพิจารณาความสอดคล้องของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตกับกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

พิจารณาแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตแต่ละข้อต่อไปนี้

โดยทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่อง ☐ โดยที่

☐ สอดคล้อง มีค่า +1

☐ ไม่แน่ใจ มีค่า 0

☐ ไม่สอดคล้อง มีค่า -1

ตามความคิดเห็นของท่าน พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลหรือข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

คำถามที่ 1

คำถามที่ 1 กำหนด $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า $(A + B) + C = A + (B + C)$
1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา 2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้ 3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา
☐ สอดคล้อง ☐ ไม่แน่ใจ ☐ ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
MAHASARAKHAM UNIVERSITY

คำถามที่ 2

คำถามที่ 2 จงหา $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T$

เมื่อกำหนดให้ $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

☐ สอดคล้อง ☐ไม่แน่ใจ ☐ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

คำถามที่ 3

คำถามที่ 3 จงใช้สองวิธีที่แตกต่างในการหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร ข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ -2x - y &= -4 \\ 4x + 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

☐ สอดคล้อง ☐ไม่แน่ใจ ☐ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

คำถามที่ 4

คำถามที่ 4 กำหนดเมทริกซ์

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

จงอธิบายว่า A เป็น Singular Matrix หรือ Non - singular Matrix

โดยการพิสูจน์หรือแสดงวิธีทำ

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

☐ สอดคล้อง ☐ไม่แน่ใจ ☐ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

คำถามที่ 5

คำถามที่ 5 จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์

$$\{[2\ \ 0\ -2\ \ 3]^T,[2\ 1\ 0\ 7]^T,[1\ \ 1\ 3\ 0]^T\}$$

ใน R^4 เป็น Linearly Independent Set

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

☐ สอดคล้อง ☐ไม่แน่ใจ ☐ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

คำถามที่ 6

คำถามที่ 6 จงแสดงว่า $S = \{ \begin{bmatrix} 2s-t \\ s-3t \\ -s+t \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in F \}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbf{F}^4$

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทฤษฎีบท สัญลักษณ์ และภาษา
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะ และความรู้
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหา

☐ สอดคล้อง ☐ไม่แน่ใจ ☐ไม่สอดคล้อง

เหตุผล/ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ภาคผนวก ง

1. การหาคุณภาพของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ชุดที่ 1

2. การหาคุณภาพของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต ชุดที่ 2

3. การตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นของสถิติทดสอบ t-test (Dependent t-test)

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางภาคผนวกที่ 3 ผลการวิเคราะห์ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตกับกรอบลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

	ข้อ	ผู้เชี่ยวชาญ											รวม	IOC	สรุปผล
		คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5	คนที่ 6	คนที่ 7	คนที่ 8	คนที่ 9	คนที่ 10	คนที่ 11			
ชุดที่ 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1.00	ใช้ได้
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1.00	ใช้ได้
	3	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	8	0.73	ใช้ได้
	4	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	10	0.91	ใช้ได้
	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1.00	ใช้ได้
ชุดที่ 2	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	9	0.82	ใช้ได้
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1.00	ใช้ได้
	3	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	10	0.91	ใช้ได้
	4	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	8	0.73	ใช้ได้
	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1.00	ใช้ได้
	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1.00	ใช้ได้

ตารางภาคผนวกที่ 4 ความยากง่าย (PE) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

ชุดที่	ข้อที่	PE	D
1	1	0.63	0.82
	2	0.62	0.81
	3	0.66	0.86
	4	0.73	0.94
	5	0.51	0.67
2	1	0.68	0.89
	2	0.40	0.47
	3	0.68	0.89
	4	0.77	1.00
	5	0.73	0.94
	6	0.69	0.90

การหาความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 1 ซึ่งใช้สูตรการหาสัมประสิทธิ์อัลฟา (α Coefficient) ของ Cronbach ได้ค่า Cronbach's Alpha เท่ากับ 0.932

การหาความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 2 ซึ่งใช้สูตรการหาสัมประสิทธิ์อัลฟา (α Coefficient) ของ Cronbach ได้ค่า Cronbach's Alpha เท่ากับ 0.81

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

การตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นของสถิติทดสอบ t-test (Dependent t-test)

ข้อตกลงเบื้องต้นของสถิติทดสอบ t-test (Dependent t-test) คือ ข้อมูลหรือประชากรต้องมีการแจกแจงแบบปกติ มีวิธีการตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นของสถิติทดสอบ ดังนี้

1. ตั้งสมมุติฐาน

   H_0: ผลต่างของคะแนนเฉลี่ยมีการแจกแจงแบบปกติ

   H_1: ผลต่างของคะแนนเฉลี่ยมีการแจกแจงแบบไม่ปกติ

2. ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
di	.150	80	.200(*)	.960	80	.692

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

เนื่องจาก Sig.=.000 ของ Kolmogorov-Smirnov ซึ่งมากกว่า $\alpha = 0.05$ ดังนั้น จึงยอมรับ H_0 นั่นคือ ผลต่างของคะแนนเฉลี่ยมีการแจกแจงแบบปกติที่ระดับนัยสำคัญ .05

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ภาคผนวก จ

1. เฉลยแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 1
2. เฉลยแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 2

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

เฉลยแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 1

ข้อ 1 กำหนด $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน

จงพิสูจน์ว่า $(A + B) + C = A + (B+ C)$

พิสูจน์ กำหนด 1. F1 $(a+b)+c=a+(b+c)$; $\forall a,b,c \in F$

2. นิยามการบวกของเมทริกซ์ คือ $A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$

(A1) จะแสดงว่าสมบัติเปลี่ยนกลุ่มได้ภายใต้การบวกเป็นจริง

ให้ $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$ และ $C=\left[c_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน พิจารณา

$$(A+B)+C=(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right])+\left[c_{ij}\right]$$
$$=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right] \quad \text{(นิยามการบวกของเมริกซ์)}$$
$$=\left[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\right] \quad \text{(นิยามการบวกของเมริกซ์)}$$
$$=\left[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\right] \quad \text{(จากนิยามของฟิลด์ (F1))}$$
$$=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}+c_{ij}\right] \quad \text{(นิยามการบวกของเมริกซ์)}$$
$$=\left[a_{ij}\right]+(\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right]) \quad \text{(นิยามการบวกของเมริกซ์)}$$
$$=A+(B+C) \quad \text{(นิยามการบวกของเมริกซ์)}$$

ข้อ 2 จงหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร ข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ -2x - y &= -4 \\ 4x + 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

วิธีที่ 1 หาผลเฉลยโดยขั้นตอนวิธีของเกาส์จอร์แดน

เมทริกซ์แต่งเติมสำหรับระบบเริ่มต้นเป็น

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

หลักแรกมีสมาชิกใหม่เป็นศูนย์ดังนั้นไม่ต้องใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่หนึ่ง และสมาชิก $a_{1_{c1}}$ เป็น 1 แล้ว ไม่ต้องใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สองต่อไปจะต้องทำให้ $a_{2_{c1}}$ (-2) และ $a_{3_{c1}}$ (4) เป็นศูนย์ โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สาม $R_2 \rightarrow R_2+2R_1$ และ $R_3 \rightarrow R_3-4R_1$ ตามลำดับ ได้เมทริกซ์แต่งเติมใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 15 & -5 \end{bmatrix}$$

เข้าสู่ขั้นตอนที่ 2 เนื่องจากสมาชิก $a_{2_{c1}}$ เป็น 1 แล้ว ดังนั้นไม่ต้องใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่หนึ่งและแบบที่สอง ต่อไปต้องทำให้ $a_{1_{c2}}(1)$ และ $a_{3_{c2}}(-2)$ เป็นศูนย์ โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สาม $R_1 \rightarrow R_1\text{-}1R_2$ และ $R_3 \rightarrow R_3+2R_2$ ตามลำดับ ได้เมทริกซ์แต่งเติมใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า การใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานต่าง ๆ ไม่ทำให้หลักที่หนึ่งเปลี่ยนแปลงเพราะสมาชิกแรกในแถวที่สองและแถวที่สามเป็นศูนย์

ต่อไปพิจารณาแถวที่สาม มีสมาชิก $a_{3_{c3}}$ เป็น 3 ต้องทำให้เป็น 1 โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สอง $R_3 \rightarrow \frac{1}{3}R_3$ ได้เมทริกซ์แต่งเติมใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

จากนั้นทำให้ $a_{1_{c3}}(3)$ และ $a_{2_{c3}}(-6)$ เป็นศูนย์ โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สาม $R_1 \rightarrow R_1+\text{-}3R_2$ และ $R_2 \rightarrow R_2+6R_3$ ตามลำดับ ได้เมทริกซ์แต่งเติมใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = B$$

เมทริกซ์แต่งเติมที่ได้นี้อยู่ในรูปขั้นบันไดตามแถวลดรูปแล้ว ซึ่งแทนระบบสมการเชิงเส้น

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 0$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

$$x_3 = -\frac{1}{3}$$

และมีผลเฉลยเดียวเท่านั้น $X=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

เนื่องจากเมทริกซ์แต่งเติม A สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์แต่งเติม B

ดังนั้น X เป็นผลเฉลยของระบบเริ่มต้นด้วย

ข้อ 3 กำหนดเมทริกซ์

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

จงอธิบายว่า A เป็น Singular Matrix หรือ Non - singular Matrix

โดยการพิสูจน์หรือแสดงวิธีทำ

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \\ &= -3+24-24 \\ &= -3 \neq 0 \end{aligned}$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 12 & -15 & 6 \\ -8 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AA^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\8&8&9\end{bmatrix}\right)\left(-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3&6&-3\\12&-15&6\\-8&8&-3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=I$$

ข้อ 4 จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์

$$\{[2\ \ 0\ -2\ \ 3]^T,[2\ \ 1\ \ 0\ \ 7]^T,[1\ \ 1\ \ 3\ \ 0]^T\}$$

ใน R^4 เป็น Linearly Independent Set

วิธีทำ สมมติมีสเกลาร์ r, s และ t โดยที่

$$\left\{[2\ \ 0\ \ -2\ \ 3]^T+s[2\ \ 1\ \ 0\ \ 7]^T+t[1\ \ 1\ \ 3\ \ 0]^T\right\}=\bar{0}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$$

โดยการเท่ากันของเมทริกซ์จะได้ ระบบ 4 สมการ 3 ตัวแปร ดังนี้

$$2r+2s+t\ =0$$

$$s+t\ =0$$

$$-2r\ \ +3t=0$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ในที่นี้ขอละวิธีหาผลเฉลยไว้

เอกพันธุ์นี้มีผลเฉลยชัด $(r=s=t\ =0)$

จะได้ว่าเซตที่กำหนดให้เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

ข้อ 5 จงแสดงว่า $S=\left\{\begin{bmatrix}2s-t\\s-3t\\-s+t\\t\end{bmatrix}\middle|s,t\in F\right\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ F^4

วิธีทำ กำหนด S เป็นปริภูมิย่อยของ F^4 ถ้ามีสมบัติ ดังนี้

1. $S_1\ \ \bar{0}\in S$
2. ถ้า $x\in S$ และ $y\in S$ แล้ว $x+y\in S$
3. ถ้า $x\in S$ และ $t\in F$ แล้ว $tx\in S$

1) $\bar{0} \in S$ (เมื่อแทน $s = t = 0$) ดังนั้นสอดคล้องกับ (S1)

2) ถ้า $X_1 = \begin{bmatrix} 2s_1 - t_1 \\ s_1 - 3t_1 \\ -s_1 + t_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$ และ $X_2 = \begin{bmatrix} 2s_2 - t_2 \\ s_2 - 3t_2 \\ -s_2 + t_2 \\ t_2 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$X_1 + X_2 = \begin{bmatrix} 2s_3 - t_3 \\ s_3 - 3t_3 \\ -s_3 + t_3 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $s_3 = s_1 + s_2$ และ $t_3 = t_1 + t_2$

ดังนั้นสอดคล้องกับ (S2)

3) ถ้า $X = \begin{bmatrix} 2s_0 - t_0 \\ s_0 - 3t_0 \\ -s_0 + t_0 \\ t_0 \end{bmatrix}$ และ $k \in F$ แล้ว

$$kX = k = \begin{bmatrix} 2s_0 - t_0 \\ s_0 - 3t_0 \\ -s_0 + t_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ks_0 - kt_0 \\ ks_0 - 3kt_0 \\ -ks_0 + kt_0 \\ kt_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s - t \\ s - 3t \\ -s + t \\ t \end{bmatrix}$$

เมื่อ $s = ks_0$ และ $t = kt_0$

ดังนั้นสอดคล้องกับ (S3)

จากทั้งสามข้อ สรุปได้ว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ F^4

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

เฉลยแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตชุดที่ 2

ข้อ 1 กำหนด $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน

จงพิสูจน์ว่า $(A + B) + C = A + (B + C)$

พิสูจน์ กำหนด 1. F1 $(a+b)+c=a+(b+c)$; $\forall a,b,c \in F$

2. นิยามการบวกของเมทริกซ์ คือ $A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$

(A1) จะแสดงว่าสมบัติเปลี่ยนกลุ่มได้ภายใต้การบวกเป็นจริง

ให้ $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$ และ $C=\left[c_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน พิจารณา

$(A+B)+C=(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right])+\left[c_{ij}\right]$

$=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right]$ (นิยามการบวกของเมริกซ์)

$=\left[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\right]$ (นิยามการบวกของเมริกซ์)

$=\left[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\right]$ (จากนิยามของฟิลด์ (F1))

$=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}+c_{ij}\right]$ (นิยามการบวกของเมริกซ์)

$=\left[a_{ij}\right]+(\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right])$ (นิยามการบวกของเมริกซ์)

$=A+(B+C)$ (นิยามการบวกของเมริกซ์)

ข้อ 2 จงหา $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T$

เมื่อกำหนดให้ $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จาก $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+4 & 6+a+b \\ -1+c+d & 2d+3 \end{bmatrix}$

$3a = a+4$ ———— (1)

$3b = 6+a+b$ ———— (2)

$3c = -1+c+d$ ———— (3)

$3d = 2d+3$ ———— (4)

หาค่า a จาก (1) จะได้ $a=2$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

หาค่า b โดยแทน a=2 ใน (2) จะได้

$$3b = 6 + 2 + b$$

$$3b - b = 8$$

$$b = 4$$

หาค่า d จาก (4) จะได้ $3d = 2d + 3$

$$3d - 2d = 3$$

$$d = 3$$

หาค่า c โดยแทน d=3 ใน (3) จะได้

$$3c = -1 + c + 3$$

$$3c - c = 2$$

$$c = 1$$

$\therefore a=2, b=4, c=1, d=3$

แทนค่า $a=2, b=4, c=1, d=3$

ใน $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T$

จะได้ $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^T$

หาค่า $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(2)+(4)(4) & (2)(1)+(4)(3) \\ (1)(2)+(3)(4) & (1)(1)+(3)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+16 & 2+12 \\ 2+12 & 1+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 3 จงหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร ข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ -2x - y &= -4 \\ 4x + 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

วิธีที่ 1 หาผลเฉลยโดยขั้นตอนวิธีของเกาส์จอร์แดน

เมทริกซ์แต่งเติมสำหรับระบบเริ่มต้นเป็น

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

หลักแรกมีสมาชิกใหม่เป็นศูนย์ดังนั้นไม่ต้องใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่หนึ่ง และสมาชิก $a_{1_{c1}}$ เป็น 1 แล้ว ไม่ต้องใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สอง ต่อไปจะต้องทำให้ $a_{2_{c1}}$(-2) และ $a_{3_{c1}}$(4) เป็นศูนย์ โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สาม $R_2 \rightarrow R_2+2R_1$ และ $R_3 \rightarrow R_3-4R_1$ ตามลำดับ ได้เมทริกซ์แต่งเติมใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 15 & -5 \end{bmatrix}$$

เข้าสู่ขั้นตอนที่ 2 เนื่องจากสมาชิก $a_{2_{c1}}$ เป็น 1 แล้ว ดังนั้นไม่ต้องใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่หนึ่งและแบบที่สอง ต่อไปต้องทำให้ $a_{1_{c2}}$(1) และ $a_{3_{c2}}$(-2) เป็นศูนย์ โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สาม $R_1 \rightarrow R_1-1R_2$ และ $R_3 \rightarrow R_3+2R_2$ ตามลำดับ ได้เมทริกซ์แต่งเติมใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า การใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานต่าง ๆ ไม่ทำให้หลักที่หนึ่งเปลี่ยนแปลงเพราะสมาชิกแรกในแถวที่สองและแถวที่สามเป็นศูนย์

ต่อไปพิจารณาแถวที่สาม มีสมาชิก $a_{3_{c3}}$ เป็น 3 ต้องทำให้เป็น 1 โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สอง $R_3 \rightarrow \frac{1}{3}R_3$ ได้เมทริกซ์แต่งเติมใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

จากนั้นทำให้ $a_{1_{c3}}(3)$ และ $a_{2_{c3}}(-6)$ เป็นศูนย์ โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานแบบที่สาม $R_1 \rightarrow R_1 + -3R_2$ และ $R_2 \rightarrow R_2 + 6R_3$ ตามลำดับ ได้เมทริกซ์แต่งเติมใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = B$$

เมทริกซ์แต่งเติมที่ได้นี้อยู่ในรูปขั้นบันไดตามแถวลดรูปแล้ว ซึ่งแทนระบบสมการเชิงเส้น

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = -\frac{1}{3}$$

และมีผลเฉลยเดียวเท่านั้น $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

เนื่องจากเมทริกซ์แต่งเติม A สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์แต่งเติม B

ดังนั้น X เป็นผลเฉลยของระบบเริ่มต้นด้วย

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 4 กำหนดเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

จงอธิบายว่า A เป็น Singular Matrix หรือ Non - singular Matrix

โดยการพิสูจน์หรือแสดงวิธีทำ

วิธีทำ

$$\det A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$=-3+24-24$$

$$=-3\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\text{adj}A=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & C_{31}\\ C_{12} & C_{22} & C_{32}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}5 & 9\\ 8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4 & 5\\ 8 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 8 & 8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & 6 & -3\\ 12 & -15 & 6\\ -8 & 8 & -3\end{bmatrix}$$

$$\therefore AA^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}\right)\left(-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & 6 & -3\\ 12 & -15 & 6\\ -8 & 8 & -3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=I$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อ 5 จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์

$$\{[2\ \ 0\ -2\ \ 3]^T,[2\ \ 1\ \ 0\ \ 7]^T,[1\ \ 1\ \ 3\ \ 0]^T\}$$

ใน R^4 เป็น Linearly Independent Set

วิธีทำ สมมติมีสเกลาร์ r, s และ t โดยที่

$$\left\{[2\ \ 0\ \ -2\ \ 3]^T+s[2\ \ 1\ \ 0\ \ 7]^T+t[1\ \ 1\ \ 3\ \ 0]^T\right\}=\bar{0}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$$

โดยการเท่ากันของเมทริกซ์จะได้ ระบบ 4 สมการ 3 ตัวแปร ดังนี้

$$2r+2s+t\ \ =0$$

$$s+t\ \ =0$$

$$-2r \qquad +3t=0$$

ในที่นี้ขอละวิธีหาผลเฉลยไว้

เอกพันธุ์นี้มีผลเฉลยชัด $(r=s=t=0)$

จะได้ว่าเซตที่กำหนดให้เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ภาคผนวก ฉ
ตัวอย่างการจัดการเรียนการสอนเพื่อแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตัวอย่างการจัดการเรียนการสอนเพื่อแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน

ขั้นที่ 1 กระตุ้นประสบการณ์เดิมของผู้เรียน

1. ครูตั้งปัญหาทางพีชคณิต ดังนี้

ปัญหาที่ 1 เมื่อ s และ t เป็นสเกลาร์ และ A,B และ C เป็นเมทริกซ์ขนาดเดียวกันบนฟิลด์ F จงพิสูจน์ว่า $A+(-A) = \bar{0}$

ปัญหาที่ 2 จงใช้สองวิธีที่แตกต่างในการหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรข้างล่างนี้

$$x + y + z = 2$$
$$2x + 3y - z = 8$$
$$x - y - z = -8$$

ปัญหาที่ 3 กำหนดเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

จงอธิบายว่า A เป็น Singular Matrix หรือ Non - singular Matrix โดยการพิสูจน์หรือแสดงวิธีทำ

ปัญหา 4 จงแสดงว่าเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็น Linearly Independent Set หรือ Non Linearly Independent Set

$$\{[1 \ -1 \ 1 \ -1]^T, [2 \ 0 \ 1 \ 0]^T, [0 \ -2 \ 1 \ -2]^T\} \text{ ใน } R^4$$

ปัญหา 5 กำหนด $S = \{[r \ r \ t]^T \mid r, t \text{ อยู่ใน} \mathbf{R}\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbf{R}^3$ หรือไม่

ในขั้นนี้ผู้เรียนจะได้คิดและลงมือปฏิบัติเพื่อแก้ปัญหานั้นด้วยตนเอง

ขั้นที่ 2 วิเคราะห์ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน

ผู้วิจัยให้นักศึกษาที่เป็นกลุ่มเป้าหมายทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต และนำผลการทดสอบมาวิเคราะห์หามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต เพื่อพิจารณาว่าผู้เรียนตอบปัญหาไม่ถูกต้องนั้นเกิดจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตด้านใด

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ขั้นที่ 3 การแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน

3.1 สร้างมโนทัศน์ทางพีชคณิตใหม่

3.1.1 ครูตั้งปัญหาทางพีชคณิต ดังนี้

ปัญหาที่ 1 กำหนด $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า $A + B = B + C$

ปัญหาที่ 2 จงใช้สองวิธีที่แตกต่างในการหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร ข้างล่างนี้

$$2x + 2y + 2z = 5$$
$$7x + 7y + z = 10$$
$$5x + 5y - z = 5$$

ปัญหาที่ 3 กำหนดเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

จงอธิบายว่า A เป็น Singular Matrix หรือ Non - singular Matrix โดยการพิสูจน์หรือแสดงวิธีทำ

ปัญหาที่ 4 จงแสดงว่าเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็น Linearly Independent Set หรือ NonLinearly Independent Set

$$\{[1 \ -1 \ 1 \ -1]^T, [2 \ 0 \ 1 \ 0]^T, [0 \ -2 \ 1 \ -2]^T\} \text{ ใน } R^5$$

ปัญหาที่ 5 กำหนด $S = \{[r \ r \ t]^T \mid r, t \text{ อยู่ใน} \mathbf{R}\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbf{R}^4$ หรือไม่

3.1.2 ผู้เรียนลงมือหาคำตอบโดยการสืบค้นจากข้อมูลปฐมภูมิ เช่นการคิดหาคำตอบด้วยตนเอง หรือการสืบค้นจากข้อมูลทุติยภูมิ เช่น จากหนังสือ จากอินเตอร์เน็ต

3.1.3 ครูจะตั้งคำถามทางพีชคณิตที่น่าสนใจเพื่อกระตุ้นความใคร่รู้ในตัวผู้เรียน

3.2 ให้ผู้เรียนแลกเปลี่ยนและตรวจสอบมโนทัศน์

3.2.1 ครูให้ผู้เรียนนำเสนอวิธีการแก้ปัญหา และวิธีการตรวจคำตอบของตนเองเพื่อแลกเปลี่ยนวิธีการในการแก้ปัญหาของตนเองกับเพื่อนในกลุ่ม ในขั้นนี้ครูมีหน้าที่ตั้งคำถาม เช่น

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

1) นักศึกษามีวิธีการคิดอย่างไร ?

2) ใครมีวิธีการแก้ปัญหาวิธีอื่นบ้าง ?

3) ให้นักศึกษาคุยกับเพื่อนว่าสิ่งที่นำเสนอมีส่วนไหนที่คล้ายคลึงกันและแตกต่างกันบ้าง ? สาเหตุเกิดจากอะไร ?

3.3 การเชื่อมโยงมโนทัศน์ใหม่ไปประยุกต์ใช้กับความรู้อื่น ๆ

3.3.1 ครูตั้งปัญหาทางพีชคณิตใหม่ที่คล้ายคลึงกันหรือยากขึ้นทันทีหลังจากขั้น 3.2 ปัญหาทางพีชคณิต ดังนี้

ปัญหาที่ 1 เมื่อ s และ t เป็นสเกลาร์ และ A,B และ C เป็นเมทริกซ์ขนาดเดียวกันบนฟิลด์ F จงพิสูจน์ว่า $t(A + B) = tA + tB$, $t(A - B) = tA - tB$

ปัญหาที่ 2 จงใช้สองวิธีที่แตกต่างในการหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} 3x - y + 7z &= 0 \\ 2x - y + 4z &= \frac{1}{2} \\ x - y + z &= 1 \\ 6x - 4y + 10z &= 3 \end{aligned}$$

ปัญหาที่ 3 กำหนดเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

จงอธิบายว่า A เป็น Singular Matrix หรือ Non - singular Matrix โดยการพิสูจน์หรือแสดงวิธีทำ

ปัญหาที่ 4 จงแสดงว่าเซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็น Linearly Independent Set หรือ Non Linearly Independent Set

$$\{[1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T, [2 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T, [0 \quad -2 \quad 1 \quad -2]^T\} \text{ ใน } R^6$$

ปัญหาที่ 5 กำหนด $S = \{[r \quad r \quad t]^T \mid r, t \text{ อยู่ใน} \mathbf{R}\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbf{R}^5$ หรือไม่

3.3.2 ครูตรวจสอบว่านักศึกษาแต่ละคนเข้าใจมากน้อยเพียงใด

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของผู้เรียน

ผู้วิจัยให้นักศึกษาที่เป็นกลุ่มเป้าหมายทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตหลังการใช้กลวิธีในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตแล้ว และนำผลการทดสอบมาวิเคราะห์หามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ภาคผนวก ช

1. ตัวอย่างการสัมภาษณ์เชิงลึก โดยใช้การบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Description) จากแบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง

2. ตัวอย่างการวิเคราะห์ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตัวอย่างการสัมภาษณ์เชิงลึก โดยใช้การบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Description) จากแบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง

ผู้วิจัยนำเสนอตัวอย่างการสัมภาษณ์เชิงลึก โดยใช้การบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Description) จากแบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง ซึ่งเป็นการสัมภาษณ์เชิงลึก เนื้อหาเรื่องการหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร (ข้อ 3) สัมภาษณ์นางสาวนิษฐา สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 4

ข้อ 3 จงใช้สองวิธีที่แตกต่างในการหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร ข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ -2x - y &= -4 \\ 4x + 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

โดยใช้การวิเคราะห์งานเขียน (Task Analysis) จากแบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง ดังต่อไปนี้

ครู : จากโจทย์ข้อ 3 ให้ผู้เรียนอธิบายวิธีการการหาผลเฉลยของระบบ 3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร

นิษฐา: ผู้เรียนหยุดคิด แล้วตอบว่าเมทริกซ์ คือ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ จะทำการลดรูปโดยใช้ $R_2 = 2R_1 + R_2$ จะได้เมทริกซ์ คือ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ จะทำการลดรูปโดยใช้ $R_3 = -4R_1 + R_3$ จะได้เมทริกซ์ คือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 15 & 5 \end{bmatrix}$ และจะทำการลดรูปโดยใช้ $R_2 = R_2 + R_3$ จะได้เมทริกซ์ คือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & -2 & 15 & 5 \end{bmatrix}$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ผลการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Description)

จากปัญหานี้ พบว่า ผู้เรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหาทางพีชคณิต ซึ่งตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่านักศึกษามีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการเขียนขั้นตอนการแก้ปัญหาที่ไม่ถูกต้อง ซึ่งขั้นตอนที่ถูกต้องควรจะเขียน

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 15 & -5 \end{bmatrix}$$

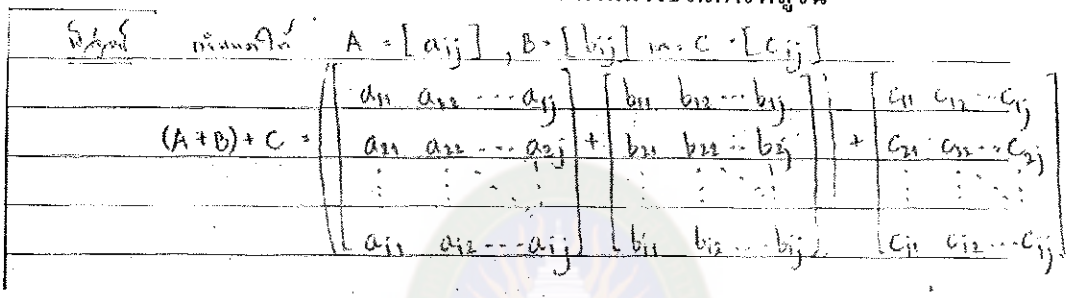
มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตัวอย่างการวิเคราะห์ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการพิสูจน์ การใช้สัญลักษณ์ และการให้เหตุผลทางพีชคณิต

1.1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการพิสูจน์ทางพีชคณิต

1.1.1 นักศึกษาไม่ได้นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์



1.1.2 นักศึกษาเข้าใจว่าการยกตัวอย่างคือการพิสูจน์

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

1.1.3 นักศึกษานำทฤษฎีที่ไม่เกี่ยวข้องมาใช้ในการพิสูจน์

$$(A+B)+C = \sum_{i=1} (a+b)_{ij} + c_{ij}$$

$$= \sum_{i=1} (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

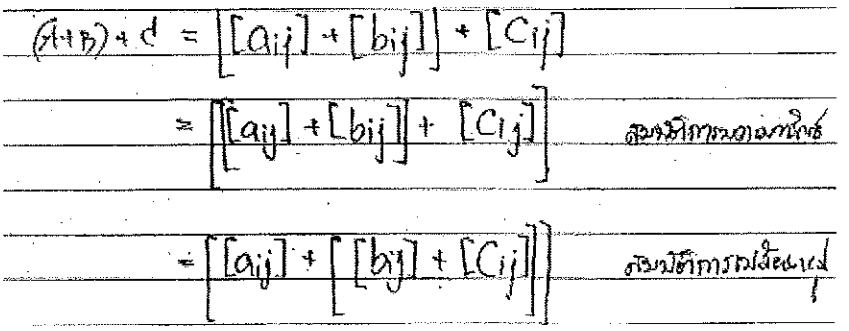
1.2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนการใช้สัญลักษณ์ ทางพีชคณิต

$$(A+B)+C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$$

$$= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

$$= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

1.3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการให้เหตุผลทางพีชคณิต



จากตัวอย่างที่ 1 ข้อ 1.1 – 1.3 ที่ถูกต้องก็คือ

กำหนด $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน

$(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$ โจทย์กำหนด

$= ([a_{ij} + b_{ij}]) + [c_{ij}]$ นิยามการบวกของเมทริกซ์

$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$ นิยามการบวกของเมทริกซ์

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ จากนิยามของฟิลด์ (F1)

$= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]$ นิยามการบวกของเมทริกซ์

$= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}])$ นิยามการบวกของเมทริกซ์

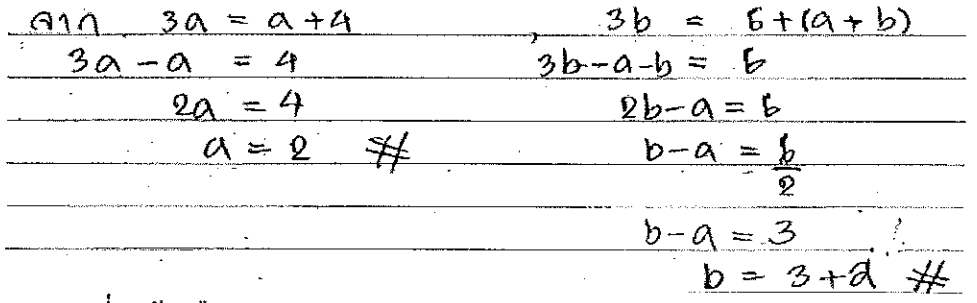
$= A + (B + C)$ โจทย์กำหนด

ดังนั้น $(A + B) + C = A + (B + C)$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตัวอย่างที่ 2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านทักษะทางพีชคณิต

2.1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการแก้สมการ



ที่ถูกต้องคือ

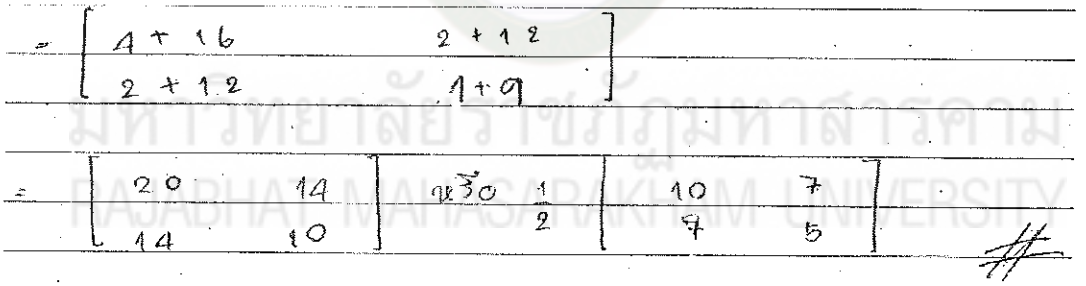
$3a = a + 4$ $\qquad$ $3b = 6 + a + b$

$3a - a = 4$ $\qquad$ $3b = 6 + 2 + b$

$2a = 4$ $\qquad$ $3b - b = 8$

$a = 2$ $\qquad$ $b = 4$

2.2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการเสนอคำตอบ

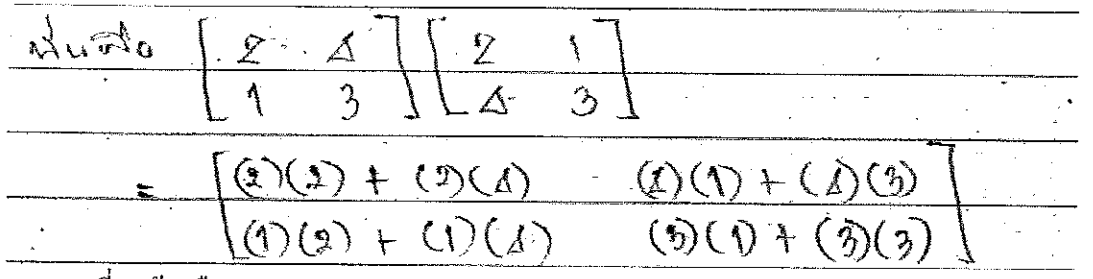


ที่ถูกต้องคือ

$= \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$ หรือ $2\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

2.3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในทักษะการดำเนินการทางพีชคณิต



ที่ถูกต้องคือ

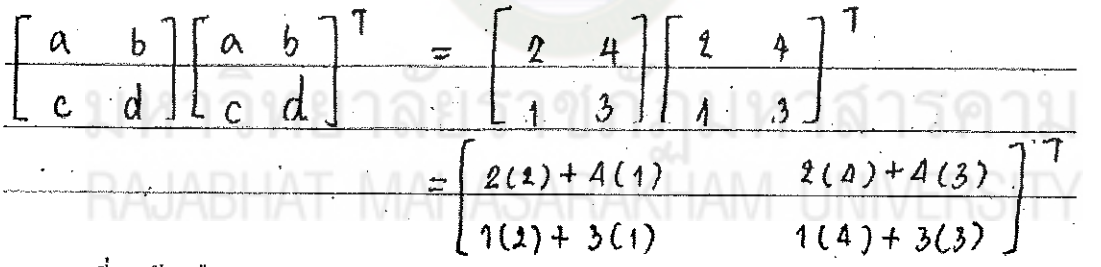
$$=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(2)(2)+(4)(4) & (2)(1)+(4)(3)\\ (1)(2)+(3)(4) & (1)(1)+(3)(3)\end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการแก้ปัญหาทางพีชคณิต

3.1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการนำหลักการทางพีชคณิต

มาใช้แก้ปัญหาไม่ถูกต้อง



ที่ถูกต้องคือ

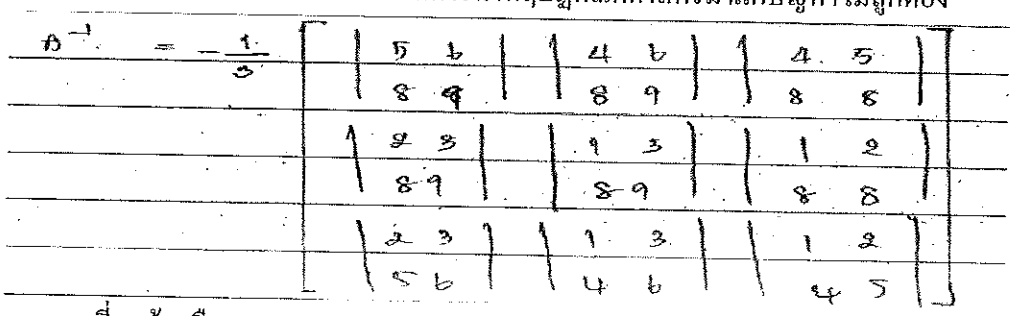
$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(2)(2)+(4)(4) & (2)(1)+(4)(3)\\ (1)(2)+(3)(4) & (1)(1)+(3)(3)\end{bmatrix}$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

3.2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการนำทฤษฎีคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง



ที่ถูกต้องคือ

กำหนด $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$

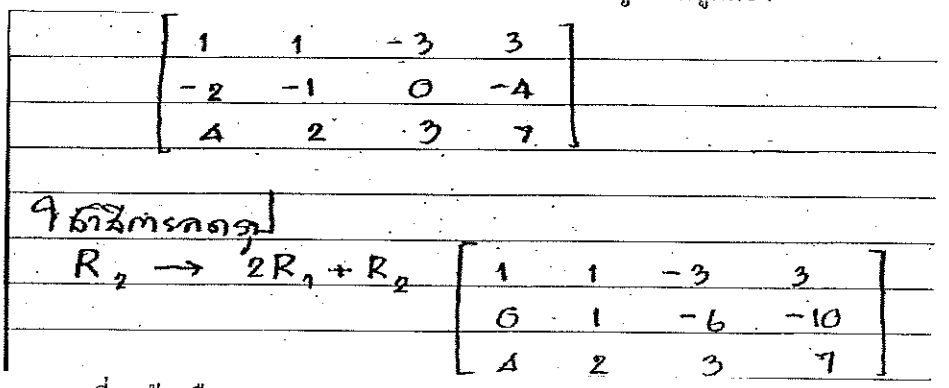
$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}A$$

$$=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & C_{31}\\ C_{12} & C_{22} & C_{32}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4 & 5\\ 8 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 8 & 8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

3.3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในขั้นตอนการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง



ที่ถูกต้องคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 15 & -5 \end{bmatrix}$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY