

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยนำเสนอตามลำดับ ดังต่อไปนี้

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

3. ข้อผิดพลาด

4. การวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด

5. การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

6. แบบทดสอบ

7. เกณฑ์การให้คะแนน

8. การสัมภาษณ์

9. การหาคุณภาพเครื่องมือ

10. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

10.1 งานวิจัยในประเทศ

10.2 งานวิจัยต่างประเทศ

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ทำไมต้องเรียนคณิตศาสตร์

วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เป็นวิชาบังคับ คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ

ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม นอกจากนี้ คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับคนอื่นได้อย่างมีความสุข

เรียนรู้อะไรในคณิตศาสตร์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์มุ่งให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องตามศักยภาพ โดยกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน ดังนี้

จำนวนและการดำเนินการ: ความคิดรวบยอดและความรู้สึกเชิงจำนวน ระบบจำนวนจริง สมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริง การดำเนินการของจำนวน อัตราส่วน ร้อยละ การแก้ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน และการใช้จำนวนในชีวิตจริง

การวัด: ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตรและความจุ เงินและเวลา หน่วยวัดระบบต่าง ๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติ การแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ

เรขาคณิต: รูปเรขาคณิตและสมบัติของรูปเรขาคณิตหนึ่งมิติ สองมิติ และสามมิติ การนิยามภาพ แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิต (Geometric Transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation)

พีชคณิต: แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เซตและการดำเนินการของเซต การให้เหตุผล นิพจน์ สมการ ระบบสมการ อสมการ กราฟ ลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต อนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต

การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น: การกำหนดประเด็น การเขียนข้อความ การกำหนดวิธีการศึกษา การเก็บรวบรวมข้อมูล การจัดระบบข้อมูล การนำเสนอข้อมูล ค่ากลางและการกระจายของข้อมูล การวิเคราะห์และการแปลความข้อมูล การสำรวจความคิดเห็น ความน่าจะเป็น การใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นในการอธิบายเหตุการณ์ต่างๆ และช่วยในการตัดสินใจในการดำเนินชีวิตประจำวัน

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

วิสัยทัศน์

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน มุ่งพัฒนาผู้เรียนทุกคน ซึ่งเป็นกำลังของชาติให้เป็นมนุษย์ที่มีความสมดุลทั้งด้านร่างกาย ความรู้ คุณธรรม มีจิตสำนึกในความเป็นพลเมืองไทยและเป็นพลโลก ยึดมั่นในการปกครองตามระบอบประชาธิปไตยอันมีพระมหากษัตริย์ทรงเป็นประมุข มีความรู้และทักษะพื้นฐาน รวมทั้งเจตคติ ที่จำเป็นต่อการศึกษาต่อ การประกอบอาชีพ และการศึกษาตลอดชีวิต โดยมุ่งเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญบนพื้นฐานความเชื่อว่า ทุกคนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้เต็มตามศักยภาพ

สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ และต้องการเรียนรู้คณิตศาสตร์มากขึ้น ถือว่าเป็นหน้าที่ของทางโรงเรียน ที่จะจัดโปรแกรมการเรียนการสอนให้แก่ นักเรียน เพื่อให้นักเรียนได้มีโอกาสเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมตามความสมัครและความสนใจ ทั้งนี้เพื่อให้นักเรียนมีความรู้ที่ทัดเทียมกับนานาชาติอารยประเทศ

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

- มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง
- มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่าง การดำเนินการต่าง ๆ และใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหา
- มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา
- มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำเสนอบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 2 การวัด

- มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด
- มาตรฐาน ค 2.2 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

- มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปร่างเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนึกภาพ (Visualization) ให้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial Reasoning) และ ใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric Model) ในการแก้ปัญหา

สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล

มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

คุณภาพผู้เรียน

คุณภาพของผู้เรียนเมื่อจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริง มีความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วน สัดส่วน ร้อยละ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง สามารถดำเนินการเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เศษส่วน ทศนิยม เลขยกกำลัง รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง ใช้การประมาณค่าในการดำเนินการและแก้ปัญหา และนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนไปใช้ในชีวิตจริงได้

2. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของปริซึม ทรงกระบอก และปริมาตรของปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย และทรงกลม เลือกใช้หน่วยการวัดในระบบ

ต่างๆ เกี่ยวกับความยาว พื้นที่ และปริมาตรได้อย่างเหมาะสม พร้อมทั้งสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในชีวิตจริงได้

3. สามารถสร้างและอธิบายขั้นตอนการสร้างรูปเรขาคณิตสองมิติโดยใช้วงเวียนและสันตรง อธิบายลักษณะและสมบัติของรูปเรขาคณิตสามมิติซึ่งได้แก่ ปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้

4. มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการ และความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ และสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ มีความเข้าใจเกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิต (Geometric-transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation) และนำไปใช้ได้

5. สามารถนิยามและอธิบายลักษณะของรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

6. สามารถวิเคราะห์และอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูป สถานการณ์หรือปัญหา และสามารถใช้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และกราฟในการแก้ปัญหาได้

7. สามารถกำหนดประเด็น เขียนข้อคำถามเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ กำหนดวิธีการศึกษา เก็บรวบรวมข้อมูลและนำเสนอข้อมูลโดยใช้แผนภูมิรูปร่างกลม หรือรูปแบบอื่นที่เหมาะสมได้

8. เข้าใจค่ากลางของข้อมูลในเรื่องค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัชฐาน และฐานนิยมของข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ และเลือกใช้ได้อย่างเหมาะสม รวมทั้งใช้ความรู้ในการพิจารณาข้อมูลข่าวสารทางสถิติ

9. เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์และประกอบ การตัดสินใจในสถานการณ์ต่างๆ ได้

10. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้องและชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์คิดสร้างสรรค์คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนและรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

ตารางที่ 1 โครงสร้างรายวิชาในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น
(ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 3) สาระการเรียนรู้พื้นฐาน

ระดับชั้น	ภาคเรียนที่	รหัสวิชา	รายวิชา	หน่วยกิต	จำนวนชั่วโมง
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1	1	ค21101	คณิตศาสตร์พื้นฐาน	1.5	60 (3 ชั่วโมง/สัปดาห์)
	2	ค21102	คณิตศาสตร์พื้นฐาน	1.5	60 (3 ชั่วโมง/สัปดาห์)
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	1	ค22101	คณิตศาสตร์พื้นฐาน	1.5	60 (3 ชั่วโมง/สัปดาห์)
	2	ค22102	คณิตศาสตร์พื้นฐาน	1.5	60 (3 ชั่วโมง/สัปดาห์)
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	1	ค23101	คณิตศาสตร์พื้นฐาน	1.5	60 (3 ชั่วโมง/สัปดาห์)
	2	ค23102	คณิตศาสตร์พื้นฐาน	1.5	60 (3 ชั่วโมง/สัปดาห์)

ตารางที่ 2 โครงสร้างรายวิชาในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น
(ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 3) สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ระดับชั้น	ภาคเรียนที่	รหัสวิชา	รายวิชา	หน่วยกิต	จำนวนชั่วโมง
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1	1	ค21201	คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	1.0	40 (2 ชั่วโมง/สัปดาห์)
	2	ค21202	คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	1.0	40 (2 ชั่วโมง/สัปดาห์)
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	1	ค22201	คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	1.0	40 (2 ชั่วโมง/สัปดาห์)
	2	ค22202	คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	1.0	40 (2 ชั่วโมง/สัปดาห์)
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	1	ค23201	คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	1.0	40 (2 ชั่วโมง/สัปดาห์)
	2	ค23202	คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	1.0	40 (2 ชั่วโมง/สัปดาห์)

คำอธิบายรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
รหัสวิชา ค 22102 ภาคเรียนที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์พื้นฐาน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
จำนวน 1.5 หน่วยกิต เวลา 3 ชั่วโมง/สัปดาห์

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษา สี่กัณฑ์/กระบวนการในสาระต่อไปนี้

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง จำนวนตรรกยะ จำนวนอตรรกยะ รากที่สอง รากที่สาม

การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การแก้โจทย์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ทฤษฎีบทพีทาโกรัส บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส การแก้ปัญหาหรือสถานการณ์โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

เส้นขนาน สมบัติของเส้นขนาน รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน การให้เหตุผลและการแก้ปัญหาโดยใช้สมบัติของเส้นขนานและความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

โดยจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องให้ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าโดยการปฏิบัติการจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะ/กระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิดทักษะกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

รหัสตัวชี้วัด

สาระที่ 1 (ค 1.1 , ม 2/2), (ค 1.1 , ม 2/3), (ค 1.2 , ม 2/1), (ค 1.2 , ม 2/2), (ค 1.3 , ม 2/1)
(ค 1.4 , ม 2/1)

สาระที่ 3 (ค 3.2 , ม 2/1), (ค 3.2 , ม 2/2)

สาระที่ 4 (ค 4.2 , ม 2/1)

สาระที่ 6 (ค 6.1 , ม 2/1), (ค 6.1 , ม 2/2), (ค 6.1 , ม 2/3), (ค 6.1 , ม 2/4),
(ค 6.1 , ม 2/5), (ค 6.1 , ม 2/6)

ตารางที่ 3 โครงสร้างรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
เวลา 3 ชั่วโมง จำนวน 1.5 หน่วยกิต

ลำดับ ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ ข้อที่	สาระสำคัญ	เวลา (ชั่วโมง)	น้ำหนัก คะแนน
1	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับ จำนวนจริง	1-7	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง 1. จำนวนตรรกยะ 2. จำนวนอตรรกยะ 3. รากที่สอง 4. รากที่สาม	15	20
2	การประยุกต์ของ สมการเชิงเส้นตัวแปร เดียว	8	การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัว แปรเดียว 1. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 2. การแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้น ตัวแปรเดียว	12	30
3	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	9	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส 1. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส 2. บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส 3. การแก้ปัญหาหรือสถานการณ์โดย ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ ได้	15	30
4	เส้นขนาน	10	เส้นขนาน 1. สมบัติของเส้นขนาน 2. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กัน แบบ มุม-ด้าน-มุม, ด้าน-มุม-ด้าน,ด้าน- ด้าน-ด้าน, มุม-มุม-ด้าน, 3. การให้เหตุผลและแก้ปัญหาโดยใช้ สมบัติของเส้นขนานและความเท่ากัน ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม	15	20

ลำดับ ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ ข้อที่	สาระสำคัญ	เวลา (ชั่วโมง)	น้ำหนัก คะแนน
		11	มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดสร้างสรรค์	3	
รวม				60	100

มโนทัศน์ที่กลาดเคลื่อน

นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของคำว่า มโนทัศน์ที่กลาดเคลื่อน และเพื่อให้เกิดความเข้าใจคำว่ามโนทัศน์ที่กลาดเคลื่อนชัดเจนขึ้น ขอกล่าวถึงความหมายของมโนทัศน์และความหมายมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อน ดังนี้

ความหมายของมโนทัศน์ (Concept)

นักจิตวิทยาและนักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้แตกต่างกัน เช่น ใช้ชื่อว่า สังกัป มโนภาพ มโนคติ ความคิดรวบยอด หรือ มโนทัศน์ ซึ่งในการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยขอใช้คำว่า มโนทัศน์ เพื่อให้สอดคล้องการวิจัยที่ศึกษา

นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ดังนี้

มาโตเรลลา และคูเปอร์ (Martorella & Cooper, 1986 : 33 -186) กล่าวว่า มโนทัศน์ อาจให้ความหมายสองความหมายได้สองนัย ดังนี้

1. มโนทัศน์เป็นการลำดับชั้นของประสบการณ์ที่เป็นระเบียบ
2. มโนทัศน์เป็นข่ายงานของความเกี่ยวพันทางปัญญา ที่นำมาจัดลำดับชั้นหรือจัดประเภท ซึ่งไม่เพียงแต่จะจำแนกวัตถุเหตุการณ์ที่เราประสบ ถึงแม้เราจะเผชิญกับสิ่งใหม่ๆ หรือประสบการณ์เก่า ๆ เราจะนำความคิดรวบยอดทั้งเก่าและใหม่มาประสานสัมพันธ์ในการแก้ปัญหา

เอกเกน และ คอซาค (Eggen & Kauchak, 1992 : 368) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์ ดังนี้ มโนทัศน์มีลักษณะเป็นนามธรรม เป็นการจัดลำดับชั้นกลุ่มของวัตถุเหตุการณ์หรือความคิด

สุริยา รัตนพลที (2545 : 9) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความคิดความเข้าใจที่สรุปเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่ง อันเกิดจากการได้รับประสบการณ์ที่เกี่ยวกับสิ่งนั้นๆ หลายๆ แบบแล้วใช้ลักษณะของสิ่งนั้นหรือเรื่องนั้นมาประมวลเข้าด้วยกันและสามารถจำแนกออกเป็นกลุ่มเป็นพวกได้

พรพิมล ยังฉิม (2546 : 9) ได้ให้ความหมายว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความสามารถของผู้เรียนที่เข้าใจลักษณะร่วมกัน สามารถจำแนกหรือสรุปรวมเป็นกลุ่มหรือเป็นพวกได้ซึ่งเกิดจากการได้รับประสบการณ์เกี่ยวกับสิ่งนั้น

บุญยงษ์ กุลเพชร (2552 : 8) ได้ให้ความหมายว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความรู้ความเข้าใจ ความคิดที่ได้รับจากประสบการณ์ต่างๆ แล้วสามารถสรุปและแยกประเภทความสัมพันธ์ของเรื่องต่างๆ เหล่านั้นเป็นหมวดหมู่ได้ และสามารถนำความรู้ความเข้าใจที่ได้รับนั้นไปใช้แก้ปัญหาตามสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง

ศรัญญา บุตรวงษ์ (2554 : 16) ได้ให้ความหมายว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความรู้ความเข้าใจขั้นสุดท้ายที่ได้รับจากประสบการณ์ที่เกี่ยวกับสิ่งนั้น ๆ และสามารถแยกประเภทของความสัมพันธ์ของเรื่องนั้น ๆ เป็นหมวดหมู่ได้ แล้วนำ ความรู้นั้นไปใช้ในการแก้ปัญหาสถานการณ์ต่าง ๆ ได้

จากการศึกษาความหมายของมโนทัศน์สรุปได้ว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความเข้าใจในข้อสรุปสุดท้ายที่เกี่ยวกับสิ่งหนึ่งสิ่งใดหรือสถานการณ์ ซึ่งอาจเป็นนามธรรมหรือรูปธรรมที่เกิดจากการได้รับประสบการณ์ มาประมวล และแยกเป็นกลุ่มได้

ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ได้มีนักการศึกษาให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้หลายทัศนะดังนี้

เอกเกน และ คอซาค (Eggen & Kauchak, 1981 : 108) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า “มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึงความคิด ความเข้าใจของบุคคลที่มีต่อสิ่งเร้า ซึ่งบุคคลสามารถจัดประเภทหรือจัดกลุ่มของสิ่งเร้าที่มีคุณสมบัติบางประการร่วมกัน โดยผ่านกระบวนการเรียนรู้ เช่น มโนทัศน์ของรูปสี่เหลี่ยมคี่ด้านเดียว คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดของมุมทั้งสี่เท่ากันและเท่ากับ 90 องศา มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันและขนานกัน เป็นต้น”

โทมาซีส (Toumasis, 1995 : 98) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า “มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดขั้นสุดท้ายเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เกิดจากการเรียนรู้ของนักเรียนที่มีต่อสิ่งเร้า โดยนักเรียนสามารถแยกประเภทของสิ่งเร้าที่มีความสัมพันธ์กันและไม่สัมพันธ์กันได้”

ชวาท และ เฮิสโกวิท (Schwarz & Hershowitz, 1999 : 363) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า “มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความเข้าใจของบุคคลที่เป็นผลมาจากกระบวนการเรียนรู้มโนทัศน์ ซึ่งสามารถสรุปออกมาเป็นบทนิยามทางคณิตศาสตร์”

ยงยศ พุทธิให้ (2543 : 12) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ว่าเป็นความคิดขั้นสุดท้ายซึ่งเป็นข้อสรุปหรือคำจำกัดความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์

สุริยา รัตนพลที (2545 : 13) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ว่าเป็นความคิดขั้นสุดท้ายซึ่งเป็นการสรุปกฎเกณฑ์ นิยามหรือสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ อันเกิดจากประสบการณ์หรือปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นซึ่งมีอยู่เสมอในชีวิตประจำวัน

พรพิมล ยังฉิม (2546 : 10) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ว่าเป็นข้อสรุปที่ได้รับการได้รับประสบการณ์ ซึ่งข้อสรุปนี้นำไปสู่ความสามารถในการจำแนก หรือจัดกลุ่มของสิ่งต่างๆและนำไปใช้ในวิชาคณิตศาสตร์

บุญยง กุลเพชร (2552 : 9) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง ความรู้ความเข้าใจ ความคิดทางการเรียนคณิตศาสตร์ อันเกิดจากการที่ผู้เรียนได้รับประสบการณ์ต่างๆแล้วสามารถสรุปและแยกประเภทความสัมพันธ์ของเรื่องต่างๆเหล่านั้น เป็นกฎนิยาม หรือ คำจำกัดความที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ความเข้าใจที่ได้รับนั้น ไปใช้แก้ปัญหาตามสถานการณ์ต่างๆได้ถูกต้อง

อุไรวรรณ ศรีไชยมูล (2554 : 21) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ข้อสรุป ความรู้ ความเข้าใจที่ได้รับจากการเรียนคณิตศาสตร์ แล้วสรุปแยกประเภทของความสัมพันธ์ต่างๆเป็นกฎนิยาม หรือคำจำกัดความที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์และสามารถนำความรู้นั้นไปใช้ในการปัญหาตามสถานการณ์ต่างๆได้

จากความหมายข้างต้น สรุปได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หมายถึง ข้อสรุปหรือความคิดขั้นสุดท้ายที่ได้รับจากประสบการณ์ในการสรุปกฎเกณฑ์ นิยามหรือสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ ซึ่งข้อสรุปนี้นำไปสู่ความสามารถในการจำแนก หรือจัดกลุ่มของสิ่งต่างๆ สามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้ในการแก้ปัญหาวิชาคณิตศาสตร์และแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆในชีวิตประจำวัน

ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนตรงกับคำว่า Misconceptions ในภาษาอังกฤษ และมีคำอื่นที่มีความหมายใกล้เคียงกัน เช่น Alternative Conception, Erroneous Idea, Alternative Framework (Cho และคณะ. 1985:707 : Fisher,1985:53) และมีผู้ให้ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ดังนี้

Powell (1983 : 20) ได้ให้ความหมายว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความเข้าใจผิดอันมีพื้นฐานมาจากการให้ความหมายในสิ่งนั้นๆ

ไพเกต (Piaget. 1984 : 123) กล่าวไว้ว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นวิธีการแก้ปัญหาด้วยความไม่รู้ หรือความรู้ที่ไม่สมบูรณ์ ซึ่งดูเหมือนจะถูกต้องแต่ไม่ถูกต้อง และไม่สอดคล้องกับหลักฐานทางวิทยาศาสตร์ หรือการยอมรับในสังคมนั้นๆ

โมว์โซวิทซ์ และคณะ (Movshovitz and others. 1987: 4-17 ; อ้างถึงใน ใจ่มก เลื่องสุนทร. 2552 : 4) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้ว่า

1. ด้านการใช้ข้อมูลผิด (Misused Data) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้

- 1.1 ละเลยการใช้ข้อมูลที่จำเป็นในขั้นตอนการแก้ปัญหา
- 1.2 ทำผิดพลาดโดยหาคำตอบในสิ่งที่ไม่ต้องการ
- 1.3 คัดลอกโจทย์ผิด

2. ด้านการตีความด้านภาษา (Misinterpreted Language) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ ตีความจากประโยคภาษามาเป็นประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง

3. ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ (Distorted Theorem or Definition) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้

3.1 ขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ

3.2 จำทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติผิด

4. ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified Solution)

มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้

4.1 ขั้นตอนถูกต้อง แต่คำตอบผิดจากที่โจทย์กำหนด หรือคำตอบไม่เป็น

ผลสำเร็จ

4.2 ขั้นตอนผิด แต่คำตอบถูก

5. ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ (Technical Error) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ

การ์เน็ตและทรีกัส (Garnett and Treagust. 1992 : 107) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนหมายถึงความรู้เชิงข้อสนเทศ ข้อเท็จจริงและเชิงมโนทัศน์ ที่ไม่สอดคล้องกันหรือแตกต่างไปจากที่คนทั่วไปยอมรับ

Hammer (1996 : 99) ให้ความหมายว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน หมายถึงความคิดเห็นที่ผิดอันเกิดจากพื้นฐานประสบการณ์ที่ต่างกัน หรือความเข้าใจผิด

ดริวส์ (Drews. 2005 : 11-17) ได้กล่าวว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนหมายถึงความเชื่อและความเข้าใจที่ได้มาจากแนวความคิดหรือความรู้ที่ไม่ถูกต้องความรู้ที่ไม่สมบูรณ์คลุมเครือ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจึงเป็นแนวคิดและความรู้ที่แตกต่างไปจากข้อตกลงที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอาจเกิดขึ้นก่อนหรือระหว่างการเรียนรู้ โดยที่นักเรียนมักจะไม่ว่าตนเองมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอย่างไร และครูเองก็ไม่มีเวลาพอที่จะวินิจฉัยนักเรียนเป็นรายบุคคลได้ทุกๆเนื้อหา หรือทุกๆทักษะ

เบรน (Brien. 2010 : 1) ให้ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่าหมายถึงความผิดพลาดในการแปลความของกฎหรือสูตรที่ผิด นำกฎกติกาพื้นฐานไปใช้ไม่ถูกต้อง แปลความไปหลากหลายทำให้เข้าใจไม่ชัดเจน

ค็อกเบิร์น และ ลิตเติล (Cockburn & Littler. 2010 : 6 – 10) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน อาจเกิดจากการใช้สูตร กฎ ผิด สรุปลง หรือน้อยกว่าความเป็นจริง การแปลความความคิดทางคณิตศาสตร์ที่ผิด หรือเข้าใจสิ่งที่เรียน ไม่ชัดเจน

ณัฐพงศ์ รักแข็ง (2542 : 25) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนหมายถึงความเข้าใจเกี่ยวกับข้อจริงที่ต่างไปจากกฎ กติกา หลักการ ทฤษฎีที่ต่างไปจากการยอมรับในขณะนั้น แนวคิดนี้อาจเกิดขึ้นก่อน ในระหว่างหรือหลังจากศึกษาเล่าเรียนและเมื่อเกิดขึ้นแล้วก็จะยากแก่การแก้ไข

ยงยศ พุทธิให้ (2543 : 17) กล่าวว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความคิด ความเข้าใจไม่ถูกต้อง ความเข้าใจอันผิดอันเนื่องมาจากการรับรู้จากประสบการณ์และความรู้ที่ไม่สมบูรณ์ ครวมเครือ

ทวีวรรณ ทองนวล (2545: 24) ได้ให้ความหมายมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ว่า หมายถึง ความคิดและความเข้าใจที่ไม่ถูกต้อง ซึ่งเกิดจากการได้รับประสบการณ์หรือความรู้ที่ไม่ถูกต้อง โดยจะสะท้อนออกมาในการใช้รูปแบบหรือวิธีคิดที่ผิด

พรพิมล ชังฉิม (2546 : 17) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องหรือคลุมเครือ เกี่ยวกับมโนทัศน์ต่าง ๆ ที่ได้รับการเรียนรู้

บุญยงษ์ ภูลเพชร (2552 : 19) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความรู้ความเข้าใจในการเรียนรู้ของผู้เรียนที่ไม่ถูกต้อง ผิดพลาดจากความจริง จึงส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถศึกษาในระดับสูงได้ถูกต้อง

ไข่มุก เลื่องสุนทร (2552 : 19) ได้ให้ความหมายมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า หมายถึง ความคิดสำคัญหรือความคิดรวบยอดที่แตกต่างไปจากความเป็นจริง และเป็นความคิดที่ต่างไปจากแนวคิดที่ได้รับการยอมรับกันในสังคม อาจได้มาจากประสบการณ์ที่ไม่ถูกต้อง ไม่ชัดเจน ของแต่ละบุคคล

ธีระยุทธ จันทะศักดิ์(2554 : 19)สรุปได้ว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนหมายถึง ความคิดความเข้าใจที่ไม่ถูกต้อง ความเข้าใจผิดอันเป็นผลมาจากการรับรู้จากประสบการณ์ และความรู้ที่ไม่สมบูรณ์และคลุมเครือที่ได้รับการเรียนรู้

จากความหมายมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังกล่าวมาแล้วสรุปได้ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนหมายถึง ความคิด ความเชื่อ ความเข้าใจผิดหรือเข้าใจไม่ถูกต้องในการนำกฎ กติกา หรือสูตรที่ไม่ชัดเจน ไปใช้ในการแปลความหรือคิดคำนวณที่ผิด

ลักษณะและสาเหตุของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

มีนักศึกษาหลายท่านได้กำหนดลักษณะและสาเหตุของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ดังนี้ ฟิชเชอร์ (Fisher. 1985 : 53-54) กล่าวถึง ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ดังนี้

1. เป็นลักษณะที่แปรเปลี่ยนไปจากมโนทัศน์ของผู้เชี่ยวชาญในสาขานั้น
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเพียงเรื่องเดียวหรือเล็กน้อยมีแนวโน้มที่จะขยายออกได้
3. มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจำนวนมากที่ยากต่อการเปลี่ยนแปลงหากผู้สอนยังใช้

วิธีสอนแบบเดิม

โอสบอร์น และ ฟรีเบิร์ก (Osborne & Freyberg, 1985 : 27) ได้เสนอความเห็นเกี่ยวกับสาเหตุที่ทำให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ได้ผลโดยสรุปว่า มโนทัศน์ที่เกิดขึ้นจริงในตัวนักเรียนจะแตกต่างจากมโนทัศน์ที่ครูต้องการให้นักเรียนมี เป็นเหตุให้นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกิดขึ้นซึ่งมโนทัศน์ที่นักเรียนมักจะเข้าใจคลาดเคลื่อนจากที่ครูต้องการได้แก่

1. มโนทัศน์ที่ได้จากตำราเรียน
2. มโนทัศน์ที่เกิดจากการแก้ปัญหาทางด้านวิทยาศาสตร์

3. มโนทัศน์ที่เกิดจากการทำกิจกรรม

4. มโนทัศน์ที่ได้จากการสรุปความรู้ต่างๆ

ทรูเรน (Truran. 1987 : 92) จากการศึกษาวิจัยลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนั้นนักเรียนจะมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในรูปแบบลักษณะที่แตกต่างกันไปในแต่ละเนื้อหาวิชาที่ได้ทำการศึกษา คือ ระดับความผิดพลาด มี 9 ระดับคือ คือ รูปแบบของคำถาม การอ่านคำถาม ความเข้าใจใจคำถาม ยุทธวิธีในการเลือกใช้ความรู้และทักษะการเลือกใช้ความรู้ ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ การเสนอคำตอบ ความผิดพลาดที่ไม่ระบุสาเหตุที่แน่นอนได้เนื่องจากการขาดความระมัดระวัง ความผิดพลาดที่ครูจะทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน

ซิมซอน และ มาร์ค (Simson & Marek. 1988 : 362) ได้กล่าวถึงสาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า “ประสบการณ์ในโรงเรียน ไม่ใช่สาเหตุเดียวที่ทำให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนหรือเข้าใจผิด แต่อาจเกิดจากคำอธิบายของผู้ใหญ่ที่ยังไม่เข้าใจมโนทัศน์นั้นๆดีพอด้วย จึงทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจผิดโดยรู้เท่าไม่ถึงการณ์”

อรัญ ชูยกระเดื่อง (2534 : 53-54) ที่พบว่า ลักษณะความคลาดเคลื่อนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำแนกได้ตามขั้นตอนการทำโจทย์ตามลำดับความคลาดเคลื่อนมาก ไปหาน้อย คือความคลาดเคลื่อนในการเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ตาม โจทย์ที่กำหนดให้ คลาดเคลื่อนในการตอบคำถามต้องการ คลาดเคลื่อนในการใช้ตัวแปร ตัวแปรไม่ทราบค่า คลาดเคลื่อนในการแก้สมการ และคลาดเคลื่อนในการตีความการทำความเข้าใจโจทย์

สุภลักษณ์ ทองสนธิ (2537 : 19) ได้สรุปสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนมีสาเหตุมาจากตำราเรียนไม่ชัดเจน เนื้อหาที่เป็นนามธรรม ครูผู้สอนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน รวมทั้งสาเหตุจากตัวนักเรียนเกี่ยวกับพัฒนาการทางด้านสติปัญญา ความรู้เดิมตลอดจนความสับสนเกี่ยวกับความหมายของคำที่ใช้ในชีวิตประจำวันกับคำที่เป็นศัพท์ทางวิชาการ

นภาพร แฉวนอนจิว (2537 : 31) ได้สรุปสาเหตุของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ว่า เกิดจากความเชื่อตามผู้ทรงคุณวุฒิ หรือนักปราชญ์ในอดีต เนื้อหาที่ค่อนข้างเป็นนามธรรมทำให้เกิดการจินตนาการที่ผิด ตำราเรียนที่เขียนไม่ชัดเจน หรือให้ความรู้ที่ไม่ถูกต้อง ความแตกต่างระหว่างภาษาที่ใช้ในเชิงวิชาการกับที่ใช้ในชีวิตประจำวัน วุฒิภาวะและพัฒนาการทางสติปัญญาของผู้เรียนและการอธิบายของครูผู้สอนไม่ชัดเจน

ศิริลี ส่งบุญ (2538 : บทคัดย่อ) สรุปสาเหตุของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาวิทยาศาสตร์ไว้ดังนี้

1. การสอนของครูไม่ชัดเจน
2. ครูมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
3. ความรู้ ความเข้าใจเดิมของนักเรียนคลาดเคลื่อน
4. นักเรียนเข้าใจความหมายของคำบางคำผิดพลาด โดยนำคำที่ใช้ในชีวิตประจำวันให้แทนศัพท์เฉพาะทางวิทยาศาสตร์

5. ตำราบางเล่มเขียนไม่ชัดเจน
6. นักเรียนขาดประสบการณ์ตรง

ศิริเดช สุชีวะ (2538 : 15) ได้สรุปสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอาจเกิดจากความเชื่อตามผู้ทรงคุณวุฒิในอดีตเนื้อหาที่ค่อนข้างเป็นนามธรรมทำให้เกิดจินตนาการที่ผิด ตำราเรียนที่เขียนไม่ชัดเจนหรือให้ความรู้ที่ไม่ถูกต้อง ปัญหาเรื่องภาษาและสัญลักษณ์ วุฒิภาวะและพัฒนาการทางปัญญาของผู้เรียน ตลอดจนตัวผู้สอนเอง

ทัศนีย์ คงบุญ (2544 : บทคัดย่อ) ได้สรุปถึงสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ดังนี้

1. ครูสอนไม่ชัดเจน
2. นักเรียนสรุปเอาตามความเข้าใจของตนเอง
3. นักเรียนไม่เข้าใจภาษาที่สื่อสารและสัญลักษณ์
4. นักเรียนขาดประสบการณ์ตรง
5. นักเรียนเชื่อตามผู้อื่นที่นักเรียนให้ความเชื่อถือ
6. ตำราเรียนมีเนื้อหาเป็นนามธรรม

จากการศึกษาคำกล่าวข้างต้น สรุปลักษณะและสาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนได้ว่า เกิดจากตำราเรียนที่ไม่ชัดเจน เนื้อหาส่วนใหญ่เป็นนามธรรม ครูผู้สอนไม่มีความชัดเจนในเนื้อหาที่สอนทำให้นักเรียนมีจินตนาการที่ผิด ไปจึงสรุปตามความเข้าใจของตนเอง

ประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

ไพน์ส ; และ เวสต์ (Pines & West, 1983 : 47-51) ได้แบ่งมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนออกเป็น 3 ประเภทตามสถานการณ์การเรียนรู้ที่แตกต่างกัน 3 รูปแบบดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอันเกิดจากสถานการณ์ที่ขัดแย้ง (Misconception Derived form Conflict Learning Situation) แบ่งตามขั้นตอนของการเกิดได้ 3 ระยะคือ

1.1 ระยะของการรับรู้ (Awareness Phase) ครูจะต้องจัดเตรียมกิจกรรมต่าง ๆ อันเป็นการชักนำสิ่งที่มีอยู่ในตัวนักเรียนให้ปรากฏออกมา ครูต้องทุ่มเวลาให้กับช่วงนี้ เนื่องจากนักเรียนจะเสาะหาทำความเข้าใจกับความรู้ใหม่ ๆ ภายในขอบเขตของตนเอง และเมื่อไม่พบสิ่งที่พอใจสำหรับเขาเองก่อให้เกิดแนวความคิดที่ผิดพลาดขึ้นได้ ครูต้องหาทางแก้ไขความคิดที่ผิด ๆ นี้

1.2 ระยะของการไม่สมดุล (Disequilibrium)

1.3 ระยะจัดระบบใหม่ (Reformulation Phase)

2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอันเกิดจากสถานการณ์ที่สอดคล้องกัน

(Misconception Derived from Congruent Learning Situation) เช่น การขยายความหมายของคำแบบการหยั่งรู้ (Intuitive Meaning) สู่ความหมายใหม่ (New Meaning) หรือการละทิ้งบางแง่มุมของความหมายของการหยั่งรู้เพื่อคงไว้ซึ่งแง่มุมใหม่ๆที่ตนพอใจ ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหมายของการหยั่งรู้เพื่อคงไว้ซึ่งแง่มุมใหม่ๆที่ตนพอใจ ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหมายของคำอันกลายเป็นปรากฏการณ์ธรรมชาติของเด็กๆเช่น มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับกระบวนการสังเคราะห์แสงและอาหารของพืชซึ่งนักเรียนจะนำความหมายของคำว่าอาหารโดยทั่วไปเชื่อมโยงกับความหมายของคำว่าแหล่งอาหารของพืชทำให้เกิดความสับสนและเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่าอาหารของพืชมาจากการพืชดูดอาหารจากดิน

3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอันเกิดจากสถานการณ์ที่ให้ความรู้โดยใช้สัญลักษณ์ (Misconception Derived from a Symbolic Knowledge Situation) ความรู้จากสัญลักษณ์ต่าง ๆ นี้เห็นได้ชัดในวิชาเคมี เช่น ความรู้เกี่ยวกับปฏิกิริยาของเบนซีนและอนุพันธ์ต่าง ๆ ของเบนซีน ปฏิกิริยาโบรมีนเนชันหรือสารประกอบบอโรเมติก เหล่านี้เป็นต้นนักเรียนไม่สามารถมองเห็นภาพจริงของปฏิกิริยาและสารประกอบเหล่านี้ไม่สามารถทำสมบัติของมวลให้มาสัมพันธ์กับสมบัติของโมเลกุลได้ กล่าวโดยสรุปคือนักเรียนไม่สามารถนำความรู้จากสัญลักษณ์ (Symbolic Knowledge) ให้มาสัมพันธ์กับความรู้จริง (Real World Knowledge) ได้

บุญยงษ์ กุลเพชร (2552 : 20) ได้จำแนกมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนได้ 3 ประเภท คือ

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดจากสถานการณ์ที่เกิดการขัดแย้งกัน
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดจากสถานการณ์ที่สอดคล้อง คล้ายคลึงกัน
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดจากสถานการณ์การเรียนรู้ที่ใช้สัญลักษณ์ หรือ

สถานการณ์ที่เป็นนามธรรม

จากการศึกษาประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน สรุปได้ว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแบ่งออกได้เป็น สถานการณ์ที่ขัดแย้งกัน สถานการณ์ที่สอดคล้องกัน และ สถานการณ์การเรียนรู้ที่เป็นนามธรรม

ข้อผิดพลาด

ความหมายของข้อผิดพลาด

ข้อผิดพลาด หรือข้อบกพร่อง ตรงกับคำในภาษาอังกฤษว่า Error และมีคำอื่นที่มี

ความหมายใกล้เคียงกัน เช่น Error Code ,Error Correcting code , Error Messsage , Error Rate (สุกการ์ณ สว่างเมืองวรกุล . 2552 : 6) มีการใช้คำแทนคำว่าข้อผิดพลาดได้หลายคำ เช่น ความผิดพลาด ข้อบกพร่อง ความคลาดเคลื่อน เป็นต้น มีผู้ให้ความหมายของข้อผิดพลาดไว้ดังนี้

นิวแมน (Newma. 1977 ; อ้างอิงมาจาก Marinas and Clements. 1990 : 15) ได้ให้ความหมายของความผิดพลาด หมายถึง สาเหตุที่เป็นปัญหา หรืออุปสรรค ที่ทำให้นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จ

โกล์ดแมน (Golman,J. 1996 : 239 ; อ้างอิงมาจาก สุกการ์ณ สว่างเมืองวรกุล. 2552 : 6) ได้ให้ความหมายข้อบกพร่อง หรือข้อผิดพลาดหมายถึง การขาดแคลนบางสิ่งบางอย่างที่ต้องการความสมบูรณ์

อรัญ ชูษุภระเคื่อง (2533 : 9) ได้ให้ความหมายไว้ว่า ความคลาดเคลื่อน คือ ความผิดพลาด ความเชื่อที่ผิด ความเห็นที่ผิดกระทำที่ผิด หรือทำไม่ถูกเกิดข้อผิดพลาด

คริวส์ (Drews, D. 2005 : 14) ได้ให้ความหมายของข้อผิดพลาด ว่าหมายถึง การขาดความระมัดระวังหรือการสะเพร่า หรือ การแปลความของสัญลักษณ์หรือข้อความในตำราทางคณิตศาสตร์ผิด รวมทั้งการขาดประสบการณ์ที่เกี่ยวข้อง หรือ หรือขาดความรู้ หรือขาดความเข้าใจในวัตถุประสงค์ของการเรียนการสอนที่สัมพันธ์กับเนื้อหาที่กำลังเรียนหรือ การขาดความตระหนัก หรือขาดความสามารถในการตรวจคำตอบ หรืออาจจะเป็นผลที่เกิดจากความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน เป็นต้น

วรรณุช มาตระณูถ (2551 : 16) ได้ให้ความหมาย ข้อผิดพลาดว่า หมายถึงปัญหาหรืออุปสรรคที่เป็นส่วนทำให้การเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน ไม่ประสบผลสำเร็จ

เอชล็อก (Ashlock. 2010 : 18) กล่าวว่า ข้อผิดพลาดเกิดจากการขาดความใส่ใจ พลาดที่จะจดจำประเด็นสำคัญ หรือการให้เหตุผลที่ขาดการไตร่ตรอง การได้รับข้อมูลมากเกินไปจนไม่สามารถจัดระบบความจำได้ สาเหตุเหล่านี้เป็นสิ่งที่นักเรียนมองเห็นทางแก้ไข จึงไม่เป็นอุปสรรคต่อการเรียนรู้

<https://www.ncetm.org.uk/mathemapedia/Misconceptions> (Retrieved July 20, 2010) กล่าวถึงข้อผิดพลาดว่าเกิดจากการที่ครูให้ประสบการณ์การเรียนรู้ที่ไม่เหมาะสมกับวัยและวุฒิภาวะ ตลอดจนพัฒนาการทางปัญญาของผู้เรียนทำให้เกิดการสับสนและสงสัยและเข้าใจผิด หรือข้อผิดพลาดอาจเกิดจากการใช้สื่ออุปกรณ์ในบริบทที่ไม่เหมาะสมทำให้นักเรียนเกิดความสับสน ไม่แน่ใจ และเข้าใจผิด

ศรัญญา บุตรวงษ์ (2554 : 29) ได้ให้ความหมายของข้อผิดพลาด ว่าหมายถึง ผลการทำแบบทดสอบที่เกิดจากการขาดความระมัดระวัง ขาดความรอบคอบ ขาดความตระหนัก หรือขาดประสบการณ์ที่สัมพันธ์หรือหรือแปลความสัญลักษณ์หรือความผิดพลาดด้วยขาดประสบการณ์หรือความรู้

จากความหมายของข้อผิดพลาดข้างต้น สรุปได้ว่า ข้อผิดพลาดหมายถึง การขาดความเอาใจใส่ ขาดความระมัดระวัง ขาดความรอบคอบ ขาดความตระหนัก ขาดความสามารถในการตรวจสอบ ขาดการไตร่ตรองในการให้เหตุผล ขาดประสบการณ์และความรู้ในเรื่องที่เรียน หรืออาจเกิดจากความสับสน ไม่แน่ใจและเข้าใจผิดจากประสบการณ์ที่ผู้สอนจัดให้

ลักษณะและสาเหตุของข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่าน ได้อธิบายเกี่ยวกับลักษณะข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

ทรูแรน (Truran. 1987 : 92) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การวิเคราะห์ความผิดพลาดและเทคนิคการสอนเพื่อแก้ไขความผิดพลาดนั้น” สรุปรูปแบบลักษณะข้อผิดพลาดทางการเรียนโดยขยายทฤษฎีของนิวแมน (Newman. 1983 : อ้างถึงใน Truran. 1987 : 92) ในการหาสาเหตุที่ผิดและแบ่งระดับความผิดพลาดที่นักเรียนทำไว้ 9 ด้าน คือ

1. รูปแบบของคำถาม
2. การอ่านคำถาม
3. ความเข้าใจในคำตอบ

4. กลยุทธ์ในการเลือกใช้ความรู้
5. ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้
6. ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้
7. การเสนอคำตอบ
8. ความผิดพลาดซึ่งไม่สามารถระบุสาเหตุที่แน่นอนได้เนื่องจากขาดความ

ระมัดระวัง

9. ความผิดพลาดซึ่งควรจะทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน โมฟโซวิทซ์ - ฮาดาร์, ซาฟสลอฟสกี และ อินบาร์ (Movshovitz – Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987 : 3 - 14) ซึ่งวิเคราะห์ข้อผิดพลาดของนักเรียน ในวิชาพีชคณิตและจัดกลุ่มข้อผิดพลาดได้ 6 ด้านดังนี้

1. การใช้ข้อมูลผิด
2. ข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา
3. การอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์
4. การบิดเบือนทฤษฎีและนิยาม
5. ขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา
6. ความผิดพลาดในเทคนิคการทำ

แบลนโด และคนอื่นๆ (Blando; et al. 1989 : 301 – 308) ได้สรุปข้อผิดพลาดทางการเรียนเลขคณิตไว้ 4 ด้าน คือ

1. ความผิดพลาดในการมีลำดับความสำคัญมากกว่าหรือการมีลำดับขั้นตอน เช่นบวกก่อนคูณ บวกก่อนหาร ลบก่อนหาร ละเลยความสำคัญของวงเล็บ เป็นต้น
2. ความผิดพลาดอื่นๆ เช่นการปฏิเสธที่จะแก้ปัญหา
3. ความผิดพลาดอื่นๆเช่นการปฏิบัติที่จะแก้ปัญหา
4. ความผิดพลาดที่ไม่มีรูปแบบแน่นอนเนื่องจากขาดความระมัดระวังในการคำนวณเช่น ขาดความระมัดระวังในการบวก (บวกผิด) เป็นต้น

ยงยศ พุทธิให้ (2543 : 19) ได้สรุปลักษณะข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า อาจเกิดมาจากครูและนักเรียน ข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์จากครูเนื่องมาจาก รูปแบบคำถาม การใช้ภาษาการให้ข้อมูลผิดพลาด เป็นต้น ส่วนข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์จากนักเรียนมีด้วยกันหลายสาเหตุ เช่น การอ่านคำถาม ความเข้าใจในคำถาม กลยุทธ์และทักษะในการเลือกใช้ความรู้ การบิดเบือนทฤษฎีและนิยาม ขาดความระมัดระวังในการคำนวณ เป็นต้น

สุริยา รัตนพลที (2545 : 15) ได้สรุปลักษณะข้อผิดพลาดทางเรขาคณิตศาสตร์ไว้ว่า อาจเกิดมาจากครูและนักเรียน ลักษณะข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์จากครูเนื่องมาจาก การใช้ภาษา การใช้คำถาม การให้ข้อมูลผิดพลาด เช่นการอธิบายหรือการให้นิยามโดยการตัดข้อความบางตอนออกเพื่อให้สั้นและกะทัดรัดจนทำให้ความหมายผิดไปจากเดิม เป็นต้น ส่วนลักษณะความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดจากตัวนักเรียนเนื่องมาจากการขาดประสบการณ์ การรับรู้ข้อมูลที่ผิดพลาด ความจำคลาดเคลื่อน และมีการหาเหตุผลที่ผิดพลาด (ซึ่งอาจเนื่องมาจากลักษณะส่วนตัวของผู้นั้น เช่น มีความลำเอียงหรือมีความคิดเห็นเอนเอียงไปด้านใดด้านหนึ่ง หรือเพราะความไม่รอบคอบ หรือมีข้อมูลน้อยเกินไป) จึงทำให้สรุปข้อมูลที่ได้มาอย่างไม่ถูกต้อง

บุญยงษ์ กุลเพชร (2552 : 22) ได้สรุปว่าลักษณะของข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์มีสาเหตุมาจากหลายด้านกล่าวคือ อาจเกิดจากตัวผู้เรียนเองคือ อ่านคำถามไม่เข้าใจ เข้าใจคำถามผิดจากที่ครูถาม ไม่เข้าใจสัญลักษณ์ หรือการใช้คำถามในรูปแบบ เช่นไม่เข้าใจกฎนิยาม สูตร เป็นต้น หรือบางครั้งครูผู้สอนเองทำให้ผู้เรียนเกิดข้อผิดพลาดทางการเรียน

ศศิณา กาละปลูก (2552: บทคัดย่อ) ได้สรุปสาเหตุความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาสมการของนักเรียน มีดังนี้ 1) ขั้นตอนการอ่านและในขั้นตอนทำความเข้าใจศัพท์เฉพาะเกิดจากปัญหาด้านการใช้ภาษาไทยในการสื่อสาร 2) ขั้นตอนการเปลี่ยนรูปเกิดจากนักเรียนกำหนดตัวแปรในสมการไม่ถูกต้อง และนักเรียนเดาคำตอบผิดไว้ก่อน แล้วจึงสร้างสมการเพื่อให้ได้คำตอบตรงกับที่คาดคะเนเอาไว้ 3) ขั้นตอนการใช้ทักษะกระบวนการเกิดจากการคิดคำนวณเพียงเพื่อต้องการให้ได้คำตอบตรงกับที่คาดคะเนเอาไว้ การนำกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้คือการตรวจสอบคำตอบผิด การคิดคำนวณที่ไม่ถูกต้อง และความสะเพร่า 4) ขั้นตอนสรุปตอบเกิดจากความสะเพร่าในการสรุปตอบ

ศรัญญา บุตรวงษ์ (2554 : 25) ได้พบว่าลักษณะข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์เกิดจากหลายสาเหตุเช่น อาจเกิดจาก ตัวผู้สอน ผู้เรียน หรือ หนังสือตำราเรียน การใช้คำถาม การอธิบาย การใช้ภาษาของครูและเทคนิควิธี รวมทั้งการนำเสนอสื่อของครูก็อาจเป็นสาเหตุหนึ่ง หรือ การขาดความระมัดระวัง ขาดความรอบคอบ ขาดความตระหนัก เข้าใจคลาดเคลื่อน ขาดประสบการณ์ อ่านคำถามไม่เข้าใจของนักเรียน หรือ การนำเสนอเนื้อหาในหนังสือ เอกสาร ตำราที่ใช้ภาษาวกวน ข้อมูลผิดพลาด การขาดการตรวจสอบเนื้อหา ก็สามารถเป็นสาเหตุของข้อผิดพลาดได้เช่นเดียวกัน

จากการศึกษา พบว่าลักษณะข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์เกิดจากหลายสาเหตุ เช่น อาจเกิดจาก ตำราเรียนที่ไม่ชัดเจน ครูผู้สอน อาทิเช่น ในการอธิบายหรือการให้นิยาม โดยการตัดเนื้อหาบางส่วนออกเพื่อให้สั้นและกะทัดรัดจนทำให้ความหมายผิดไปจากเดิม อีกทั้งการใช้ภาษาที่ไม่ชัดเจนของครูผู้สอนเอง หรืออาจเกิดจากตัวผู้เรียน โดยผู้เรียนขาดความรอบครอบ ขาดความตระหนัก ขาดประสบการณ์ ไม่เข้าใจความหมายของคำถาม ขาดความระมัดระวังในการคำนวณ จึงทำให้สรุปตามความเข้าใจของตนเอง ทำให้ข้อมูลที่ได้ไม่ถูกต้อง

ประเภทของความผิดพลาด

นักศึกษาหลายท่านได้สรุปประเภทของความผิดพลาดไว้ดังนี้

พรพิมล ยังฉิม (2546 : 18) ได้สรุปว่า ประเภทของความผิดพลาดที่ผิดพลาด แบ่งตามสถานการณ์ที่ขัดแย้งกัน สถานการณ์ที่สอดคล้องกัน และสถานการณ์ที่ให้ความรู้โดยใช้สัญลักษณ์ไม่สามารถมองเห็นภาพจริงได้ และไม่มีกรวัดใจที่มีความถูกต้องสมบูรณ์แบบไม่ว่าอย่างไรก็ตามการวัดจะต้องมีความผิดพลาดอยู่เสมอ ความผิดพลาดแบ่งออกได้เป็น 3 แบบหลักๆ คือ

1. ความผิดพลาดบุคคล (Human Error)
2. ความผิดพลาดระบบ (Systematic Error)
3. ความผิดพลาดไม่แน่นอน (Random Error)

ความผิดพลาดบุคคล (Human Error)

สาเหตุ : ส่วนใหญ่มาจากบุคคลผู้ทำการวัดเอง เช่น การอ่านค่าผิด, การปรับแก้หรือใช้เครื่องมือผิดหรือการคำนวณผิด

การป้องกัน : แก้ไขหรือทำให้ลดลง ได้โดยการศึกษาเครื่องมือวัดให้เข้าใจ และใช้อย่างถูกต้อง

ความผิดพลาดระบบ (Systematic Error) แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ

Instrument Error : เป็นข้อบกพร่องของเครื่องมือวัด

Environment Error : เกิดจากสภาพแวดล้อมที่ทำการวัด

ความผิดพลาดในเครื่องมือ (Instrument Error)

สาเหตุ : ความผิดพลาดจากชิ้นส่วนทางกายภาพ เช่น ทางกล ไกล่กรอ หรือฝืด, ความผิดปกติของสปริง หรือคุณสมบัติของวัสดุประกอบ

การป้องกัน : เลือกเครื่องมือวัด ที่เหมาะสมกับการวัด, ใส่ค่า Factor หรือ Weight เพื่อชดเชยค่าที่เบี่ยงเบนไป และปรับเทียบมาตรฐาน (Calibrate)

ความผิดพลาดจากสิ่งแวดล้อม (Environment Error)

สาเหตุ : จากเงื่อนไขภายนอก เช่น การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ, ความชื้น, ความกดอากาศ, สนามแม่เหล็ก หรือสนามไฟฟ้า

การป้องกัน : วัดในห้องที่มีการปรับอุณหภูมิ, ผนึกเครื่องมือวัดอย่างแน่นหนา เพื่อป้องกันความชื้น และห่อหุ้มด้วยวัสดุที่ป้องกันสนามแม่เหล็ก

ความผิดพลาดไม่แน่นอน (Random Error)

สาเหตุ : ไม่สามารถบอกสาเหตุที่แน่นอนได้ การวัดสิ่งเดียวกันหลายครั้งได้ค่าแตกต่างกันไป แม้เครื่องมือวัดจะถูกปรับแต่งอย่างดี และใช้งานภายใต้สิ่งแวดล้อมที่เหมาะสมก็ตาม

การป้องกัน : เพิ่มจำนวนครั้งในการวัดแล้วหาค่าเฉลี่ยทางสถิติ เพื่อให้ได้ค่าประมาณที่จัดว่าเป็นค่าที่ดีที่สุด

รูปแบบข้อผิดพลาด มี 3 แบบคือ

1. Syntax Error คือ ข้อผิดพลาดจากการใช้ไวยากรณ์ภาษาที่ผิด หรือ อาจเกิดจากการสะกดคำผิด

2. Run-time Error คือ ข้อผิดพลาดในระหว่างการปฏิบัติงาน(Execution) มักเกิดจากความรู้อาจไม่ถึงการณ์

3. Logical Error คือ ข้อผิดพลาดที่หาและแก้ได้ยากที่สุด ต้องทำการไล่โปรแกรมทีละคำสั่งเพื่อหาข้อผิดพลาดนั้น

วิธีการตรวจสอบข้อผิดพลาด มีดังนี้

1. การตรวจสอบด้วยตนเอง (Self Checking) เขียนโปรแกรมลงกระดาษแล้วไล่เช็คตรวจสอบการทำงานทีละขั้นด้วยตนเอง ว่าจะมีการทำงานที่ถูกต้องตามความต้องการหรือไม่

2. ตรวจสอบด้วยการแปลโปรแกรม (Translating) การแปลเป็นภาษาเครื่อง ตรวจสอบข้อผิดพลาดของโปรแกรม

การวิเคราะห์หมันทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด

การวิเคราะห์หมันทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด (Analysis of Misconceptions and Errors) มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงการวิเคราะห์หมันทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด ดังนี้

โมวโซวิทซ์ และคณะ (Movshovitz and others. 1987 : 4-17) กล่าวว่า การวิเคราะห์ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด มีทั้งหมด 5 ด้าน และมีการรวมด้านย่อยๆ เพื่อให้การ วิเคราะห์ข้อมูลมีความชัดเจน เหมาะสมกับเนื้อหา ระดับชั้นของนักเรียน และบริบทของชั้น เรียน ดังนี้

1. ด้านการใช้ข้อมูลผิด (Misused Data) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้
 - 1.1 ละเลยการใช้ข้อมูลที่จำเป็นในขั้นตอนการแก้ปัญหา
 - 1.2 ทำผิดพลาดโดยหาคำตอบในสิ่งที่ไม่ต้องการ
 - 1.3 คัดลอกโจทย์ผิด
2. ด้านการตีความด้านภาษา (Misinterpreted Language) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ ตีความจากประโยคภาษามาเป็นประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง
3. ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ (Distorted Theorem or Definition) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้
 - 3.1 ขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ
 - 3.2 จำทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติผิด
4. ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified Solution) มีมโน ทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังนี้
 - 4.1 ขั้นตอนถูกต้อง แต่คำตอบผิดจากที่โจทย์กำหนด หรือคำตอบไม่เป็น ผลสำเร็จ
 - 4.2 ขั้นตอนผิด แต่คำตอบถูก
5. ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ (Technical Error) มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ

Wayne (<https://www.ncetm.org.uk/mathemapedia/Misconceptions>. 2010 : 20)

กล่าวว่าในยุคโลกาภิวัตน์ มีการกล่าวอ้างถึงความจริงเชิงตรรกะ เรายึดที่ตรงการใช้คำฟุ่มเฟือย เรามีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับตรรกะเกี่ยวกับโลกมาก ที่เรามุ่งหวังที่จะแสดงความเหนือกว่าโดย ธรรมชาติของเรา ความเข้าใจผิดตรรกะมาก ดังสืบตัวอย่างที่ส่วนใหญ่เกิดมโนทัศน์ที่ คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด ดังนี้

1. ความเข้าใจผิดทางคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับการใส่ผิดค่า ผิดที่ ผิดตำแหน่ง เด็ก ไม่รู้ว่าแต่ละจำนวนควรจะอยู่ตำแหน่งไหน

2. ความเข้าใจผิดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเศษส่วน 1 หารด้วย $\frac{1}{2}$ ตอบอย่าง
 ทันทิว่าเป็น $\frac{1}{2}$ ผิด คำตอบที่ถูกคือ 2 1 หารด้วย 2 ได้ เป็น $\frac{1}{2}$ เพราะว่าจำนวนเต็มหารด้วย
 เศษส่วนจะได้เศษส่วนเสมอ แต่เมื่อคูณหารโดย $\frac{1}{2}$, ตัวหารเป็น $\frac{1}{2}$ มีค่าน้อยกว่า 1 และ $\frac{1}{4}$ มีค่า
 น้อยกว่า 2 การหาคำตอบ 4 ครั้งเป็นใหญ่ หรือการประยุกต์ใช้วิธีอื่น โดยการหาร 1 โดย $\frac{1}{2}$
 หมายถึงการตัดจำนวนหลัก (1 ในกรณีนี้) ออกเป็น 2 ส่วนครึ่งหนึ่งซึ่งเป็น 2 ทั้งหมด ตอนนี้อยู่
 ที่หารด้วย $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ ก็ยังคงไม่ $\frac{1}{2}$ เพราะตอนนี้อยู่แบ่งครึ่งออกเป็น 4 ส่วน

3. ความเข้าใจผิดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความน่าจะเป็นของการแบ่งส่วนของ
 วงกลมหมุนจากจุดศูนย์กลางที่แบ่งออกเป็นสามส่วน ครึ่งหนึ่งของวงกลมเป็นสีแดงอีก
 ครึ่งหนึ่งแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันคือสีน้ำเงินและ สีเขียว ในการหมุนหนึ่งครั้งความ
 น่าจะเป็นที่จะได้สีน้ำเงินเป็นเท่าไร คนส่วนมากจะตอบทันทีว่า $\frac{1}{3}$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ผิด เรากล่าว
 ว่าครึ่งวงกลมเป็นสีแดงอีกครั้งหนึ่งแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน ที่ทำให้แต่ละส่วนเหล่านี้นั้น
 $\frac{1}{4}$ ของวงกลมทั้งหมด ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะได้สีน้ำเงิน เป็น $\frac{1}{4}$

4. ความเข้าใจผิดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความน่าจะเป็น ของการหยิบไพ่ ใน
 การสุ่มใน 1 สำหรับให้หาความน่าจะเป็นของวาดเอซหรือหัวใจเป็นอย่างไร สาเหตุที่คิดผิด คือ มี
 สีเอซและ 13 หัวใจ 4 และ 13 เป็น 17 ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ในการหยิบไพ่ 52 ใบเท่ากับ $\frac{17}{52}$ จึง
 ผิด ความจริงคือมี 4 เอซก็ยังเป็นจริงที่มี 13 หัวใจและมันเป็นความจริงที่แน่นอนของพวกเขา
 คือผลรวม 17 ซึ่งผิดเพราะ คุณนับแต้มของหัวใจสองครั้ง คำตอบที่ถูกต้องคือ $\frac{16}{52}$

5. ความเข้าใจผิดทางคณิตศาสตร์ แนวคิดของทฤษฎีพีทาโกรัสที่มีชื่อเสียง
 คนส่วนใหญ่คิดว่าพีทาโกรัสมัน : $a^2 + b^2 = c^2$ ผิดนี้จะสามารถเป็นจริงหากเส้นแขนงของ
 สามเหลี่ยมมุมฉากจะแทนด้วย B และ C ตามลำดับและคิดเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก แต่ถ้า
 ตัวอักษรเหล่านั้นจะหัน ไปรอบ ๆ เพื่อที่หนึ่งของเส้นแขนงจะแสดงเป็น C แล้วสูตรจะไม่ถือ
 จริง ใ้เพียงผลรวมของกำลังสองของความยาวของขาจะเท่ากับกำลังสองของความยาวของ
 ด้านตรงข้ามมุมฉาก

6. ความเข้าใจผิดทางคณิตศาสตร์มาใกล้เคียงกับค่าของพายเมื่อใดก็ตามที่มีคน
 ถามค่าของพายจะเข้าใจทันทีว่าพายมีค่าเป็น, 3.14, ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ผิด! ค่าของพายจะถูก

กำหนดโดยการเปรียบเทียบขอบเขตที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง ดังนั้น เท่ากับ $\frac{c}{d}$ การวัดที่แม่นยำยิ่งขึ้นถ่ายเป็นที่ถูกต้องมากขึ้น

7. ความเข้าใจผิดเกี่ยวกับเรื่องรูปเรขาคณิต

8. ความเข้าใจผิดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการบวกเศษส่วนที่มีตัวส่วนไม่

เท่ากันเช่น $\frac{1}{3}$ ของบวก $\frac{1}{3}$ เด็กจะตอบ $\frac{1}{5}$ ผิด

9. ความเข้าใจผิดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรื่องจำนวนจินตภาพ เช่น รากที่สองของ -1 เด็กจะตอบ -1 ซึ่งผิด คำตอบ : รากที่สองของ -1 เป็นจินตภาพ

10. ความเข้าใจผิดวิธีการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเลขอนุกรม เช่นการหาผลบวกตั้งแต่ 1 ถึง 100 Carl Friedrich Gauss, เขาหาผลรวมมาตั้งแต่จำนวน 5,050 ซึ่งเป็นผลรวมของลำดับหรือผลรวม = จำนวนครั้ง (ครั้งแรก + ล่าสุด) หารด้วย 2 หรือ $S = N(F + L) / 2$, ครูที่น่าแปลกใจของเขาให้การปฏิเสธ

ตัวอย่าง การวิเคราะห์หมั่นโน้ตสนั้ที่ตลาดเคลื่อน ของ มัททิกา

A. $\begin{array}{r} 6\ 9\ 3 \\ -\ 2\ 4\ 8 \\ \hline 4\ 4\ 5 \end{array}$	B. $\begin{array}{r} 3\ 2\ 5 \\ -\ 1\ 5\ 1 \\ \hline 1\ 7\ 4 \end{array}$	C. $\begin{array}{r} 7\ 2\ 6 \\ -\ 3\ 4\ 9 \\ \hline 2\ 8\ 7 \end{array}$	D. $\begin{array}{r} 4\ 3\ 4 \\ -\ 2\ 7\ 6 \\ \hline 6\ 8 \end{array}$
E. $\begin{array}{r} 4\ 3\ 6 \\ -\ 1\ 7\ 2 \\ \hline 2\ 6\ 4 \end{array}$	F. $\begin{array}{r} 6\ 2\ 5 \\ -\ 3\ 4\ 8 \\ \hline 1\ 8\ 7 \end{array}$		

มัททิกาสามารถคิดคำนวณการลบได้เป็นอย่างดีเมื่อมีการยืม เพียงแต่พอเมื่อมีการยืมมากกว่าหนึ่งครั้งจึงมีข้อผิดพลาดเกิดขึ้น จากการคำนวณจะเห็นได้ว่าเธอมีวิธีการคิดในลักษณะนี้ “ตัวอย่าง E มัททิกายืม 4 มา 1 แล้วเอาไปวางไว้หน้า 3 และตอนนี้เธอได้เอาวิธีการคิดแบบนี้มาใช้ในโจทย์ข้อ F ในลักษณะที่คิดว่าเธอต้องการ 1 มาวางไว้หน้า 5 หนึ่งตัวและต้องการ 1 มาวางไว้หน้า 2 อีกหนึ่งตัว เธอจึงยืม 6 มาสองตัวเพื่อมาใช้วางในเลขทั้งสองตัวตามดังที่กล่าว” ซึ่งถ้าเป็นแบบนี้จะทำให้มัททิกิหารูปแบบการลบที่ถูกต้องได้ยาก

การให้ความช่วยเหลือก่อนที่มัททิกิจะใช้วิธีนี้ไปจนเกิดความเคยชินเป็นสิ่งจำเป็นต่อเธอมาก คุณจะช่วยเธอได้อย่างไร ลองดูคำแนะนำด้านล่าง

1. การสอนโจทย์การลบเลขทั้งสองรูปแบบในเวลาเดียวกัน โดยตั้งโจทย์การลบเลขสองหลักที่ต้องมีการยืมเลขในหลักสิบกับโจทย์ที่ไม่จำเป็นต้องมีการยืมขึ้นมา

จากนั้นตรวจสอบนักเรียนให้แน่ใจว่าเขาสามารถแยกและเห็นความแตกต่างในการคำนวณ โจทย์ทั้งสองได้ เมื่อนักเรียนผ่านขั้นตอนการลบเลขสองหลักแล้ว ครูจึงเปลี่ยนโจทย์มาเป็น การคำนวณเลขสามหลัก โดยใช้วิธีการเดียวกันกับข้างต้น

ข้อเสนอแนะ : ให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่ด้วย “การบวกเพิ่ม” ตัวลบกับคำตอบเข้าไปซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะต้องได้เท่ากับตัวตั้งใน โจทย์ที่ลบในตอนแรก

2. การใช้ Ten Box ในการแสดงแทนตัวตั้ง จากนั้นชี้ไปที่ตัวที่เอามาลบแล้วถามนักเรียนว่า “เราจำเป็นต้องลบเลขจำนวนนี้เราสามารถลบได้เลยหรือไม่ หรือเราจำเป็นต้อง ยืมก่อน” ซึ่งตามหลักการลบเราต้องยืมเลขในหลักสิบมาช่วยหลักหน่วย ต่อมาก็ให้ยืมเลขในหลักร้อยมาช่วยหลักสิบ ให้นักเรียนบันทึกขั้นตอนแต่ละขั้นตอนไว้ด้วย เสร็จแล้วให้นักเรียน ย้าย Ten Box ตามโจทย์นั้น ๆ ทำตามกระบวนการนี้ให้นักเรียนดู และพูดวิธีการคิดเช่นนี้ให้ นักเรียนฟังเพื่อให้นักเรียนบันทึกในแต่ละขั้นตอนที่ย้าย Ten Box เอาไว้ด้วย

3. ใช้เกมในการทำกิจกรรม เช่น เกมกระดาน, กล้อง, และแบงก์ ในการที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจในเรื่องค่าของตำแหน่ง จากนั้นก็เข้าสู่การคิดคำนวณได้อย่างถูกต้องนั้น เราสามารถใช้เกมในการทำกิจกรรมต่าง ๆ ได้ ยกตัวอย่างเช่น เกมกระดาน เป็นต้น

เมื่อนักเรียนได้เรียนการคำนวณเลขไปหนึ่งแบบแล้วแต่ยังไม่เกิดความคิดรวบยอดหรือ ความเข้าใจพื้นฐานในการคำนวณนั้น ๆ จะส่งผลให้เกิดปัญหาต่อตัวนักเรียนเมื่อต้องเรียนการ คำนวณเลขในรูปแบบอื่นต่อ เช่นเดียวกับคาลอสที่เรียนวิธีการบวกจำนวนที่เท่ากันไปแล้ว (หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า European-Latino ซึ่งวิธีการนี้ก็ได้นำมาสอนในสหรัฐอเมริกาใน เวลาต่อมา) มาดูกันว่าเกิดอะไรขึ้นกับกระบวนการคิดเลขของคาลอส เพราะว่าเขาเอา กระบวนการคิดเลขมารวมกัน คุณพบรูปแบบข้อผิดพลาดของคาลอสหรือไม่

ข้อสรุป

การช่วยให้นักเรียนเรียนรู้ว่าเวลาไหนควรตอบแบบประมาณค่าและเวลาไหนควร ตอบเป็นคำตอบตรงเป็นเรื่องสำคัญ รวมทั้งการส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักเลือกวิธีที่ใช้ในการบวก และ การลบที่เหมาะสม ซึ่งในหลาย ๆ ครั้งกระบวนการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดดูเหมือนจะ เป็นกระบวนการใช้แค่กระดาษกับดินสอเท่านั้นเอง

ในการที่คุณให้นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการบวกและการลบนั้นควรจะทำให้ ความคิดรวบยอดในกฎต่าง ๆ ของการบวกลบเลข พร้อมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนเป็นผู้รู้จักถาม เช่น “แบบนี้เป็นไปได้หรือไม่” เป็นต้น รวมทั้งชี้ให้เห็นถึงความสำคัญของการประมาณค่า และ ฝึกให้นักเรียนสามารถคำนวณเลขได้เป็นอัตโนมัติ

อีกทั้งในระหว่างการสอน คุณจะต้องแน่ใจว่านักเรียนของคุณสามารถทำได้หรือไม่ รู้จักให้เด็กนักเรียนจดบันทึกความก้าวหน้าในการคำนวณเลขของตนเอง รวมทั้งอาจบันทึกขั้นตอนย่อยต่าง ๆ ถ้าจำเป็นด้วยก็ได้ เพื่อที่นักเรียนจะเกิดความชำนาญจากกระบวนการต่าง ๆ ที่ตนได้ฝึก

จากนั้นในการทำกิจกรรมต่าง ๆ ของนักเรียน คุณจะต้องสังเกตการพัฒนากระบวนการคิดจากการปฏิบัติและผลที่ได้จากงานของนักเรียนอีกด้วย

ข้อเสนอแนะ

1. ก่อนที่นักเรียนจะได้เรียนกระบวนการบวกและลบเลขนั้น จำเป็นหรือไม่ที่นักเรียนจะต้องเข้าใจในเรื่องค่าของตำแหน่งและตำแหน่งของค่าต่าง ๆ ในเลขจำนวนหลาย ๆ หลักก่อน และทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

2. คุณจะทำอย่างไรถ้ามีนักเรียนแค่บางส่วนที่เข้าใจในเรื่องค่าของตำแหน่งตัวเลข

3. รูปแบบข้อผิดพลาดของการบวกและการลบเลขนั้นเป็นส่วนหนึ่งที่เกิดจากความเข้าใจผิดในเรื่องของหลักการและกฎของกระบวนการคำนวณ และด้วยสาเหตุนี้จะส่งผลให้เกิดปัญหาต่อการคำนวณในระดับที่ยากต่อไป

4. เมื่อพบนักเรียนที่มีข้อผิดพลาดในการคำนวณดังลักษณะที่กล่าวมาในบทนี้ให้คุณเลือกเอาวิธีการแก้ไขที่เหมาะสมกับนักเรียนไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนได้

เทคนิคการสอนโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

โพลยา (Polya. 1957 : 5-40) เป็นหนึ่งในบุคคลกลุ่มแรกที่ได้สนใจในเรื่องกระบวนการแก้ปัญหา (Problem Solving) เขาได้เขียนหนังสือที่มีชื่อเสียงเล่มหนึ่ง คือ How to Solve it ซึ่งเป็นหนังสือที่ชี้แนะกลวิธีในการแก้ปัญหาซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

การแก้โจทย์ปัญหาเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน ที่จะต้องใช้ทั้งความรู้ ประสบการณ์ ที่ผ่านการแก้โจทย์ปัญหาที่หลากหลาย การรู้อย่างชัดเจน การรู้อย่างแจ่มแจ้ง ทักษะคิด ความเชื่อและความสามารถที่เพียงพอในการแก้โจทย์ปัญหา กิจกรรมต่าง ๆ เหล่านี้ไม่สามารถที่จะสรุปได้เป็นกฎเพื่อหาคำตอบเช่นเดียวกับทักษะการคิดคำนวณได้ อย่างไรก็ตามจากผลการวิจัยและผลในการสังเกตการสอนในชั้นเรียนของนักคณิตศาสตร์ศึกษา นำจะสรุปได้ว่าการที่เด็กได้เรียนรู้ยุทธวิธีต่าง ๆ ในการแก้โจทย์ปัญหา จะสามารถช่วยเด็กในการปรับปรุงความสามารถ

ในการที่จะวางแผนในการแก้โจทย์ปัญหาได้ นอกจากนั้น เทคนิควิธีการสอนที่ดีของครูก็มีส่วนช่วยให้เด็กประสบความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหาได้เช่นเดียวกัน

ในการสอน โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น ผู้สอนควรมีความรู้ความเข้าใจในองค์ประกอบของกระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหาด้วย ซึ่งประกอบด้วยสิ่งสำคัญหลายอย่างดังต่อไปนี้

1. การมองเห็นภาพ (Visualizing) ผู้ที่จะแก้ปัญหาก็ต้องมองเห็นและกว้างไกลมองเห็นแนวทางในการคิดแก้ปัญหา
2. การจินตนาการ (Imagining) ในการคิดแก้ปัญหาจะต้องรู้จักจินตนาการว่าควรเป็นอย่างไร เพื่อเป็นแนวทางในการคิดแก้ปัญหา
3. การจัดทำอย่างมีทักษะ (Manipulating) เมื่อมองเห็นแนวทางแล้วก็ลงมือทำอย่างมีระบบ มีขั้นตอน ทำด้วยความชำนาญ
4. การวิเคราะห์ (Analyzing) รู้จักวิเคราะห์ตามขั้นตอนที่กระทำนั้น
5. การสรุป (Abstracting) ลงมือกระทำจนมองเห็นรูปแบบแล้วก็สามารถสรุปได้
6. การโยงความคิด (Associating Ideas) ความสามารถในการสัมพันธ์ความคิดและมองเห็นแนวทางได้

นักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านได้ใช้ความพยายามอย่างเต็มที่ที่จะหาคำตอบว่า “ทำอย่างไร เราจึงจะสอนให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์” ผลของความพยายามนี้ ทำให้เราได้ทราบวิธีการที่จะช่วยนักเรียนได้บ้าง แม้ว่าจะยังไม่เป็นที่น่าพอใจนักก็ตาม ซูแดม (Suydam, 1995 : 47) ได้รวบรวมผลงานวิจัยของนักการศึกษาและผู้สนใจแล้วสรุปไว้ในหนังสือ Teaching and Learning : A Problem Solving - focus ของสมาคมครูผู้สอนคณิตศาสตร์ของอเมริกา (NCTM)

การสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีสาระบางประการที่น่าสนใจ ดังนี้

1. การสอนยุทธวิธีในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ให้แก่นักเรียน ช่วยเพิ่มหนทางในการแก้ปัญหา ในการจัดการกับโจทย์ปัญหา ถ้าวิธีการหนึ่งใช้ไม่ได้ผล ก็ยังมีอีกวิธีหนึ่งที่น่าจะทดลองใช้ดู
2. การวางระบบการสอนแก้โจทย์ปัญหา ช่วยเพิ่มความสามารถของนักเรียนในการแก้โจทย์ปัญหา อีกทั้งการสอนยุทธวิธีเฉพาะเรื่อง เป็นสิ่งที่จะช่วยนักเรียนได้ดี
3. การเขียนแผนผัง การทบทวนโจทย์ไปมา การเขียนข้อมูลต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้มาช่วยได้อย่างมากในการคิดแก้โจทย์ปัญหา อย่างน้อยก็ช่วยให้เกิดภาพของโจทย์

ที่เป็นรูปธรรม ช่วยในเรื่องของการคิดต่อ และช่วยให้จำโจทย์ได้ง่ายขึ้น

4. การอภิปรายซักถามเกี่ยวกับยุทธวิธีที่ใช้ พร้อมให้เหตุผลด้วยว่าทำไมจึงใช้ยุทธวิธีเช่นนั้น การรู้ไม่เพียงแต่ว่า “ทำอะไร” แต่รู้ด้วยว่า “ทำไมจึงต้องทำเช่นนั้น” ช่วยเสริมในการถ่ายโยงวิธีการไปยังปัญหาอื่น ๆ ได้ด้วย

5. สิ่งสำคัญในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ การแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่า เราตีความจากโจทย์ปัญหาออกมาเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ ได้อย่างไร สิ่งนี้เป็นเรื่องที่สำคัญมากในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

6. การทำงานรวมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ เพื่อแก้โจทย์ปัญหา เป็นทางหนึ่งที่จะช่วยให้นักเรียนมีทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาได้ดีขึ้น

7. เทคนิคและยุทธวิธีในการแก้ปัญหา สามารถสอนหรือเรียนรู้ได้นอกเหนือจากประสบการณ์การแก้ปัญหา นักเรียนควรได้รับการเสนอแนะเทคนิควิธีที่มีประสิทธิภาพ และหลากหลายในการแก้ปัญหาด้วย

8. ไม่มีเทคนิควิธีการแก้ปัญหาใดที่สามารถใช้ในการแก้ปัญหาได้ทุกรูปแบบการแก้ปัญหาหนึ่งอาจใช้ เทคนิควิธีการแก้ปัญหาหลาย ๆ วิธีก็ได้

9. การสอนให้นักเรียนรู้จักเทคนิควิธีการแก้ปัญหาหลาย ๆ วิธี จะเป็นการเตรียมนักเรียนให้พร้อม ที่จะเลือกเทคนิควิธีที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์ในการแก้ปัญหาที่เขาเผชิญ

10. ควรจัดประสบการณ์ให้นักเรียนมีโอกาสในการแก้ปัญหา ในหลายรูปแบบ และเป็นปัญหาที่นักเรียนต้องใช้ความพยายามในการแก้ปัญหารวมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนใช้เทคนิควิธีต่าง ๆ หลาย ๆ วิธี เพื่อให้ตระหนักว่าการแก้ปัญหาไม่จำเป็นจะต้องมีวิธีการแก้ปัญหาเพียงวิธีเดียว

11. ปัญหาที่เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน จากการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหามีสัมพันธ์กับระดับพัฒนาการของผู้เรียน

แนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา

แนวทางในการแก้โจทย์ปัญหานี้จะเป็นเครื่องมือที่จะนำพาให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา แนวทางในการแก้ปัญหา อาจหมายถึง กระบวนการที่ใช้ใน

การแก้ปัญหา หรืออาจหมายถึงวิธีการเฉพาะที่เหมาะสมกับสภาพของปัญหา ซึ่งใช้ช่วยในการหาคำตอบ โดยแต่ละแนวทางมีรายละเอียดดังนี้

1. แนวทางการแก้โจทย์ปัญหาที่หมายถึงกระบวนการ

กระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหาที่นิยมกันอย่างแพร่หลาย คือ กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยา ซึ่งมีลำดับขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหา 4 ขั้นตอน คือ

1.1 การเข้าใจปัญหา ต้องทำความเข้าใจว่า สิ่งใดที่เราต้องการค้นหา สิ่งใดคือข้อมูล สิ่งใดคือเงื่อนไข และเงื่อนไขนั้นจะเป็นตัวนำไปสู่สิ่งที่เราค้นหาหรือไม่ จากนั้นเป็นการวางแผนผัง เพื่อแสดงให้เห็นถึงจุดที่สำคัญได้ และแยกเงื่อนไขออกเป็นตอน ๆ

1.2 การคิดวางแผนในการแก้ปัญหา เป็นการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลกับสิ่งที่ต้องการค้นหา แต่ถ้าหากไม่สามารถหาพบได้ในทันทีทันใดนั้น ต้องรู้จักพิจารณาปัญหาข้างเคียงประกอบการวางแผน ในการคิดวางแผนนี้ต้องพิจารณาว่า เคยเห็นปัญหานั้นมาก่อนหรือไม่ ทราบข้อมูลที่เกี่ยวข้อง หรือทฤษฎีที่จะเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาหรือไม่ ถ้าไม่สามารถแก้ปัญหาทั้งหมดได้ ก็พยายามแก้ปัญหาบางส่วนก่อน และพิจารณาว่าปัญหานั้นเป็นปัญหาทั่วไป หรือเป็นปัญหาที่เฉพาะเจาะจง

1.3 การดำเนินการตามแผนในการลงมือแก้ปัญหานั้น ต้องมีการทบทวนขั้นตอนแต่ละขั้นตอน ว่าเป็นขั้นตอนที่ถูกต้องหรือไม่ สามารถทดสอบได้หรือไม่ว่าถูกต้อง

1.4 การตรวจสอบการดำเนินการ เป็นการทบทวนผลลัพธ์จากการดำเนินการแก้ปัญหา และพิจารณาว่าจะสามารถใช้วิธีการนี้กับการแก้ปัญหาลักษณะอื่น ๆ ได้หรือไม่

2. แนวทางการแก้โจทย์ปัญหานั้นวิธีการเฉพาะ

แนวทางการแก้โจทย์ปัญหานั้นวิธีการเฉพาะ ที่เป็นเครื่องมือในการแก้โจทย์ปัญหา ได้แก่ ยุทธวิธีต่าง ๆ เช่น ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) ใช้ตัวแปร (Use a Variable) ค้นหาแบบรูป (Look for a Pattern) วาดภาพ (Draw a Diagram) สร้างรายการ (Make a List) ทำย้อนกลับ (Work Backward) สร้างตาราง (Construct a Table) ทำปัญหาให้ง่ายกว่า (Solve a Simpler or Similar Problem) เป็นต้น

การนำเสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาสำหรับนักเรียนสิ่งที่ต้องตระหนักอยู่เสมอคือ

2.1 ยุทธวิธีทั้งหลาย สามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีอยู่อย่างหลากหลาย

2.2 ยุทธวิธีสามารถประยุกต์ใช้ในแนวทางต่างกัน สำหรับปัญหาที่ต่างกัน

2.3 การแก้ปัญหาสามารถแก้ได้หลากหลายวิธี ไม่จำเป็นเสมอที่จะใช้ยุทธวิธี

ที่เฉพาะเจาะจง

2.4 นักเรียนไม่บรรลุผลในระดับเดียวกันทั้งหมดในการใช้แต่ละยุทธวิธี

2.5 กระบวนการเลือกใช้ยุทธวิธีมีความสำคัญพอ ๆ กับความถูกต้องของการแก้ปัญหา เมื่อแก้ปัญหาได้คำตอบไม่ถูกต้องนักเรียนควรมีโอกาสเลือกและลองใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาแบบอื่น ๆ

2.6 นักเรียนทุกคนต้องมีโอกาสที่จะเรียน และมีโอกาสใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า การหาแนวทางแก้ไข มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด หมายถึง การหาวิธีการที่จะป้องกันการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนหรือข้อผิดพลาด หรือการสร้างมโนทัศน์ที่ถูกต้องทางคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการศึกษาจากสาเหตุแล้ว นำหลักการหรือทฤษฎีการเรียนรู้คณิตศาสตร์มาแก้ไข

การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ประกอบด้วยเนื้อหา ดังนี้
(สถาบันส่งเสริมการสอนคณิตศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551 : 83-118)

1. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ปัญหาบางอย่างในชีวิตประจำวันของคนเราสามารถแก้ได้ด้วยสมการหรือสมการ เช่น “จำนวนโคน 221.50 แล้วเท่ากับ 16.49” ถ้าให้ x เป็นจำนวนที่ไม่ทราบค่า จะเขียนสมการได้เป็น “ $x - 221.50 = 16.49$ ” เราเรียก “จำนวนโคน 221.50 แล้วเท่ากับ 16.49” ว่า ประโยคภาษา และเรียก “ $x - 221.50 = 16.49$ ” ว่า ประโยคสัญลักษณ์

สมการ คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวน โดยมีเครื่องหมายเท่ากับ (=) บอกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน

สมการสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ประเภท คือ

1. สมการที่ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ เช่น $a \times 5 = 10$
(ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นสมการที่เป็นจริงหรือเป็นเท็จ เพราะไม่ทราบค่า a)

2. สมการที่เป็นจริง เช่น $2 \times 6 = 4 \times 3$
(เป็นสมการที่เป็นจริงเพราะ $2 \times 6 = 12$ และ $4 \times 3 = 12$)

3. สมการเป็นเท็จ เช่น $2 - 6 = 4$
(เป็นสมการที่เป็นเท็จ เพราะ $2 - 6 = -4 \neq 4$)

หมายเหตุ สมการที่ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ จะเป็นสมการที่มีตัวไม่ทราบค่าอยู่ ซึ่งตัวไม่ทราบค่านี้เรียกว่า ตัวแปร เช่น

$$1. \frac{1}{2}x = 4 \quad 2. b - 6 = 93 \quad 3. 20y = \frac{y}{7}$$

คำตอบของสมการที่มีตัวแปร คือ จำนวนที่แทนตัวแปรในสมการนั้นแล้วทำให้สมการเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1 $2x + 5 = 4$

จงตรวจสอบดูว่า $\frac{1}{2}$ และ $-\frac{1}{2}$ เป็นคำตอบของสมการนี้หรือไม่

แทนค่า $x = \frac{1}{2}$ จะได้ $2\left(\frac{1}{2}\right) + 5 = 4$

$$1 + 5 = 4$$

$$6 = 4$$

ซึ่งเป็นสมการที่เป็นเท็จ แสดงว่า $\frac{1}{2}$ ไม่เป็นคำตอบของสมการ

แทนค่า $x = -\frac{1}{2}$ จะได้ $2\left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 4$

$$-1 + 5 = 4$$

$$4 = 4$$

ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง แสดงว่า $-\frac{1}{2}$ เป็นคำตอบของสมการ

ตัวอย่างที่ 2 $y^2 = 4$

จงตรวจสอบดูว่า 2 และ -2 เป็นคำตอบของสมการนี้หรือไม่

แทนค่า $y = 2$ จะได้ $2^2 = 4$

ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง แสดงว่า 2 เป็นคำตอบของสมการ

แทนค่า $y = -2$ จะได้ $(-2)^2 = 4$

ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง แสดงว่า -2 เป็นคำตอบของสมการ

ตัวอย่างที่ 3 $a + 9 = a$

จงตรวจสอบดูว่า 0 และ 6.5 เป็นคำตอบของสมการนี้หรือไม่

แทนค่า $a = 0$ จะได้ $0 + 9 = 0$

$$9 = 0$$

ซึ่งเป็นสมการที่เป็นเท็จ แสดงว่า 0 ไม่เป็นคำตอบของสมการ

แทนค่า $a = 6.5$ จะได้ $6.5 + 9 = 6.5$

$$15.5 = 6.5$$

ซึ่งเป็นสมการที่เป็นเท็จ แสดงว่า 6.5 ไม่เป็นคำตอบของสมการ

และจากการตรวจสอบจำนวนจริงทุกจำนวนจะได้ว่า ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ สมการสามารถแยกประเภทตามลักษณะของจำนวนคำตอบได้ 3 ประเภท คือ

1. สมการที่มีทุกจำนวนเป็นคำตอบ เช่น $2 \times y = y \times 2$ มีจำนวนจริงทุกจำนวนเป็นคำตอบ
2. สมการที่มีบางจำนวนเป็นคำตอบ เช่น $4x + 2 = 2x + 4$ มี 1 เป็นคำตอบของสมการ
3. สมการที่ไม่มีจำนวนใดเป็นคำตอบ เช่น $8 - z = 1 - z$ ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบ สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ สมการที่สามารถเขียนในรูป $ax + b = 0$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a \neq 0$

ตัวอย่างที่ 4

1. $2x + 9 = 8$ เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพราะ สามารถเขียนในรูป $2x + (9 - 8) = 0$
2. $y - 2 = 0$ เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพราะ สามารถเขียนในรูป $y + (-2) = 0$
3. $\frac{4}{5}a = (-6)$ เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพราะ สามารถเขียนในรูป $\frac{4}{5}a + (-(-6)) = 0$

การแก้สมการ คือ การหาคำตอบของสมการ หรือหาค่าตัวแปรในสมการนั้นๆ

การแก้สมการ อาจใช้การแทนค่าตัวแปร เพื่อตรวจสอบว่าจำนวนนั้นทำให้สมการเป็นจริงหรือไม่ ในการตรวจสอบทีละจำนวนจะทำให้เสียเวลาและไม่สะดวก แต่ถ้าอาศัยสมบัติของการเท่ากัน จะทำให้ง่ายและสะดวกมากยิ่งขึ้น สมบัติของการเท่ากัน ได้แก่ สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติการบวก และสมบัติการคูณ

สมบัติของการเท่ากัน

ให้ a, b และ c แทนจำนวนใดๆ

1. สมบัติสมมาตร

ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$

เช่น ถ้า $5 = b$ แล้ว $b = 5$

2. สมบัติถ่ายทอด

ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

เช่น ถ้า $a = 3$ และ $3 = 4 + y$ แล้ว $a = 4 + y$

3. สมบัติการบวก

ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$

เช่น ถ้า $a = 7$ แล้ว $a + 1 = 7 + 1$

ถ้า $a = b$ แล้ว $a - c = b - c$

เช่น ถ้า $a = 1.5$ แล้ว $a - 9 = 1.5 - 9$

4. สมบัติการคูณ

ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

เช่น ถ้า $a = 21$ แล้ว $a \times 5 = 21 \times 5$

ถ้า $a = b$ แล้ว $a \times \frac{1}{c} = b \times \frac{1}{c}$ เมื่อ $c \neq 0$

(หรือ ถ้า $a = b$ แล้ว $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ เมื่อ $c \neq 0$)

เช่น ถ้า $a = 0.3$ แล้ว $a \times \frac{1}{2} = 0.3 \times \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาคำตอบของสมการและตรวจสอบคำตอบ

1. $\frac{y-6}{3} = 4.2$

วิธีทำ $\frac{y-6}{3} = 4.2$

นำ 3 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } \frac{y-6}{3} \times 3 = 4.2 \times 3$$

$$\text{หรือ } y - 6 = 12.6$$

นำ 6 มาบวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } y - 6 + 6 = 12.6 + 6$$

$$\text{หรือ } y = 18.6$$

ตรวจสอบคำตอบ แทน $y = 18.6$ ในสมการ $\frac{y-6}{3} = 4.2$

จะได้ $\frac{18.6-6}{3} = 4.2$

$$\frac{12.6}{3} = 4.2$$

$$4.2 = 4.2 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง}$$

ดังนั้น 18.6 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{y-6}{3} = 4.2$ ตอบ 18.6

2. $\frac{4(x-2)}{5} + 3 = 9$

วิธีทำ $\frac{4(x-2)}{5} + 3 = 9$

นำ 3 มาลบออกทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } \left[\frac{4(x-2)}{5} + 3 \right] - 3 = 9 - 3$$

และใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่ จะได้

$$\frac{4(x-2)}{5} + (3-3) = 9-3$$

$$\frac{4(x-2)}{5} = 6$$

นำ 5 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } 5 \times \frac{4(x-2)}{5} = 5 \times 6$$

$$4(x-2) = 30$$

นำ $\frac{1}{4}$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } \frac{1}{4} \times 4(x-2) = \frac{1}{4} \times 30$$

$$x-2 = \frac{15}{2}$$

นำ 2 มาบวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } x-2+2 = \frac{15}{2} + 2$$

$$\text{หรือ } x = \frac{19}{2}$$

ตรวจสอบคำตอบ แทน $x = \frac{19}{2}$ ในสมการ $\frac{4(x-2)}{5} + 3 = 9$

จะได้
$$\frac{4\left(\frac{19}{2} - 2\right)}{5} + 3 = 9$$

$$\frac{4\left(\frac{15}{2}\right)}{5} + 3 = 9$$

$$\frac{4 \times 15}{5 \times 2} + 3 = 9$$

$$6 + 3 = 9$$

$9 = 9$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{19}{2}$ เป็นคำตอบของสมการ $\frac{4(x-2)}{5} + 3 = 9$ ตอบ $\frac{19}{2}$

3. $3a = 15 - 2(a + 5)$

วิธีทำ $3a = 15 - 2(a + 5)$

ใช้สมบัติการกระจาย

จะได้ $3a = 15 - 2a - 10$

$$3a = 5 - 2a$$

นำ $2a$ มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $3a + 2a = (5 - 2a) + 2a$

และใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่ จะได้

$$3a + 2a = 5 + (-2a + 2a)$$

$$5a = 5$$

นำ $\frac{1}{5}$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\frac{1}{5} \times (5a) = \frac{1}{5} \times 5$

และใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่ จะได้

$$\left(\frac{1}{5} \times 5\right)a = 1$$

หรือ $a = 1$

ตรวจสอบคำตอบ แทน $a = 1$ ในสมการ $3a = 15 - 2(a + 5)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad 3 \times 1 &= 15 - 2(1 + 5) \\ 3 &= 15 - 2(6) \\ 3 &= 15 - 12 \\ 3 &= 3 \quad \text{เป็นสมการที่เป็นจริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น 1 เป็นคำตอบของสมการ $3a = 15 - 2(a + 5)$ ตอบ 1

โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การแก้โจทย์สมการ เป็นการหาคำตอบของโจทย์ที่มีลักษณะเป็นประโยคภาษา โดยเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบของสมการ และใช้สมบัติการเท่ากันในการแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

หลักในการแก้โจทย์ปัญหาสมการ มี 2 ขั้นตอน คือ

1. ขั้นตอนการสร้างสมการ

- 1.1 ทำความเข้าใจในโจทย์ ว่า โจทย์ต้องการอะไร
- 1.2 กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการ
- 1.3 สร้างความสัมพันธ์ของโจทย์ในรูปแบบตัวแปร

2. ขั้นตอนการแก้สมการ

- 2.1 แก้สมการโดยใช้สมบัติการเท่ากัน
- 2.2 ตรวจสอบคำตอบกับโจทย์ทุกครั้ง
- 2.3 สรุปคำตอบของโจทย์ปัญหา

ตัวอย่างที่ 6 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีเส้นรอบรูปยาว 72 นิ้ว จงหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้

วิธีทำ ให้ด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ละด้านยาว x นิ้ว และมีเส้นรอบรูปยาว 72 นิ้ว เนื่องจากเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมด้านเท่าคือ $x + x + x = 3x$

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 3x = 72$$

$$\text{นั่นคือ} \quad x = \frac{72}{3} = 24 \quad \left(\text{นำ } \frac{1}{3} \text{ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ} \right)$$

ตรวจสอบคำตอบ

ถ้า ด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ละด้านยาว 24 นิ้ว

จะได้เส้นรอบรูปเท่ากับ $3 \times 24 = 72$ นิ้ว

นั่นคือ รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีด้านยาวด้านละ 24 นิ้ว

ตัวอย่างที่ 7 ในไร่ปศุสัตว์แห่งหนึ่งได้เลี้ยงวัวและนกกระทาจอกเทศไว้ ซึ่งถ้านับหัวรวมกันแล้วได้ 60 หัว และนับขา รวมกันได้ 158 ขา ในไร่ปศุสัตว์นี้เลี้ยงวัวและนกกระทาจอกเทศไว้อย่างละกี่ตัว

วิธีทำ กำหนดให้ในไร่ปศุสัตว์นี้เลี้ยงวัวไว้ k ตัว

หัวของวัวและนกกระทาจอกเทศรวมกันได้ 60 หัว

ดังนั้น ในไร่ปศุสัตว์นี้เลี้ยงนกกระทาจอกเทศไว้ $60 - k$ ตัว

และ จำนวนขาของนกกระทาจอกเทศทั้งหมดเท่ากับ $2(60 - k)$ ขา

จำนวนขาของวัวทั้งหมดเท่ากับ $4k$

เนื่องจากนับขาของวัวและนกกระทาจอกเทศทั้งหมดได้ 158 ขา

นั่นคือ

$$4k + 2(60 - k) = 158$$

$$4k + 120 - 2k = 158$$

$$2k + 120 = 158$$

$$2k = 38$$

(นำ 120 ลบออกทั้งสองข้างของ

สมการ)

$$k = 19$$

(นำ $\frac{1}{2}$ คูณทั้งสองข้างของสมการ)

ดังนั้น ไร่ปศุสัตว์นี้เลี้ยงวัวไว้ 19 ตัวและนกกระทาจอกเทศ $60 - 19 = 41$ ตัว

ตรวจสอบคำตอบ

จำนวนหัวทั้งหมดของสัตว์ทั้งสองเท่ากับ $19 + 41 = 60$ หัว

จำนวนขาทั้งหมดของสัตว์ทั้งสองเท่ากับ $4(19) + 2(41) = 76 + 82 = 158$ ขา

นั่นคือ ไร่ปศุสัตว์นี้เลี้ยงวัวไว้ 19 ตัวและนกกระทาจอกเทศ 41 ตัว

แบบทดสอบ

ความหมายของแบบทดสอบ

ไพศาล วรคำ (2552 : 227) ได้ให้ความหมายไว้ว่า แบบทดสอบ (Test) หมายถึงชุดของข้อคำถามที่ใช้วัดค่าของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง โดยมีคำตอบที่ถูกต้องแน่นอน และมีกฎเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนนอย่างสมเหตุสมผลและแน่นอน

บุญธรรม กิจปริคาบวิสุทธิ (2542 : 72) ให้ความหมาย แบบทดสอบว่า เป็นวิธีการเชิงระบบที่ใช้ในการเปรียบเทียบพฤติกรรมของบุคคลตั้งแต่ สองคนขึ้นไป ณ เวลาหนึ่ง หรือของบุคคลคนเดียวหรือหลายคนในเวลาต่างกัน

Brown (อ้างใน บุญธรรม กิจปริคาบวิสุทธิ. 2542 : 72) ให้ความหมายแบบทดสอบว่าเป็นวิธีการเชิงระบบที่ใช้สำหรับวัดตัวอย่างพฤติกรรม

ตามความหมายแบบทดสอบจะมีลักษณะที่สำคัญ 3 ประการ

1. แบบทดสอบเป็นวิธีเชิงระบบ (Systematic Procedure) หมายความว่าแบบทดสอบนั้นจะต้องมีกฎเกณฑ์แน่นอนเกี่ยวกับโครงการการบริหารจัดการและการให้คะแนน
2. แบบทดสอบเป็นการวัดพฤติกรรม (Behaviors) ซึ่งจะวัดเฉพาะพฤติกรรมที่วัดได้เท่านั้น โดยผู้ตอบสนองตอบต่อข้อคำถามที่กำหนดให้ มิใช่เป็นการวัดโดยตรง
3. แบบทดสอบเป็นเพียงส่วนหนึ่งของพฤติกรรมที่ต้องการวัดทั้งหมด (Sample of All Possible Items) ตามความเป็นจริง ไม่มีแบบทดสอบชุดใดที่จะมีข้อคำถามวัดพฤติกรรมที่ต้องการได้ทั้งหมด ฉะนั้นจึงต้องตกลงว่าข้อคำถามในแบบทดสอบเป็นตัวแทนของข้อคำถามทั้งหมดที่ใช้วัดพฤติกรรมนั้น และถ้าผู้ตอบ ตอบข้อคำถามใด คำถามหนึ่งถูก จะต้องให้คะแนนเท่ากัน

จากคำกล่าวข้างต้นสรุปได้ว่า แบบทดสอบ คือ เครื่องมือในการวัดผลชนิดหนึ่งที่มีลักษณะเป็นวิธีการที่มีระบบซึ่งอาจเป็นชุดคำถาม รายการ หรือสถานการณ์ที่ใช้กระตุ้นให้ผู้ถูกทดสอบแสดงพฤติกรรมที่ต้องการสังเกตในช่วงเวลาที่กำหนด เพื่อเปรียบเทียบการกระทำของบุคคลนั้นกับคนอื่น ๆ หรือกับเกณฑ์มาตรฐานที่วางไว้ และวัดผลออกมา

ประเภทของแบบทดสอบ

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนประเภทที่ครูสร้างมีหลายรูปแบบ แต่ที่นิยมใช้มี 6 แบบ คือ แบบกาถูกผิด แบบเติมคำ แบบตอบสั้นๆ แบบจับคู่ แบบเลือกตอบ และแบบอัตนัยหรือความเรียง

แบบสอบแบบอัตนัยหรือความเรียง (Subjective or Essay Test)

ลักษณะทั่วไป เป็นข้อสอบที่มีเฉพาะคำถาม แล้วทำให้นักเรียนเขียนตอบอย่างเสรีเขียนบรรยายตามความรู้ และข้อคิดเห็นของแต่ละคน

หลักในการสร้าง

1. เขียนคำชี้แจงเกี่ยวกับวิธีการตอบให้ชัดเจน ระบุจำนวนข้อคำถาม เวลาที่ใช้สอบ และคะแนนเต็มของแต่ละข้อ
2. เนื่องจากข้อสอบแบบนี้มีเฉพาะคำถาม และแต่ละข้อ มักจะให้คะแนนมาก ดังนั้นควรเขียนคำถามให้ชัดเจนเพื่อไม่ให้ไขว้เขวในการตอบ
3. ไม่ควรตั้งคำถามเฉพาะประเภทความรู้ความจำหรือถามปัญหาที่มีคำตอบในหนังสือ ซึ่งเป็นการให้ตอบแบบจำกัด (Restricted Response) แต่พยายามถามประเภทสูงกว่า ความรู้ความจำ คือ ถามให้ใช้ความคิด ซึ่งเป็นการให้ตอบแบบขยาย (Unrestricted Response) มักขึ้นต้นด้วยคำว่าจงอธิบาย จงอภิปราย จงบรรยาย จงเปรียบเทียบ จงวิเคราะห์ ให้ประมาณค่า ให้บอกความสัมพันธ์ วิเคราะห์ เป็นต้น
4. กำหนดเวลาให้ตอบนานพอสมควร เพราะผู้ตอบต้องใช้เวลารวบรวมความคิด จัดระบบความคิด และเขียนคำตอบด้วยถ้อยคำของตัวเอง หากกำหนดเวลาน้อย ไม่สามารถใช้พลังความคิดได้เต็มความสามารถ
5. เลือกถามเฉพาะจุดที่สำคัญของเรื่อง เพราะไม่สามารถถามได้ทุก ๆ เนื้อหาที่เรียน
6. ไม่ควรให้มีการเลือกตอบเพียงบางข้อ เช่น 7 ข้อให้เลือกทำ 6 ข้อ หรือ 4 ข้อให้เลือกทำ 3 ข้อ เหตุผลมีดังนี้
 - 6.1 ไม่สามารถวัดเรื่องที่สำคัญได้ทุกเรื่อง
 - 6.2 คำถามแต่ละข้อมีความยากง่ายไม่เท่ากัน จะมีปัญหาในการจัดตำแหน่งผู้เข้าสอบว่าใครจะเก่งกว่ากัน โดยเฉพาะการประเมินผลแบบอิงกลุ่ม
7. การตรวจให้คะแนน ควรปฏิบัติดังนี้
 - 7.1 เขียนแนวคำตอบไว้ก่อน และระบุคะแนนว่า ประเด็นใดตอนใดควรได้กี่คะแนน
 - 7.2 ควรตรวจเฉพาะข้อเดียวจนครบทุกคน แล้วตรวจข้อต่อไป
 - 7.3 ไม่ควรดูข้อผู้สอบ เพื่อป้องกันไม่ให้เกิดอคติในการให้คะแนน

ข้อดีของข้อสอบแบบอัตนัยหรือบรรยาย

1. สามารถวัดพฤติกรรมต่างๆ ได้ทุกด้าน โดยเฉพาะพฤติกรรมด้านการสังเคราะห์
2. ผู้ตอบได้มีโอกาสแสดงความคิดเห็น หรือเจตนาของตน
3. โอกาสในการตอบเดาโดยไม่มีความรู้ในเรื่องนั้นแล้วได้คะแนนน้อยมาก

4. วัดความสามารถในการเขียนและส่งเสริมการใช้ภาษาได้เป็นอย่างดี

ข้อจำกัดของข้อสอบแบบอัตนัยหรือบรรยาย

1. ออกคำถามวัดได้น้อยข้อ เนื่องจากแต่ละข้อจะต้องใช้เวลาตอบนานจึงวัดได้ไม่คลุมหลักสูตร หรือเนื้อหาสาระที่สำคัญๆ

2. การตรวจให้คะแนนมักจะมีความคลาดเคลื่อนมาควบคุมให้เกิดความยุติธรรมได้ยาก

3. ไม่เหมาะที่จะใช้สอบกับนักเรียนจำนวนมากๆ เพราะใช้เวลาในการตรวจลายมือของผู้ตอบและประสิทธิภาพในการเขียนบรรยายอาจจะมีผลต่อคะแนน

สมนึก ภัททิยธานี (2549 : 63) ประเภทของแบบทดสอบ สามารถแบ่งประเภทออกได้หลายลักษณะ ขึ้นอยู่กับเกณฑ์ที่จะใช้ดังนี้

1. แบ่งตามสมรรถภาพที่จะวัด แบ่งเป็น 3 ประเภท

1.1 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ (Achievement Test) หมายถึง แบบทดสอบที่วัดสมรรถภาพสองด้านต่าง ๆ ที่นักเรียนได้รับการเรียนรู้ผ่านมาแล้วว่ามีอยู่เท่าใด แบบทดสอบแบ่งออกเป็น 2 ชนิด

1.1.1 แบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้น หมายถึง แบบทดสอบที่มุ่งวัดผลสัมฤทธิ์ของผู้เรียนเฉพาะกลุ่มที่ครูสอน

1.1.2 แบบทดสอบมาตรฐาน หมายถึง แบบทดสอบที่มุ่งวัดผลสัมฤทธิ์มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบคุณภาพต่าง ๆ ของนักเรียนที่ต่างกลุ่มกัน เช่น แบบทดสอบมาตรฐานระดับชาติ

1.2 แบบทดสอบวัดความถนัด (Aptitude Test) หมายถึง แบบทดสอบที่มุ่งวัดสมรรถภาพสมองของผู้เรียน

1.2.1 แบบทดสอบวัดความถนัดทางการเรียน หมายถึง แบบทดสอบที่มุ่งวัดความถนัดทางด้านวิชาการต่าง ๆ เช่น ด้านภาษา

1.2.2 แบบทดสอบวัดความถนัดเฉพาะ หมายถึง แบบทดสอบที่มุ่งวัดความถนัดเฉพาะที่เกี่ยวกับงานอาชีพต่าง ๆ หรือความสามารถพิเศษ เช่น ความสามารถทางดนตรี

1.3 แบบทดสอบวัดบุคลิกภาพทางสังคม หมายถึง แบบทดสอบที่ใช้วัดบุคลิกภาพและการปรับตัวให้เข้ากับ สังคม ซึ่งเป็นเรื่องที่วัด ได้ยาก ผลที่ได้ไม่คงที่แน่นอน

1.3.1 แบบทดสอบวัดเจตคติที่มีต่อบุคคล สิ่งของ เรื่องราว

1.3.2 แบบทดสอบวัดความสนใจที่มีต่ออาชีพ การศึกษา

1.3.3 แบบทดสอบวัดการปรับตัว เช่น การปรับตัวเข้ากับเพื่อน ๆ

2. แบ่งตามลักษณะการตอบ

2.1 แบบทดสอบภาคปฏิบัติ หมายถึง แบบทดสอบที่ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติจริง เช่น การปรุงอาหาร

2.2 แบบทดสอบข้อเขียน หมายถึง แบบทดสอบที่ใช้การเขียนตอบ

2.3 แบบทดสอบปากเปล่า หมายถึง แบบทดสอบที่ใช้การพูดได้ตอบแทน การเขียน

3. แบ่งตามเวลาที่กำหนดให้ตอบ

3.1 แบบทดสอบที่จำกัดเวลาในการตอบ หมายถึง แบบทดสอบที่ใช้เวลาน้อย

3.2 แบบทดสอบที่ไม่จำกัดเวลาในการตอบ หมายถึง แบบทดสอบที่ใช้เวลาตอบมาก

4. แบ่งตามจำนวนผู้เข้าสอบ

4.1 แบบทดสอบเป็นรายบุคคล หมายถึง การสอบที่แต่ละคนมักเป็นการสอบภาคปฏิบัติ

4.2 แบบทดสอบเป็นชั้นหรือเป็นหมู่ หมายถึง การสอบที่ละหลาย ๆ คน

5. แบ่งตามสิ่งเร้าของการถาม

5.1 แบบทดสอบทางภาษา หมายถึง แบบทดสอบที่ต้องอาศัยภาษาของสังคม นั้น ๆ เป็นหลัก ใช้กับผู้ที่สามารถออกเขียนได้

5.2 แบบทดสอบที่ไม่ใช้ภาษา หมายถึง แบบทดสอบที่ใช้รูปภาพ สัญลักษณ์ หรือตัวเลข

6. แบ่งตามลักษณะของการใช้ประโยชน์

6.1 แบบทดสอบย่อย หมายถึง แบบทดสอบประจำบท หรือหน่วยการเรียนรู้

6.2 แบบทดสอบรวม หมายถึง แบบทดสอบสรุปรวมเนื้อหาที่เรียนผ่านมาตลอด

ภาคเรียน

7. แบ่งตามเนื้อหาของข้อสอบในฉบับ

7.1 แบบทดสอบอัตนัย หมายถึง แบบทดสอบที่มีเฉพาะคำถามนักเรียนต้องคิด

หาคำตอบเอง

7.2 แบบทดสอบปรนัย หมายถึง แบบทดสอบที่มีทั้งคำถามและคำตอบเฉพาะคงที่แน่นอน

ความหมายของแบบทดสอบอัตนัย

มีนักการศึกษาหลายท่าน ได้ให้ความหมายของแบบทดสอบอัตนัยไว้ดังนี้

ชาลส์ ยมคิชู้ (2548 : 34-38) กล่าวว่าแบบทดสอบแบบอัตนัยเป็นแบบทดสอบที่ให้ผู้ตอบได้แสดงความคิดเห็น เหมาะสำหรับการวัดความรู้ขั้นสูงกว่าความจำและความเข้าใจ ข้อสอบแบบอัตนัยแบ่งเป็น 2 แบบ คือ แบบไม่จำกัดตอบ (Extended Response) และแบบจำกัดตอบ (Restricted Response) ซึ่งขึ้นอยู่กับการให้อิสระแก่นักเรียนในการตอบ จากการศึกษาพบว่าเด็กระดับประถมศึกษาเขียนตอบแบบกำหนดโครงสร้างให้ตอบได้ดี ส่วนนักเรียนในระดับสูงเขียนตอบแบบไม่กำหนดโครงสร้างให้ตอบได้ดี

1. แบบไม่จำกัดตอบ (Extended Response) ข้อสอบแบบอัตนัยแบบไม่จำกัดคำตอบนี้ให้อิสระเสรีแก่นักเรียนอย่างเต็มที่ ในการอภิปรายแสดงความคิดเห็นและรวบรวมข้อมูลเท็จจริงต่างๆ มาใช้ในการสอน โดยทั่วไปข้อสอบแบบนี้จะให้นักเรียนแสดงความสามารถ ซึ่งจำเป็นต้องอาศัยการสังเคราะห์และการประเมินผล ข้อสอบนี้นับว่ามีคุณค่าอย่างยิ่งในการวัดขบวนการทางสมองที่สูงขึ้น ตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ระลึกถึงความรู้ที่เรียนไป เช่น

1. จงอธิบายทฤษฎีกำเนิดชนชาติไทยมา 1 ทฤษฎี
2. จงอธิบายเกี่ยวกับการสอนแบบบรรยายกับการสอนแบบสืบสวน โดยให้บอกถึงหลักสำคัญที่ใช้ในการสอนแต่ละวิธี และข้อดี-ข้อเสียของการสอนทั้งสองแบบ

ขั้นที่ 2 ประเมินค่าความรู้ที่จำได้ เช่น

1. จงเปรียบเทียบข้อดี-ข้อเสียของการประเมินผลแบบอิงเกณฑ์และแบบอิงกลุ่มมาอย่างละเอียด

2. เพราะเหตุใดเอ็ดสันจึงได้รับการยกย่องเป็นอย่างมาก

3. จงทดลองเรื่องอากาศมีไอน้ำ

ขั้นที่ 3 รวบรวมความรู้และความคิดให้เป็นระบบ เช่น

จงกล่าวถึงความคล้ายคลึงกันในการที่สหรัฐอเมริกาเข้าไปมีส่วนพัวพันกับความขัดแย้งในประเทศเกาหลี และเวียดนามมา 3 ประการ

ขั้นที่ 4 แสดงความคิดเห็นออกมาอย่างมีเหตุผล เช่น

จงเปรียบเทียบและอธิบายเหตุผลการปกครองระบอบประชาธิปไตยของอังกฤษกับสหรัฐอเมริกา

ข้อเสียของข้อสอบประเภทนี้คือมีความเชื่อมั่น ค่อนข้างต่ำ แต่มีข้อดีคือ นักเรียนมีโอกาสแสดงความคิดเห็นได้อย่างเสรี

2. แบบจำกัดตอบ (Restricted Response) ข้อสอบแบบนี้มักจะกำหนดขอบเขตแบบฟอร์มและ เนื้อที่เฉพาะให้นักเรียนไม่มีอิสระเสรีในการตอบมากนัก แบบทดสอบนี้ให้ตอบสั้นกว่าแบบแรก คำตอบอยู่ในขอบเขตที่กำหนดไว้ในวงจำกัด โดยทั่วไปแล้วจะกำหนดขอบข่ายและความยาวในการตอบไว้ด้วยตัวอย่างเช่น

2.1 ลักษณะภูมิอากาศ

2.2 การปกครอง

2.3 อาชีพของพลเมือง

2.4 จงอธิบายสาเหตุของการเกิดสงครามโลกครั้งที่ 2 มา 3 ประการ

จงยกตัวอย่างการกระทำที่แสดงถึงความรักชาติมา 5 ข้อ

ส่วนดีของข้อสอบแบบนี้คือ ง่ายในการตรวจ มีความยุติธรรมและมีความเชื่อมั่นสูงกว่าข้อสอบประเภทไม่จำกัดคำตอบอีกด้วย

จุดมุ่งหมายของการใช้แบบทดสอบอัตนัย มีดังนี้

1. ต้องการให้ผู้เข้าสอบแสดงความสามารถด้านความคิดสร้างสรรค์ (Creativity) และบรรยายความคิดออกมาได้อย่างเป็นอิสระ และต้องคำนึงถึงความสามารถทักษะการเรียนรู้ของนักเรียนด้วย

2. ต้องการเน้นความรู้ขั้นลึกซึ้ง เช่น ความสามารถด้านการสังเคราะห์ หรือต้องการวัดความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนมาทั้งหมด

การวางแผนการสร้างแบบทดสอบอัตนัย

สมบูรณ์ ตันยะ.(2545 : 24-29) กล่าวว่า จุดอ่อนของแบบทดสอบอัตนัยก็คือ การสร้างโดยขาดการวางแผนที่ดี การวางแผนการสร้างแบบทดสอบอัตนัยก็มีความสำคัญ เช่นเดียวกับการวางแผนสร้างแบบทดสอบปรนัยถึงแม้ว่าจะมีวิธีการสร้างและธรรมชาติต่างกันไปก็ตาม สิ่งที่ผู้ออกข้อสอบจะต้องคำนึงถึงในการออกข้อสอบแบบอัตนัย มีดังนี้

1. จุดมุ่งหมายของกลุ่มสาระนั้น ๆ เหมาะสมกับแบบทดสอบอัตนัยหรือไม่
2. ผู้เข้าสอบมีพื้นฐานทั้งในด้านความเรียง และเนื้อหาวิชาเพียงพอที่จะเขียนตอบแบบอัตนัยหรือไม่ เช่น เด็กเล็ก ๆ ไม่ควรใช้ข้อสอบอัตนัยทดสอบอย่างเด็ดขาด
3. ข้อสอบนั้นเปิด โอกาสให้ผู้ตอบมีอิสระในการตอบ เปิดโอกาสให้แสดงความคิดเห็นหลายแง่หลายมุมหรือไม่ หรือจำกัดวงคำตอบให้ตอบแค่แคบๆ เพียงด้านเดียว เช่น ถามแต่ความจำในเนื้อหาที่ครูสอนไป ก็ไม่ควรใช้ข้อสอบอัตนัย

หลักในการสร้างแบบทดสอบอัตนัย

1. การสร้างข้อสอบควรคำนึงถึงลำดับความสำคัญของจุดมุ่งหมายที่วางไว้ตามที่ปรากฏในตารางการวิเคราะห์หลักสูตร จุดมุ่งหมายหรือพฤติกรรมใดมีน้ำหนักความสำคัญมากที่สุดก็ออกข้อสอบเพื่อวัดพฤติกรรมนั้นมากให้ ได้สัดส่วนตามตารางวิเคราะห์หลักสูตร เพราะแบบทดสอบแบบนี้ถามได้น้อยข้อ เนื่องจากต้องเสียเวลาตอบนาน
2. พิจารณาให้รอบคอบว่าจะสร้างแบบข้อสอบให้คลุมเนื้อหาอะไรบ้าง เช่น จะสอบเฉพาะเนื้อหาที่ครูบรรยายอย่างเดียว หรือจะครอบคลุมไปถึงส่วนที่นักเรียนร่วมอภิปรายทำรายงานหรืออ่านนอกเวลาด้วย และควรแจ้งให้ผู้สอนทราบล่วงหน้า เพื่อจะได้เตรียมตัวศึกษาค้นคว้าอย่างลึกซึ้ง
3. ไม่ควรให้มีการเลือกตอบเป็นบางข้อ เพราะอาจมีการได้เปรียบเสียเปรียบกัน อันเนื่องมาจากข้อสอบมีความยากง่ายไม่เท่ากัน คะแนนที่ได้จึงนำมาเปรียบเทียบกันไม่ได้ เพราะตั้งอยู่บนพื้นฐานของการวัดที่ไม่เท่ากัน
4. เขียนคำสั่งให้ชัดเจนว่าข้อสอบนั้นๆ ต้องการให้ผู้สอบทำอะไรมีเกณฑ์ในการพิจารณาให้คะแนนอย่างไร ควรให้นักเรียนอ่านคำสั่งให้เข้าใจอย่างถ่องแท้เสียก่อนที่จะลงมือปฏิบัติ ควรบอกให้ชัดเจนด้วยว่ามีการแบ่งส่วนคะแนนอย่างไร เพื่อผู้สอบจะได้วางแผนการตอบได้เหมาะสม
5. ถามปัญหาที่แสดงว่านักเรียนมีความรู้จริง ๆ สามารถตอบปัญหาได้โดยพยายามนำกฎเกณฑ์ หรือความรู้ไปใช้ในสถานการณ์ใหม่ๆ ไม่ควรเป็นคำถามที่นักเรียนเคยพบหรือเคยทำมาก่อน เพราะจะกลายเป็นการวัดความจำไป
6. พยายามใช้คำถามหลาย ๆ แบบ มิใช่มีแต่คำถามประเภท ใคร อะไร ที่ไหน เมื่อไร เท่านั้น เพราะคำถามประเภทนี้มีลักษณะไปทางวัดความจำมากกว่าวัดสมรรถภาพอื่น คำถามที่ใช้วัดสมรรถภาพที่สูงขึ้นควรจะเป็นคำถามประเภท ทำไม อย่างไร หรือให้บรรยาย อธิบายเปรียบเทียบ หาความสัมพันธ์ ความขัดแย้ง ตีความ วิเคราะห์เหตุผล วิวิจารณ์ และ

ประเมินผล เป็นต้นเขียนคำถามให้ชัดเจนว่าต้องการให้ตอบอย่างไร พยายามเขียนตอบให้เฉพาะเจาะจงลงไป คำถามประเภทให้แสดงความคิดเห็น เป็นคำถามที่กว้างไป

7. ใช้คำถามที่สามารถบอกได้ว่าคำตอบใดดีกว่าคำตอบใด คำถามนั้น ๆ เมื่อนักเรียนตอบแล้ว คนที่มีความรู้ทั้งหลายควรเห็นพ้องกันว่าเป็นคำตอบที่ดี คำตอบใดเป็นคำตอบที่ไม่ดี

8. เมื่อเขียนคำถามแล้วควรเขียนคำตอบที่ต้องการไว้ด้วยเลยเพื่อเป็นการตรวจสอบดูว่าคำถามนั้นชัดเจนดีแล้วหรือยัง คำถามนั้นเมื่ออ่านแล้วจะต้องตอบตามที่คิดไว้หรือไม่ หากยังไม่ตรงจะได้แก้ไขก่อนนำไปใช้ได้

9. ถ้าเป็นคำถามที่เกี่ยวกับประเด็นขัดแย้งที่ยังหาข้อยุติไม่ได้ ข้อสอบนั้นควรมุ่งให้หาหลักฐานมายืนยัน หรือมาสนับสนุนมากกว่าที่จะทดสอบอย่างอื่น เช่น ข้อความที่ยังหาข้อยุติไม่ได้ควรหลีกเลี่ยง การถามว่าถูกหรือผิด ใช่หรือไม่ใช่ แต่ควรจะทดสอบการหาสาเหตุมาสนับสนุนประเด็นนั้น ๆ

10. พยายามสร้างข้อคำถามหลาย ๆ ข้อ ให้พอเหมาะกับเวลาที่สอบ และควรกำหนดความยาวของข้อสอบ และความซับซ้อนของข้อสอบให้พอเหมาะกับความสามารถของผู้สอบ

11. พยายามให้ข้อสอบมีจำนวนมากข้อ เพื่อจะได้ออกให้ครอบคลุมเนื้อหา ซึ่งเกี่ยวข้องกับค่าความเชื่อมั่นของข้อสอบด้วย เราอาจเพิ่มข้อสอบให้มากข้อ โดยกำหนดให้ตอบสั้น ๆ

12. ถ้าข้อสอบมีหลายข้อ ควรจะเรียงลำดับจากง่ายไปหายาก เพื่อช่วยให้อุบายตอบยิ่งขึ้น

การตรวจให้คะแนนคำถามอัตนัย

ยาวดี วิบูลย์ศรี.(2545 : 132-138) การสร้างข้อสอบแบบอัตนัยวัดความสามารถของนักเรียนมิได้จบสิ้นลงเพียงนำข้อสอบไปทดสอบนักเรียนเท่านั้น แต่还应นำเอากระดาษคำตอบมาตรวจให้คะแนนตามวิธีการตรวจที่มีระบบ เพื่อให้คะแนนที่ได้มีความเที่ยงตรงและเชื่อถือได้ หลังจากเราพอใจกับคำถามหรือข้อสอบซึ่งสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของการสอนและแบบทดสอบที่สร้างอย่างดีแล้ว งานขั้นถัดไป คือการตรวจให้คะแนนกระดาษคำตอบของนักเรียน ปัญหาในขั้นนี้คือ จะตรวจกระดาษคำตอบของนักเรียนด้วยวิธีการอย่างไร

1. จึงจะกำจัดความลำเอียงลง ไปให้น้อยที่สุด
2. สนใจแต่เฉพาะคำตอบที่สำคัญและเกี่ยวข้องกับคำถามเท่านั้น

3. ระวังอิทธิพลอันเกิดจากความคิดเห็นส่วนตัวเข้าไปมีส่วนเกี่ยวข้องกับการให้คะแนน

4. นำวิธีการที่เป็นมาตรฐานให้การตรวจเป็นไปอย่างเสมอต้นเสมอปลายแก่นักเรียนทุกคนสำหรับการตรวจที่จะทำให้เกิดความยุติธรรมเป็นไปอย่างคงเส้นคงวานี้ นับว่าเป็นปัญหาที่สำคัญของการตรวจข้อสอบแบบนี้ ถ้าหากการตรวจขาดความคงเส้นคงวา เราก็ไม่สามารถนำคะแนนมาเปรียบเทียบกันได้ มีวิธีการตรวจข้อสอบแบบอัตนัยที่นิยมใช้กันมากที่สุดในปัจจุบันมี 2 วิธี คือ

4.1 การตรวจแบบวิธีเทียบเกณฑ์ (Analytical Method หรือ Point Method)

การตรวจข้อสอบอัตนัย โดยวิธีเทียบเกณฑ์นั้น ครูต้องกำหนดแนวการตอบไว้ก่อนโดยแยกแนวคำตอบออกเป็นตอนย่อย ๆ ตามความสำคัญ ฉะนั้น ในการตรวจให้คะแนนโดยวิธีนี้ ผู้ตรวจจะต้องกำหนดรายละเอียดของคำตอบไว้ก่อนที่จะทำการตรวจในการตรวจให้คะแนน ผู้ตรวจจะนำเอากระดาษมาเทียบกับเกณฑ์ หรือแนวคำตอบที่ได้กำหนดแนวคำตอบนั้น ครูผู้ออกข้อสอบควรจะทำไว้พร้อม ๆ กับการเขียนข้อคำถามเลย ไม่ควรจะมากำหนดแนวการตอบเมื่อจะเริ่มตรวจการให้คะแนนแบบนี้เหมาะสำหรับข้อสอบแบบกำหนดขอบเขตของการตอบมากกว่าแบบไม่กำหนดขอบเขตของการตอบ

ข้อดีของการตรวจข้อสอบโดยวิธีเทียบเกณฑ์

1. คะแนนที่ได้จากการตรวจมีความเชื่อถือได้มากขึ้น
2. การกำหนดรายละเอียดในการตอบเพื่อทำแนวคำตอบนั้น ช่วยทำให้ผู้ออกข้อสอบมองเห็นข้อบกพร่องของคำถามที่เขียนขึ้น เช่น ใช้คำพูดกำกวม คำถามยากเกินไปหรือเวลาที่กำหนดให้น้อยเกินไป
3. การกำหนดแนวคำตอบทำให้ง่ายแก่การอธิบายให้นักเรียนฟังได้ ว่าทำไมนักเรียนจึงได้คะแนนเท่านั้น

ข้อจำกัดของการตรวจข้อสอบอัตนัยโดยวิธีเทียบเกณฑ์

1. ทำให้ครูต้องทำงานหนักขึ้นและเสียเวลามากขึ้น
2. การที่ผู้ตรวจพยายามมองหาคำตอบที่สอดคล้องกับเกณฑ์ อาจทำให้เกิดการมองข้ามหรือไม่ได้อ่านข้อความสำคัญไปบ้าง

4.2 การตรวจ โดยวิธีจัดอันดับคุณภาพการตรวจข้อสอบอัตนัย โดยวิธีจัดอันดับคุณภาพนั้น ผู้ตรวจจะอ่านกระดาษคำตอบของ ผู้เข้าสอบทุกคนเสียก่อนที่ละข้อ แล้วจึงนำคำตอบนั้นมาจัดเป็นกลุ่ม ๆ ตามความสามารถ เช่น กลุ่มดีมาก ดี ปานกลาง พอใช้ หรือใช้ไม่ได้ แล้วจึงตรวจดูคุณภาพของคำตอบในแต่ละกลุ่มอีกที เช่น ในกลุ่มตอบดีมากนั้น ต้องพิจารณากันอีกทีว่า ใครตอบดีกว่ากัน ให้เรียงอันดับของกระดาษคำตอบให้ติดต่อกันไป แล้วจึงให้คะแนน ใครอยู่อันดับแรกก็ได้คะแนนสูงสุดลดน้อยลงไปตามลำดับ การตรวจแบบนี้จะทำให้คะแนนมีความเชื่อมั่นมากยิ่งขึ้น

ข้อเสนอแนะในการตรวจแบบทดสอบอัตนัย

1. ให้ตรวจคำตอบที่ละข้อ นั่นคือ ถ้าจะตรวจคำตอบข้อ 1 ก็ให้ตรวจข้อ 1 ของนักเรียน ทุกคนจนจบ แล้วจึงเริ่มตรวจข้อ 2 ครูไม่ควรตรวจข้อสอบให้เสร็จเป็นคน ๆ
2. ให้ความคงเส้นคงวาในการตรวจ เกณฑ์ในการให้คะแนนจะเหมือนกันสำหรับทุก ๆ คำตอบ ครูบางคนอาจจะให้คะแนนค่อนข้างน้อย สำหรับคำตอบแผ่นแรก ๆ แต่จะให้คะแนนมากขึ้นสำหรับคำตอบแผ่นหลัง ๆ ทั้ง ๆ ที่คำตอบเหล่านั้นเป็นแนวเดียวกัน
3. เวลาตรวจไม่ควรดูชื่อนักเรียน เพื่อป้องกันไม่ให้เกิดอคติในเวลาตรวจ
4. ถ้าสามารถให้มีผู้ตรวจ 2 คน ในแต่ละคำตอบแล้วหาค่าเฉลี่ยของคะแนนนำมาเป็นคะแนนที่คำตอบนั้น ๆ ควรจะได้จริง ๆ จะทำให้คะแนนมีความเชื่อมั่นมากยิ่งขึ้น
5. ควรหยิบกระดาษคำตอบมาตรวจแบบสุ่ม
6. ไม่ควรดูชื่อผู้ตอบในการตรวจกระดาษคำตอบ
7. ในเวลาตรวจนั้นครูไม่ควรนำเอาเรื่อง "ลายมือ" ของผู้ตอบมาเป็นส่วนในการให้คะแนน
8. พยายามตรวจข้อใดข้อหนึ่งให้เสร็จรวดเร็วกว่าไม่ควรหยุดพักจนกว่าจะตรวจข้อนั้นเสร็จแล้ว
9. พยายามเขียนข้อเสนอแนะและแก้ไขความผิดในกระดาษคำตอบ เพื่อให้ผู้ตอบรู้ว่าตนบกพร่องตรงไหน

ประโยชน์ของแบบทดสอบอัตนัย

1. ข้อสอบอัตนัยเป็นข้อสอบที่สร้างง่ายกว่าข้อสอบแบบเลือกตอบ และใช้เวลาเตรียมข้อสอบน้อยกว่าข้อสอบปรนัย

2. ข้อสอบอัตนัยสามารถใช้วัดเจตคติ คุณค่าและความคิดเห็น รวมทั้งความสามารถด้านการสังเคราะห์ ได้เป็นอย่างดี
3. ข้อสอบอัตนัยสามารถช่วยสร้างประสบการณ์ในการเรียนที่ดี เพราะการเขียนตอบข้อสอบอัตนัยนั้น นักเรียนได้มีโอกาสฝึกฝนการเรียบเรียงความคิด และแสดงความคิดเห็นออกมาอย่างมีเหตุผล
4. ข้อสอบอัตนัยสามารถช่วยส่งเสริมการเขียนและการใช้ภาษาไทยเป็นอย่างดี

จากคำกล่าวข้างต้น สรุปได้ว่า แบบทดสอบอัตนัย คือ เป็นแบบวัดมีลักษณะ ผู้ตอบต้องเขียนบรรยายตอบ ผู้ตอบมีสิทธิจะเขียนตอบอย่างเสรี อาจจะมีคำตอบถูกหลาย ๆ ทาง คำตอบของข้อสอบข้อเดียวกัน อาจ会有ความแตกต่างทั้งในด้านคุณภาพและความถูกต้อง

เกณฑ์การให้คะแนน (Scoring Rubric)

ผู้ทำวิจัยได้นำรูปแบบเกณฑ์การให้คะแนน (Scoring Rubric) เข้ามาช่วยในส่วนของ การพิจารณาการให้คะแนน นิทโก (Nitko : 1996) ได้กล่าวถึงรายละเอียดเกี่ยวกับความหมาย ความสำคัญ องค์ประกอบและชนิดของเกณฑ์การให้คะแนน (Scoring Rubric) ดังต่อไปนี้ว่า

เกณฑ์การให้คะแนน (Scoring Rubric) คือ แนวทางการให้คะแนนอย่างละเอียดที่ ถูกพัฒนาโดยครูหรือผู้ประเมินที่ใช้วิเคราะห์ผลงานหรือกระบวนการที่ผู้เรียนได้พยายามสร้าง ขึ้น การประเมินผลงานของนักเรียนจะมี 2 ลักษณะคือ ผลงานที่ได้จากกระบวนการของนักเรียน และกระบวนการที่นักเรียนใช้เพื่อให้เกิดผลงาน จะประเมินในลักษณะใดขึ้นอยู่กับจุดมุ่งหมาย ในการเรียนรู้ อาจจะประเมินลักษณะใดลักษณะหนึ่งหรือประเมินทั้งสองลักษณะก็ได้ ผู้ประเมินจะต้องตัดสินคุณภาพของผลงานหรือกระบวนการปฏิบัติงานของผู้เรียนแต่ละคน ที่มีระดับที่แตกต่างกันหลายระดับ ระดับที่แตกต่างกันอาจจะเป็นระดับคุณภาพของชิ้นงานที่ได้ สร้างขึ้น หรือระดับของกระบวนการต่าง ๆ ที่ผู้เรียนแต่ละคนได้ใช้เพื่อให้เกิดผลงาน เพื่อให้ การตัดสินใจสอดคล้องกับผู้เรียนแต่ละคน ผู้ประเมินจะต้องใช้เกณฑ์ในการประเมินคุณภาพ ชิ้นงานของผู้เรียน เกณฑ์อาจจะอยู่ในเชิงคุณภาพหรือปริมาณ อาจจะมีลักษณะเป็นมาตรา ส่วนประมาณค่า (Rating Scale) หรือแบบตรวจสอบ (Checklist) โดยปกติจะใช้ Rubric ใน การประเมินจุดประสงค์การเรียนรู้เดียวหรือส่วนใดส่วนหนึ่งของงานปฏิบัติ แต่การปฏิบัติงาน ที่มีซับซ้อน ผู้ประเมินจะต้องประเมินจุดประสงค์การเรียนรู้ที่หลากหลายและประเมินหลาย ๆ ส่วนของการปฏิบัติ นั่นคือผู้ประเมินจะต้องมีเกณฑ์การให้คะแนนที่มากมายเพื่อให้เหมาะกับ

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่แตกต่างกัน หรือเหมาะกับแต่ละส่วนของการปฏิบัติงาน การให้คะแนน จะอยู่ในรูปของตัวเลข โดยปกติจะเป็น 0-3 หรือ 1-4 ในแต่ละระดับของคะแนนจะขึ้นอยู่กับ ระดับของคุณภาพของงาน ดังนั้นตัวเลข 4 อาจจะหมายถึงระดับคุณภาพสูงสุด เลข 3 เป็นระดับ คุณภาพรองลงมา คุณภาพของงานในแต่ละระดับจะต้องใช้การอธิบาย (Rubric) ดังนั้นในแต่ละ ระดับคะแนนจะต้องอธิบายเป็นภาษาที่แสดงให้เห็นถึงคุณภาพของการปฏิบัติงานในระดับนั้น

ความสำคัญของการให้คะแนน (Scoring Rubric)

การประเมินศักยภาพของผู้เรียน โดยให้ลงมือปฏิบัติ นั้น ไม่มีค่าเฉลี่ยหรือคำตอบถูกที่ แน่ชัดลงไปเหมือนแบบทดสอบเลือกตอบ การประเมินผลงานแต่ละชิ้นของผู้เรียนที่ได้ลงมือ ปฏิบัติจึงมีความจำเป็นที่จะต้องประเมินคุณภาพของงานอย่างเป็นปรนัย ซึ่งมันเป็นการยากที่จะ ทำได้ และได้ค้นพบการสร้างเกณฑ์การให้คะแนนหรือ rubric ขึ้นมาเพื่อกำหนดแนวทางใน การตัดสินอย่างยุติธรรม และปราศจากความลำเอียง Rubric จะต้องมี ความชัดเจน ในเกณฑ์ การให้คะแนนอย่างพอเพียงถึงขนาดที่ผู้ประเมิน 2 คนสามารถใช้ Rubric เดียวกันประเมิน ชิ้นงานของผู้เรียนชิ้นเดียวกันแล้วให้คะแนน ได้ตรงกัน ระดับของความสอดคล้องในการให้ คะแนนของผู้ประเมิน 2 คนที่ประเมินอย่างเป็นอิสระจากกันจะเรียกว่า ความเชื่อมั่น (Reliability) ของการประเมิน

องค์ประกอบของเกณฑ์การให้คะแนน (Scoring Rubric)

Scoring Rubric มีหลายองค์ประกอบ ในแต่ละองค์ประกอบก็มีประโยชน์ มีความสำคัญองค์ประกอบมีดังนี้

1. จะมีอย่างน้อย 1 คุณลักษณะหรือ 1 มิติที่เป็นพื้นฐานในการตัดสินผู้เรียน
2. การนิยามและการยกตัวอย่างจะต้องมีความชัดเจนในแต่ละคุณลักษณะหรือมิติ
3. มาตรการให้คะแนนจะต้องเป็นอัตราส่วนกัน ในแต่ละคุณลักษณะหรือมิติ
4. จะต้องมีความมาตรฐานที่เด่นชัดในแต่ละระดับของการให้คะแนน

ในแต่ละระดับการให้คะแนนจะต้องมีความชัดเจนในการนิยาม และความกว้างของ ระดับคะแนนไม่ควรเกิน 6 ถึง 7 ระดับ ถ้ามีระดับของการให้คะแนนกว้างมากเกินไปจะมีความ ล้าบากในการตัดสินความแตกต่างในแต่ละระดับ เช่น ความกว้างคะแนนเป็น 100 ทำให้ยากที่ จะอธิบายว่าคะแนน 81 มีคุณภาพแตกต่างจาก 80 หรือ 82 อย่างไร และจะทำให้ความ สอดคล้องของการประเมินด้วยผู้ประเมินหลายคนลดลงไป การจะกำหนดความกว้างของการ ให้คะแนนเป็นเท่าไรนั้น จะต้องมีความเหมาะสมและมีความชัดเจนในการนิยามที่ครอบคลุม ตั้งแต่ แย่ที่สุด (Poor) จนถึงดีเลิศที่สุด (Excellent)

ชนิดของเกณฑ์การให้คะแนน (Scoring Rubric)

Scoring Rubric มีอยู่ 3 ชนิดคือ

1. Holistic Rubrics เป็นเกณฑ์การให้คะแนนผลงานหรือกระบวนการที่ไม่ได้แยกส่วนหรือแยกองค์ประกอบการให้คะแนน คือจะประเมินในภาพรวมของผลงานหรือกระบวนการนั้น รูปลิกแบบภาพรวมนั้นครูต้องให้คะแนน โดยดูภาพรวมของกระบวนการหรือผลงาน ไม่แยกพิจารณาเป็นส่วนๆ ในทางตรงกันข้าม สำหรับรูบริกแบบแยกส่วนนั้น ครูจะให้คะแนนแยกทีละส่วนหรือทีละองค์ประกอบ แล้วรวมคะแนนแต่ละส่วนนั้นเข้าด้วยกันเป็นคะแนนรวม (Moskel, 2000 ; Nitko, 2001)

2. รูบริกแบบภาพรวมจะใช้เมื่อต้องการดูคุณภาพโดยรวมมากกว่าจะดูข้อบกพร่องส่วนย่อย ๆ Nitko(2001) กล่าวว่า รูบริกแบบภาพรวมจะเหมาะสมกับการปฏิบัติที่ต้องการให้นักเรียนสร้างสรรค์การตอบสนอง และไม่มีคำตอบที่ถูกต้องชัดเจน จุดเน้นของการรายงานคะแนนที่ใช้รูบริกแบบภาพรวมคือ คุณภาพโดยรวม ความคล่องแคล่ว หรือความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาสาระเฉพาะและทักษะ ซึ่งเป็นการประเมินระดับมิติเดียว การใช้รูบริกแบบภาพรวมทำให้กระบวนการให้คะแนนเร็วกว่าการใช้รูบริกแบบแยกส่วน ดังนั้น ครูจึงต้องอ่าน พิจารณาและตรวจสอบการปฏิบัติของนักเรียนโดยตลอด เพื่อให้รู้สึกรับรู้ถึงภาพรวมว่านักเรียนทำอะไรได้และยังใช้เป็นการประเมินสรุป (Summative) ได้ด้วย แต่นักเรียนจะได้รับทราบผลสะท้อนกลับน้อยมาก ตัวอย่างรูบริกแบบภาพรวม

ตารางที่ 4 รูบริกแบบภาพรวม

คะแนน	รายละเอียดการให้คะแนน
5	แสดงความเข้าใจปัญหาอย่างสมบูรณ์ คำตอบประกอบด้วยทุกประเด็นที่ต้องการ
4	แสดงความเข้าใจปัญหาค่อนข้างมาก คำตอบปรากฏทุกประเด็นที่ต้องการ
3	แสดงความเข้าใจบางส่วน คำตอบประกอบด้วยประเด็นส่วนใหญ่ที่ต้องการ
2	แสดงความเข้าใจปัญหาเพียงเล็กน้อย ประเด็นส่วนใหญ่ที่ต้องการไม่ปรากฏ
1	แสดงความไม่เข้าใจ

3. Analytic Rubrics เป็นเกณฑ์การให้คะแนนที่แยกส่วนหรือองค์ประกอบคุณลักษณะของผลงานหรือกระบวนการ แล้วนำแต่ละส่วนหรือองค์ประกอบของคุณลักษณะมารวมกันเป็นคะแนนรวม รูบริกแบบแยกส่วน นิยมใช้เมื่อต้องการเน้นชนิดหรือ

ลักษณะเฉพาะของการตอบสนอง (Nitko, 2001) นั่นคือ ใช้สำหรับการปฏิบัติงานที่ยอมรับ การตอบสนอง 1 หรือ 2 ลักษณะ และความคิดสร้างสรรค์ไม่ได้เป็นประเด็นสำคัญเกี่ยวกับการตอบสนองของนักเรียน นอกจากนี้ ผลลัพธ์ขั้นต้นจะมีคะแนนหลายตัว ตามด้วยคะแนนรวม ซึ่งใช้เป็นตัวแทนการประเมินหลายมิติ (Mertler, 2001) การใช้รูปแบบแยกส่วนทำให้กระบวนการให้คะแนนซ้ำ

4. Annotated Holistic Rubrics ผู้ประเมินจะประเมินแบบ Holistic Rubrics ก่อนแล้วจึงประเมินแยกส่วนอีกบางคุณลักษณะที่เด่น ๆ เพื่อใช้เป็นผลสะท้อนในบางคุณลักษณะของผู้เรียน

การให้คะแนนแบบ Holistic Rubrics ใช้ได้ง่ายและใช้เพียงไม่กี่ครั้งต่อผู้เรียน 1 คน จะเป็นการประเมินในภาพรวมของทุกคุณลักษณะในการปฏิบัติงาน ส่วนการให้คะแนนแบบ Analytic Rubrics จะใช้บ่อยครั้ง โดยจะประเมินแยกในแต่ละคุณลักษณะของงาน ซึ่งการประเมินแบบนี้จะมีประโยชน์เมื่อสนใจจะวินิจฉัยหรือช่วยเหลือผู้เรียนว่ามีความรู้ความเข้าใจในแต่ละส่วนหรือแต่ละคุณลักษณะของการปฏิบัติงานนั้น ๆ หรือไม่ ซึ่งจะมีส่วนให้ครูได้ช่วยเสริมสร้างหรือพัฒนาการเรียนรู้ในแต่ละคุณลักษณะของผู้เรียนให้ดียิ่งขึ้น

ส่วนแบบ Annotated Rubrics จะรวมข้อจำกัดของ Holistic และ Analytic ไว้ด้วยกัน เริ่มด้วยการประเมินในภาพรวมของการปฏิบัติงานด้วย Holistic แล้วผู้ประเมินเลือกประเมินอีกเพียงบางคุณลักษณะของงานแบบ Analytic ซึ่งการประเมินเพียงบางคุณลักษณะนี้จะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงคะแนนที่ประเมินแบบ Holistic ประโยชน์ก็คือจะมีความรวดเร็วในการประเมินและเป็นการให้ผู้ประเมินได้เลือกประเมินเฉพาะบางคุณลักษณะที่โดดเด่นเพียงไม่กี่องค์ประกอบเพื่อเป็นผลสะท้อน (Feedback) ให้แก่ผู้เรียน แต่ไม่มีประโยชน์ในการวินิจฉัยผู้เรียนว่าบกพร่องในคุณลักษณะใด เพราะหลาย ๆ คุณลักษณะไม่ได้ถูกประเมิน

การใช้รูบริกมีประโยชน์สำหรับครู สำหรับครูดังนี้

1. เป็นเครื่องมือการสอนของครู ช่วยควบคุมการปฏิบัติการตามความคาดหวังในผลงานนักเรียน
2. ลดเวลาครูในการประเมินงานนักเรียน เห็นจุดเด่นและสิ่งที่นักเรียนต้องปรับปรุง
3. มีความยืดหยุ่น คือมีระดับคุณภาพตั้งแต่ดีเยี่ยมจนถึงต้องปรับปรุงใช้กับนักเรียนความสามารถได้ โดยใช้เกณฑ์สะท้อนผลงานของเขา

การใช้รูบริก มีประโยชน์สำหรับนักเรียน ดังนี้

1. เป็นเครื่องมือการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยปรับปรุงพัฒนาการการปฏิบัติและการแสดงออกของนักเรียน
2. ช่วยตัดสินคุณภาพผลงานของตนเองและของคนอื่นอย่างมีเหตุผล
3. นักเรียนเกิดการเรียนรู้มากขึ้น รู้ว่าอะไรคือผลงานสุดท้ายที่ออกมาดี และจะเตรียมตัวตามประเด็นการประเมินอย่างไร
4. ใช้ง่ายและอธิบายได้ง่าย รู้ชัดเจนว่าจะเรียนรู้อะไร จะประเมินอย่างไร จากคำกล่าวข้างต้นสรุปได้ว่า เกณฑ์การให้คะแนน (Scoring Rubric) นั้นเป็นแนวทางหรือเครื่องมือให้คะแนนชนิดหนึ่งใช้ในการประเมินการปฏิบัติงานหรือผลงานนักเรียน เป็นเหมือนการกำหนดลักษณะเฉพาะในเชิงคุณภาพหรือเชิงปริมาณ หรือทั้ง 2 ประการรวมกัน ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ
 1. เกณฑ์ที่ใช้ประเมินการปฏิบัติหรือผลงาน บอกว่าจะพิจารณาสิ่งใดบ้าง
 2. ระดับคุณภาพหรือระดับคะแนน บอกว่าจะได้รับคุณภาพระดับใด

การสัมภาษณ์

การสัมภาษณ์ (Interview) เป็นการสนทนาหรือการพูดโต้ตอบกันอย่างมีจุดมุ่งหมาย เพื่อค้นหาความรู้ ความจริง ตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้ล่วงหน้าการสัมภาษณ์เป็นวิธีการที่สำคัญวิธีหนึ่งในการรวบรวมข้อมูล เพราะการสัมภาษณ์นอกจากจะทำให้ผู้สัมภาษณ์ ได้ข้อมูลที่ต้องการแล้ว ยังช่วยให้ทราบข้อเท็จจริงเกี่ยวกับผู้ให้สัมภาษณ์ในด้านบุคลิกภาพอีกด้วย และที่สำคัญทำให้ทราบความเข้าใจในการเรียนของนักเรียนอย่างแท้จริง โน้ตสนทนาที่คลาดเคลื่อน และข้อผิดพลาดทางการเรียนจะได้ผลดี และได้ข้อมูลใกล้เคียงกับความเป็นจริงนั้นต้องมีเครื่องมือในการรวบรวมข้อมูลที่น่าเชื่อถือ ซึ่งนอกเหนือจากแบบสอบถามการเรียนแล้ว การสัมภาษณ์เป็นเครื่องมือที่สำคัญอีกประเภทหนึ่ง เพราะการสัมภาษณ์นอกจากจะทำให้ผู้สัมภาษณ์ ได้ข้อมูลที่ต้องการแล้ว ยังช่วยให้ทราบข้อเท็จจริงเกี่ยวกับผู้ให้สัมภาษณ์ในด้านบุคลิกภาพอีกด้วย และที่สำคัญทำให้ทราบความเข้าใจในการเรียนของนักเรียนอย่างแท้จริง ดังที่นักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความสำคัญของการสัมภาษณ์ไว้ดังนี้

นิภา เมธธาวิชัย (2536 : 32) กล่าวว่า การสัมภาษณ์เป็นเครื่องมือที่ใช้สำหรับวัดความคิดเห็นของบุคคลโดยการสนทนา ซักถามโต้ตอบ ระหว่างบุคคล ลักษณะตัวต่อตัว การสัมภาษณ์ดีกว่าการสังเกต เพราะผู้สัมภาษณ์สามารถใช้ตา หู และปาก ในขณะที่สัมภาษณ์

ได้ ผู้สัมภาษณ์ควรสร้างบรรยากาศที่เป็นกันเองกับผู้ถูกสัมภาษณ์ โดยสร้างความเชื่อถือ รักษา
อารมณ์ให้มั่นคง แสดงความสนใจขณะสัมภาษณ์ และบันทึกผลการสัมภาษณ์อย่าง
ตรงไปตรงมา

วัฒนา พัชราวนิช (2531 : 127-128) กล่าวว่า การสัมภาษณ์นั้นเป็นการค้นหา
ข้อเท็จจริงและทำให้ทราบความต้องการของเด็ก เป็นการช่วยให้เกิดความสนิทสนมและคุ้นเคย
กันมากขึ้น ทำให้ผู้มาขอรับคำปรึกษา กล้าพูดและกล้าบอกความเป็นจริงโดยไม่มีการปิดบังอำ
พรางและยังช่วยให้นักเรียนเข้าใจตนเอง สามารถปรับตัวให้อยู่ในสภาพแวดล้อมได้

คณะศึกษาศาสตร์ (มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมราช. 2537 : 127) ได้กล่าวเกี่ยวกับ
การสัมภาษณ์ไว้ว่า การสัมภาษณ์ เป็นวิธีการที่ครูถามนักเรียนให้ตอบเกี่ยวกับขั้นตอนการ
แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนทบทวนวิธีแก้ปัญหา ขณะที่ครูฟัง ครูซักถาม เพื่อค้นหาสิ่งที่
นักเรียนเข้าใจผิด หรือกระบวนการที่เข้าใจไม่ถูกต้อง ซึ่ง Ginsburg เชื่อว่าการสัมภาษณ์เป็น
กระบวนการที่สำคัญที่สุดในการทดสอบคณิตศาสตร์ให้ได้มาตรฐาน เพราะว่าทำให้ครูรู้ถึง
ความรู้สึกเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของนักเรียน

สรุปความหมายของการสัมภาษณ์ คือ เป็นวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยวิธีการ
สนทนา พูดคุย ซักถามเพื่อวิเคราะห์เหตุผล และแนวคิดในการทำแบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์
ซึ่งในการสนทนาดังกล่าวนอกจากการใช้คำพูดแล้วยังต้องใช้ตาและหูเพื่อดูและฟัง
ประกอบการพิจารณาเพื่อหาข้อเท็จจริงอีกด้วย

ประเภทของการสัมภาษณ์

รวีวรรณ ชินะตระกูล (2535 : 119-120) ได้แบ่งประเภทของการสัมภาษณ์ออกเป็น

2 ประเภท ดังนี้

1. การสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้าง เป็นการสัมภาษณ์ที่มีการกำหนดข้อความไว้
อย่างแน่นอนว่าจะสัมภาษณ์อะไรบ้าง ซึ่งผู้ถูกสัมภาษณ์จะตอบข้อความเหมือนกันทุกข้อ และ
ก่อนที่จะทำการสัมภาษณ์ผู้สัมภาษณ์ควรทำความเข้าใจกับคำถามทุกข้อให้ตรงกันเสียก่อน
เพื่อที่จะได้ข้อมูลที่มีความเชื่อถือได้ดียิ่งขึ้น
2. การสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง ซึ่งแบ่งย่อยออกเป็นอีก 3 ประเภท ดังนี้
 - 2.1 การสัมภาษณ์แบบไม่จำกัดคำตอบ การสัมภาษณ์วิธีนี้อาจไม่ต้องเตรียม
คำถามล่วงหน้า เป็นเพียงแค่การพูดคุยกันอย่างธรรมดา ไม่มีกฎเกณฑ์ที่ตายตัวว่าจะเริ่มต้นสิ่ง
ใดและจบลงด้วยสิ่งใด ผู้สัมภาษณ์จะต้องตั้งคำถามตามสถานการณ์ระหว่างการสนทนา ผู้
สัมภาษณ์จะต้องพยายามให้ผู้ให้ข้อมูลสามารถบรรยายความรู้สึกนึกคิดของตนเองเกี่ยวกับเรื่อง

ต่างๆออกมาเอง ผู้สัมภาษณ์จะฟังและตอบได้ด้วยความเข้าใจในความรู้สึกนึกคิดที่ผู้ถูกสัมภาษณ์แสดงออกมา ผู้ถูกสัมภาษณ์จะมีความรู้สึกว่ามีอิสระในการแสดงความคิดเห็นในเรื่องต่างๆ ซึ่งการสัมภาษณ์แบบนี้เป็นการสัมภาษณ์ที่ยืดหยุ่น ผู้สัมภาษณ์มีอิสระในการดัดแปลงแก้ไขให้เป็นไปตามวัตถุประสงค์ของการสัมภาษณ์ การที่จะได้ข้อมูลจริงเพียงไรขึ้นอยู่กับผู้สัมภาษณ์โดยตรง ซึ่งจะต้องใช้เทคนิคในการสัมภาษณ์และผู้สัมภาษณ์จะต้องพยายามสร้างบรรยากาศที่เป็นกันเองมากที่สุดเพื่อให้ผู้ถูกสัมภาษณ์อยู่ในอารมณ์ที่สบายใจ

2.2 การสัมภาษณ์แบบมีจุดสนใจโดยเฉพาะ เป็นวิธีการสัมภาษณ์ที่ผู้สัมภาษณ์มีจุดมุ่งหมายหรือมีความสนใจในบางเรื่องอยู่แล้ว จึงพยายามให้ผู้ถูกสัมภาษณ์ให้แสดงออกมาอย่างมีอิสระในการแสดงความคิดเห็นในเรื่องนั้น ๆ และ

2.3 การสัมภาษณ์แบบหยั่งลึกเป็นวิธีการสัมภาษณ์ที่ต้องการล้วงเอาความจริงจากผู้ถูกสัมภาษณ์ให้มากที่สุดเท่าที่จะมากได้ เป็นการซักถามเพื่อต้องการทราบถึงเหตุผลต่างๆ ที่ก่อให้เกิดข้อเท็จจริง โดยเป็นคำถามที่ถามว่าเพราะเหตุใดหรือทำไม ฯลฯ การสัมภาษณ์แบบนี้ผู้สัมภาษณ์จะต้องทำความคุ้นเคยและมีความมั่นใจแล้วว่าบรรยากาศที่จะทำให้การสัมภาษณ์เหมาะสม

ลักษณะของการสัมภาษณ์

ลักษณะของการสัมภาษณ์แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. การสัมภาษณ์รายบุคคล หรือการสัมภาษณ์แบบเผชิญหน้ากัน (Face-to-face)

ระหว่างผู้สัมภาษณ์กับผู้ให้ข้อมูลเพื่อรวบรวมข้อมูลที่ต้องการคำตอบที่เจาะลึกในเรื่องใดเรื่องหนึ่ง การสัมภาษณ์เป็นรายบุคคลมีข้อดีคือ ผู้สัมภาษณ์ สามารถซักถามเป็นการส่วนตัวคำถามที่ใช้ขึ้นอยู่กับผู้สัมภาษณ์ ผู้ให้ข้อมูลสามารถตอบได้อย่างอิสระ อาจมีการปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงคำถามให้เหมาะสมกับผู้ให้ข้อมูลแต่ละคน เนื่องจากผู้ให้ข้อมูลแต่ละคนอาจมีวัฒนธรรมที่ต่างกัน จึงจำเป็นต้องมีการสร้างบรรยากาศให้เป็นกันเอง เพื่อที่จะให้ได้ข้อมูลตามที่ต้องการ นอกจากนี้การสัมภาษณ์แบบนี้ สามารถบันทึกเทปหรือสังเกตการแสดงออกต่อการตอบสนองคำถามด้วยท่าทาง น้ำเสียง และสภาพแวดล้อมได้อีกด้วยการสัมภาษณ์เป็นรายบุคคลเป็นการลงทุนค่อนข้างสูงและใช้เวลานาน บางครั้งคำถามที่ถามอาจทำให้ผู้ตอบ ไม่ค่อยอยากตอบ เช่น ถามเกี่ยวกับรายได้ หรือคำถามที่ก่อให้เกิดความรู้สึกที่ขัดแย้งต่อบุคลิกภาพของผู้ให้สัมภาษณ์ นอกจากนี้คำตอบที่ได้ อาจมีความลำเอียง

2. การสัมภาษณ์เป็นกลุ่ม (Group Interview) เป็นการสัมภาษณ์แบบหนึ่งที่ผู้สัมภาษณ์ทำการสัมภาษณ์กับผู้ร่วมสนทนาหรือเป็นกลุ่ม เพื่อสนทนาแลกเปลี่ยนความคิดเห็น

ซึ่งกันและกัน โดยผู้สัมภาษณ์ เป็นผู้กำหนดหัวข้อร่วมสนทนาจะไม่มีความรู้สึกว่าถูกซักถาม ปัญหา แต่คิดว่าเป็นการเสวนาในเรื่องที่ผู้สัมภาษณ์สนใจอยากรู้เรื่องต่าง ๆ การสัมภาษณ์เป็นกลุ่ม ช่วยให้ประหยัดเวลา ลงทุนน้อย เหมาะสำหรับการระดมความคิดเพื่อเป็นแนวทางในการหาข้อสรุป แต่อาจทำให้บางคนมีความรู้สึกอึดอัดในการตอบ หรือมีความรู้สึกไม่อยากตอบ เนื่องจากผู้ให้ข้อมูลบางคน ไม่สามารถเปิดเผยข้อมูล ได้อย่างอิสระ

วัฒนา พัชราวณิช (2531 : 127-128) ได้กล่าวเกี่ยวกับหลักของการสัมภาษณ์ไว้ดังนี้

1. เตรียมการสัมภาษณ์ เตรียมหัวข้อที่จะสัมภาษณ์ กำหนดเวลาในการสัมภาษณ์ เตรียมสถานที่สัมภาษณ์
2. เริ่มต้นสัมภาษณ์ดีด้วยการสร้างมิตรภาพ ทำให้ผู้รับการสัมภาษณ์รู้สึกเป็นกันเองและให้ความไว้วางใจผู้สัมภาษณ์
3. ผู้สัมภาษณ์ต้องแสดงตนเป็นผู้รับฟังที่ดี ไม่แสดงอาการเบื่อหน่าย ต้องแสดงว่ามีความสนใจและตั้งใจฟัง
4. ผู้สัมภาษณ์ต้องใช้คำที่เข้าใจง่าย ถามซ้ำ ๆ และพูดอย่างชัดเจนชัดคำ ไม่ป้อนคำถามรวดเร็วเกินไปจนผู้ตอบหงงหรือสับสน
5. ผู้สัมภาษณ์ไม่ควรจะพูดหรือคุยมากเกินไป ต้องคอยเป็นผู้รับฟังให้โอกาสเด็กพูดให้มากที่สุด
6. ไม่ควรบันทึกคำพูดของเด็กในระหว่างการสัมภาษณ์ จะทำให้เด็กเกิดความกังวลหวาดระแวง
7. ในกรณีการสัมภาษณ์ ผู้สัมภาษณ์ต้องสร้างบรรยากาศที่ดี ทำให้ผู้รับการสัมภาษณ์ฟังพอใจที่จะกลับมาอีกครั้งหนึ่ง
8. การบันทึกการสัมภาษณ์ต้องทำทันทีเมื่อเสร็จสิ้นการสัมภาษณ์ ไม่ควรทิ้งไว้นาน ๆ เพราะอาจลืมรายละเอียดได้

นอกจากนี้ Hammill & Bartel. (อ้างอิงมาจาก มาลา ปาจุวงษ์, 2542 : 30-31) ได้ให้แนวในการสัมภาษณ์นักเรียนเกี่ยวกับการสัมภาษณ์นักเรียนเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ให้เลือกตัวอย่างทีละอย่าง และให้ลำดับก่อนหลัง
2. เริ่มต้นด้วยปัญหาต่าง ๆ ก่อน เพราะจะทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจ
3. บันทึกการสัมภาษณ์ด้วยเทปเสียงหรือในสมุดบันทึก
4. ให้นักเรียนเขียนวิธีการแก้ปัญหาและอธิบายโดยการพูด

5. ให้นักเรียนแก้ปัญหาอย่างอิสระ โดยใช้วิธีการของนักเรียนเอง โดยที่ครูไม่ต้องให้คำแนะนำหรือเสนอแนะว่านักเรียนกำลังทำผิด

6. หลีกเลี่ยงการเร่งให้นักเรียนทำงานเสร็จเร็ว ๆ เพราะอาจจะเป็นการสร้างความกดดันหรือสกัดกั้นความคิดของนักเรียน การสัมภาษณ์เช่นนี้ควรใช้เวลาประมาณ 15-45 นาที

เขียน ไชยสร (2526 : 100) กล่าวถึงวิธีการบันทึกเรื่องที่สัมภาษณ์ไว้ 2 วิธี ดังนี้วิธีการแรกคือการจดบันทึก วิธีนี้เป็นวิธีที่นิยมเป็นอย่างมาก เพราะเป็นวิธีการที่ประหยัด แต่ก็ยังมีข้อที่ตกลงกันว่าควรจะมีการจดบันทึกในขณะที่สัมภาษณ์หรือหลังสัมภาษณ์ แบบใดจะเหมาะสมที่สุด เพราะแต่ละแบบก็จะมีทั้งข้อดีและข้อเสียต่างกันไป ถ้าการสัมภาษณ์เพื่อหาข้อเท็จจริงที่มีรายละเอียดมาก ยากแก่การจำ ก็อาจจะจดบันทึกในขณะที่สัมภาษณ์ แต่ถ้าเป็นเรื่องที่เป็นประเด็นใหญ่ๆ หรือเป็นเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการรายละเอียด ก็อาจจะจดบันทึกหลังการสัมภาษณ์เสร็จสิ้นแล้วก็ได้ ส่วนวิธีการที่สองคือการบันทึกเทป โดยปกติแล้วจะจัดทำในห้องสัมภาษณ์ที่มีลักษณะพิเศษและซ่อนเทปไว้โดยไม่ให้ผู้ถูกสัมภาษณ์รู้ตัว แต่ถ้าใช้บันทึกเทปแบบธรรมดาที่ต้องขออนุญาตและชี้แจงเหตุผลหรือจุดมุ่งหมายในการบันทึกเทปการสัมภาษณ์ในครั้งนั้นให้ผู้ถูกสัมภาษณ์เข้าใจ และถ้าผู้ถูกสัมภาษณ์อนุญาตให้บันทึกเทปได้ ผู้สัมภาษณ์จึงจะทำการบันทึกได้

ในส่วนขอเทคนิคของการสัมภาษณ์นั้น Clements และ Ellerton (1996 : 48-50) กล่าวถึง เทคนิคการสัมภาษณ์นิวแมนว่าเป็นวิธีการวิเคราะห์ความผิดพลาด 5 ขั้นตอน ที่เกิดจากการตอบปัญหาทางคณิตศาสตร์ หลังจากที่นักเรียนทำแบบทดสอบเสร็จแล้วจะใช้การสัมภาษณ์ขั้นตอนการแก้ปัญหาทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซึ่งเป็นวิธีที่ได้ผลดีและเป็นประโยชน์ต่อครูผู้สอน ในปี ค.ศ. 1977 นิวแมนได้ใช้เทคนิคการสัมภาษณ์ดังกล่าวและได้เผยแพร่ใช้ในวงการศึกษาระดับประเทศออสเตรเลียจนได้ผลดีและมีผลวิจัยอย่างต่อเนื่อง โดยวิธีวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนิวแมนมีทั้งหมด 5 ขั้นตอน มีดังนี้ ขั้นแรกคือความผิดพลาดจากการอ่าน (Reading Errors) ความผิดพลาดในขั้นนี้ พิจารณาได้จากการที่นักเรียนไม่สามารถอ่านคำสำคัญ (Key Word) หรือสัญลักษณ์ที่อยู่ในคำถาม ทำให้นักเรียนถูกจำกัดขอบเขตที่ดำเนินการแก้ปัญหาให้ครบสมบูรณ์ได้ ขั้นที่สองคือความผิดพลาดจากการทำความเข้าใจ (Comprehension Errors) แม้ว่านักเรียนจะสามารถอ่านคำทุกคำที่อยู่ในคำถามได้ แต่นักเรียนอาจจะไม่เข้าใจความหมายของคำเหล่านั้นได้ทั้งหมด ทำให้นักเรียนก็ไม่สามารถดำเนินการแก้ปัญหาต่อไปได้ ขั้นที่สามคือความผิดพลาดจากการเปลี่ยนรูป (Transformation Errors) ในขั้นนี้ ถึงแม้ว่านักเรียนจะเข้าใจ โจทย์ แต่นักเรียนไม่สามารถเลือกให้

การกระทำทางคณิตศาสตร์(Operation) เช่น การบวก การลบ การคูณและการหารได้ หรือไม่สามารถบอกลำดับการกระทำที่จำเป็นในการแก้ปัญหาได้ ขั้นที่สี่คือความผิดพลาดจากการใช้ทักษะกระบวนการ (Process Skill Errors) ในขั้นนี้นักเรียนไม่สามารถนำการกระทำทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวไปใช้อย่างถูกต้องแม่นยำได้ ซึ่งทำให้เกิดการคำนวณที่ผิดพลาดขึ้น และขั้นสุดท้ายคือความผิดพลาดจากการสรุปคำตอบ (Encoding Errors) ความผิดพลาดในขั้นนี้ เกิดจากการที่นักเรียนทำตาม กระบวนการแก้ปัญหาอย่างถูกต้องแต่ไม่สามารถแสดงคำตอบในรูปแบบที่โจทย์ต้องการ

Newman (อ้างในกรณีการ์ ปวนกาศ. 2543 : 13 – 14) ได้เสนอวิธีการในการสัมภาษณ์นักเรียนหลังจากการทำแบบทดสอบและวิธีการใช้คำถามในการสัมภาษณ์ไว้ว่า วิธีการสัมภาษณ์นักเรียน ผู้สัมภาษณ์จะต้องทำการสัมภาษณ์หลังจากการทำแบบทดสอบเสร็จแล้วทันที โดยต้องแยกสัมภาษณ์ทีละคน ระหว่างการสัมภาษณ์นั้นก็ควรมีการบันทึกไว้ด้วย ส่วนสิ่งแวดล้อมรอบข้างควรมีสภาพที่ไม่รบกวนผู้สัมภาษณ์และนักเรียนมากนัก ถ้าสังเกตเห็นว่านักเรียนเกิดอาการเกร็งหรือไม่มีสมาธิที่จะให้สัมภาษณ์ต่อไปได้ก็ควรหยุดสัมภาษณ์ทันที และนอกจากนี้ผู้สัมภาษณ์ต้องระวังในเรื่องของการพูดด้วย เพราะอาจจะทำให้นักเรียนไขว้เขวหรือเปลี่ยนความคิดได้ และที่สำคัญผู้สัมภาษณ์ไม่ควรบอกนักเรียนว่า โจทย์ที่นำมาสัมภาษณ์นั้น เป็นข้อที่นักเรียนเคยทำผิดมาแล้ว ส่วนวิธีการใช้คำถามในการสัมภาษณ์นั้นนิวมานเสนอว่าคำถามดังต่อไปนี้จะเป็นแนวทางไปสู่การวิเคราะห์ความผิดพลาดของนักเรียนจากการเขียนตอบในแบบทดสอบคณิตศาสตร์

ตารางที่ 5 ตารางบันทึกการวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิวมาน

ชั้นที่	การวิเคราะห์ความผิดพลาด	คำถามที่ใช้
1	ความผิดพลาดจากการอ่าน (Reading Errors)	นักเรียนลองอ่านคำถามให้ครูฟัง
2	ความผิดพลาดจากความเข้าใจ (Comprehension Errors)	บอกครูว่า คำถามต้องการให้เธอทำอะไร
3	ความผิดพลาดจากการเปลี่ยนรูป (Transformation Errors)	บอกครูถึงแนวคิดที่เธอจะใช้หาคำตอบ
4	ความผิดพลาดจากการใช้ทักษะกระบวนการ (Process skill Errors)	ลองแสดงวิธีที่เธอใช้คำนวณหาคำตอบ พร้อมอธิบายตามไปด้วย
5	ความผิดพลาดจากการสรุปตอบ (Encoding Errors)	ที่นี่ ให้เธอเขียนคำตอบของคำถาม

วิธีการบันทึกการสัมภาษณ์ลงในแบบบันทึกการสัมภาษณ์ของนิวมาน มีวิธีการบันทึกดังต่อไปนี้

1. การบันทึกผลการสัมภาษณ์ในขั้นการอ่าน (Reading Recognition)

การสัมภาษณ์นักเรียนในขั้นนี้ ผู้ศึกษาจะให้นักเรียนอ่าน โจทย์ปัญหาจากแบบทดสอบถ้านักเรียนอ่านได้ถูกต้อง ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร C (Correct) ในช่องของ Word แต่ถ้านักเรียนอ่านคำใดคำหนึ่งผิดหรืออ่านไม่ได้ ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร E (Errors) ในส่วนของ Word เช่นกัน พร้อมกับบันทึกรายละเอียดของการอ่านผิดอย่างย่อๆ ในส่วนของการอ่านสัญลักษณ์ที่อยู่ในโจทย์ปัญหานั้น ถ้านักเรียนอ่านสัญลักษณ์ได้ถูกต้อง ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร C ในส่วนของ Symbol แต่ถ้านักเรียนอ่านผิดหรืออ่านไม่ได้ ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร E ในส่วนของ Symbol เช่นกัน พร้อมทั้งบันทึกรายละเอียดของการอ่านสัญลักษณ์ที่ผิดอย่างย่อๆ

2. การบันทึกผลการสัมภาษณ์ในขั้นการทำความเข้าใจ (Comprehension) การบันทึกผลการสัมภาษณ์ในขั้นการทำความเข้าใจคำศัพท์เฉพาะ (Comprehension (a)) เมื่อผู้ศึกษาให้

นักเรียน บอกความหมายของคำสำคัญ (Key Words) หรือสัญลักษณ์ที่อยู่ในโจทย์ปัญหาแล้ว ผู้ศึกษาจะบันทึกผลลงในส่วนของ Terms ถ้านักเรียนสามารถบอกได้ถูกต้อง ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร C แต่ถ้านักเรียนบอกผิด หรือบอกไม่ได้ ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร E และบันทึกรายละเอียดของสิ่งที่ผิดอย่างย่อๆ การบันทึกผลการสัมภาษณ์ในขั้นการทำความเข้าใจ โจทย์ (Comprehension (b)) เมื่อผู้ศึกษาให้นักเรียนบอกสิ่งที่โจทย์ปัญหาต้องการให้นักเรียนทำ แล้วผู้ศึกษาจะบันทึกผลลงในส่วนของ General โดยถ้านักเรียนบอกได้ถูกต้อง ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร C แต่ถ้านักเรียนบอกผิดหรือบอกไม่ได้ ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร E และบันทึกรายละเอียดของสิ่งที่ผิดอย่างย่อๆ

3. การบันทึกผลการสัมภาษณ์ในขั้นการเปลี่ยนรูป (Transformation) ในขั้นนี้ ถ้านักเรียนสามารถบอกแนวคิด หรือวิธีที่จะใช้หาคำตอบๆ ได้ถูกต้อง ผู้ศึกษาจะบันทึกผลโดยวงกลมล้อมรอบอักษร C แต่ถ้านักเรียนบอกผิด หรือบอกไม่ได้ ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร E และบันทึกรายละเอียดของสิ่งที่ผิดอย่างย่อๆ

4. การบันทึกผลการสัมภาษณ์ในขั้นการใช้ทักษะกระบวนการ (Process Skills) ถ้านักเรียนแสดงวิธีคิดคำนวณหาคำตอบได้ถูกต้อง ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร C แต่ถ้านักเรียนแสดงวิธีคิดคำนวณผิด หรือแสดงวิธีคิดคำนวณไม่ได้ ผู้ศึกษาจะบันทึกสิ่งที่ผิดลงในส่วนต่างๆ ของขั้น Process Skills ดังนี้

4.1 ถ้านักเรียนแสดงวิธีคิดคำนวณซึ่งเป็นการเดาคำตอบที่ผิด ผู้ศึกษาจะบันทึกผลลงในส่วนของการเดาคำตอบ โดยวงกลมล้อมรอบอักษร E ในแถวของ R (Random Response)

4.2 ถ้าพบว่านักเรียนเลือกการกระทำทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการคำนวณไม่ถูกต้อง ไม่เหมาะสม หรือไม่ตรงกับโจทย์ที่ต้องการแล้ว ผู้ศึกษาจะบันทึกผลการวงกลมล้อมรอบอักษร E ในแถวของ WO (Wrong Operation)

4.3 ถ้าพบว่านักเรียนได้นำการกระทำทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องตรงกับที่โจทย์ต้องการให้ทำแล้วมาใช้คำนวณอย่างผิดๆ ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร E ในแถวของ FA (Faulty Algorithm)

4.4 ถ้าพบว่านักเรียนคิดคำนวณผิด ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร E ในแถวของ FC (Faulty Computation)

4.5 ถ้าพบว่านักเรียนไม่แสดงวิธีคิดคำนวณ หรือ ทำได้เลยผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร E ในแถวของ E ในแถวของ NR (No Response) ทั้งนี้ถ้านักเรียนแสดงวิธีคิดคำนวณผิด

หมดทุกกรณีดังกล่าวข้างต้นแล้ว ผู้ศึกษาจะบันทึกความผิดพลาด โดยวงกลมล้อมรอบอักษร E ในแถวสุดท้าย

5. การบันทึกผลการสัมภาษณ์ในขั้นการสรุปคำตอบ(Encoding Ability)ถ้านักเรียนสรุปคำตอบในรูปข้อความ หรือ ภาษา ได้ถูกต้อง ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบ C ในส่วนของ Words ถ้าสรุปผิด ผู้ศึกษาจะวงกลมรอบอักษร E ในส่วนของ Words เช่นเดียวกัน

ถ้านักเรียนสรุปคำตอบในรูปสัญลักษณ์ได้ถูกต้อง ผู้ศึกษาจะวงกลมรอบอักษร C ในส่วนของ Symbols ถ้าสรุปผิด ผู้ศึกษาจะวงกลมล้อมรอบอักษร E ในส่วนของ Symbols เช่นเดียวกัน

จากคำกล่าวข้างต้นสรุปได้ว่า การสัมภาษณ์ เป็นวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล เพื่อหาข้อเท็จจริง โดยอาศัยการสนทนาพูดคุยระหว่างบุคคล และในการสัมภาษณ์นั้นผู้สัมภาษณ์จะต้องมีการวางแผนก่อนมีการสัมภาษณ์ทุกครั้ง ไม่ว่าจะเป็นในส่วนของคำถาม เครื่องมือที่ใช้ในการบันทึกหรือแม้กระทั่งสิ่งที่ต้องการจากการสัมภาษณ์ในแต่ละครั้ง นอกจากนี้ผู้สัมภาษณ์ควรสร้างบรรยากาศที่เป็นกันเอง เพื่อให้การสนทนาระหว่างผู้สัมภาษณ์และผู้ถูกสัมภาษณ์เป็นไปอย่างราบรื่น

การหาคุณภาพของเครื่องมือ

การหาคุณภาพของเครื่องมือนั้นคุณภาพบางด้านเมื่อสร้างเครื่องมือเสร็จก็สามารถตรวจสอบได้ทันที (เช่น ด้านความเป็นปรนัย) บางด้านจะต้องนำเครื่องมือไปทดลองใช้หรือที่เรียกกันว่า Try out กับกลุ่มนักเรียนที่มีลักษณะใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่างก่อน แล้วจึงนำผลมาวิเคราะห์หาค่าคุณภาพ เครื่องมือบางชนิดจำเป็นต้องตรวจสอบคุณภาพทุกด้าน แต่บางชนิดสามารถตรวจสอบเพียงบางด้าน ทั้งนี้ขึ้นกับลักษณะของชนิดเครื่องมือ นั้น คุณภาพของเครื่องมือที่จำเป็นต้องตรวจสอบ มี 5 ด้าน ได้แก่

1. ความเที่ยงตรง (Validity)(หรือความตรง) เป็นคุณสมบัติของเครื่องมือที่วัดในสิ่งที่ต้องการวัด ความเที่ยงตรงแยกย่อยเป็น ความเที่ยงตรงตามเนื้อหา(วัดเนื้อหาสาระ ได้ครบถ้วนตามหลักสูตรและจุดประสงค์) และ ความเที่ยงตรงตาม โครงสร้าง (วัดพฤติกรรม และสมรรถภาพด้านต่าง ๆ ได้ตรงตามจุดมุ่งหมายที่กำหนดตามหลักทฤษฎี)

2. ความเชื่อมั่น (Reliability)(หรือความเที่ยง)เป็นคุณสมบัติของเครื่องมือที่แสดงให้เห็นว่าเครื่องมือ นั้น ๆ ให้ผลการวัดที่สม่ำเสมอ คงที่ แน่นนอน ไม่ว่าจะวัดกี่ครั้งก็ตาม

3. **ความเป็นปรนัย (Objectivity)** เป็นคุณสมบัติของเครื่องมือที่มีลักษณะต่าง ๆ

ดังนี้คือ

3.1 คำถามมีความชัดเจน ชัดเฉพาะ อ่านแล้วเข้าใจตรงกัน

3.2 การตรวจให้คะแนนมีความแน่นอน ตรงกันไม่ว่าใครจะตรวจก็ตาม

3.3 แปลความได้ชัดเจนว่า คะแนนที่ได้มีความสามารถอยู่ในระดับใด

4. **ความยากง่าย (Difficulty เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ p)** เป็นคุณสมบัติของข้อสอบที่บอกว่าข้อสอบนั้นมีคนทำถูกมากน้อยเพียงใด เครื่องมือที่ดีต้องมีความยากง่ายพอเหมาะ

5. **อำนาจจำแนก (Discrimination เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ r)** เป็นคุณสมบัติที่จำแนกกลุ่มเก่งกลุ่มอ่อนออกจากกัน หรือจำแนกความคิดเห็นที่ต่างกันออกเป็นสองกลุ่มได้ เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลมีอยู่หลายชนิดในที่นี้ขอนำมาเจาะจงที่ใช้กันบ่อยได้แก่ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์(ส่วนใหญ่เราจะนำมาใช้กันเป็นแบบทดสอบก่อนเรียน/หลังเรียน และแบบสอบถามมาตราส่วนประมาณค่า (แบบนี้เราจะใช้ตอนให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจ/ประเมินนวัตกรรม และ ใช้วัดเจตคติของนักเรียน) เพื่อให้ทราบว่าคุณสมบัติทั้งสองชนิดนี้ต้องตรวจสอบคุณภาพด้วยวิธีการใด ส่วนวิธีการหานั้นหากจะหาด้วยการใช้สูตรก็สามารถทำได้ หรือให้สะดวก ก็สามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งมีอยู่แพร่หลายในปัจจุบัน

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิเคราะห์หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ ในเรื่องต่างๆ ที่นักการศึกษาหลายๆท่าน ได้ทำการศึกษาไว้ ทั้งนี้เพื่อเป็นแนวทางสำหรับการวิเคราะห์หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. งานวิจัยในประเทศ

คารณี คำแหง (2533 : 69) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5” กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กรุงเทพมหานครจำนวน 320 คน สรุปผลการวิจัยได้ดังนี้ จากการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์จากแบบสอบชนิดเลือกตอบพบว่า นักเรียนมีข้อบกพร่องในด้านต่าง ๆ

เรียงตามลำดับคำร้อยละจากมากไปน้อย คือ การใช้ข้อมูล การคิดคำนวณ หรือการพิสูจน์ การใช้สมบัติ นิยาม กฎ สูตร หรือทฤษฎี การตีความด้านภาษา และการใช้กราฟ ตาราง หรือแผนภูมิ ส่วนการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์จากแบบสอบชนิดความเรียงพบว่า นักเรียนมีลักษณะข้อบกพร่องในด้านต่าง ๆ เรียงตามลำดับจากมากไปหาน้อยดังนี้ การตีความด้านภาษา การคิดคำนวณ หรือการพิสูจน์ การใช้สมบัติ นิยาม กฎ สูตร หรือทฤษฎี การใช้ตาราง หรือแผนภูมิและการตรวจสอบการแก้ปัญหา

อัมพร ม้าคนอง (2536 : 64) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย” กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/3 จำนวน 21 คน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีข้อผิดพลาดด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติมากที่สุด รองลงมาคือด้านการคิดคำนวณและการด้านการตีความโจทย์ตามลำดับ ส่วนความถี่ของข้อผิดพลาดในแต่ละส่วนประกอบของแต่ละด้าน มีดังนี้ ด้านการตีความโจทย์ นักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วน การนำข้อมูลมาใช้ผิดมากที่สุด รองลงมาคือ แปลความหมายจากประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง และการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ นักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติมากที่สุด รองลงมาคือ ประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติไม่ถูกต้อง จำทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ ผิด และขาดทักษะในการเลือกทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติที่เหมาะสมมาใช้ตามลำดับ ด้านการคิดคำนวณนักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วนสรุปผลไม่ถูกต้องหรือสรุปผลไม่ครบทุกกรณีมากที่สุด รองลงมาคือขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ ขาดทักษะในหลักพีชคณิตเบื้องต้นในการแก้สมการและอสมการทำผิดขั้นตอนที่ถูกต้องในการคำนวณ และขาดความเข้าใจในหลักเลขคณิตเบื้องต้นตามลำดับ

สำเร็จ พิมพ์ดี (2538 : 54) ได้ศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่อง “เศษส่วนและการแก้ไขข้อบกพร่องด้วยการใช้แบบฝึกการสอนซ่อมเสริมสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนขยายโอกาสทางการศึกษา : กรณีศึกษา โรงเรียนบ้านโจด อำเภอมัญจศิริ จังหวัดขอนแก่น” กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปีการศึกษา 2538 ที่ไม่ผ่านจุดประสงค์ตามเกณฑ์ที่กำหนด(ร้อยละ 70) ของเนื้อหาในแต่ละตอน ผลการวิจัยพบว่า ในปีการศึกษา 2537 นักเรียนมีข้อบกพร่องจากการทำแบบทดสอบวินิจฉัยฉบับที่ 1 ถึง 6 เป็นจำนวน 27 คน 29 คน 28 คน 28 คน 28 และ 29 คน ตามลำดับ ส่วนในปีการศึกษา 2537 นักเรียนมีข้อบกพร่องจากการทำแบบทดสอบวินิจฉัยฉบับที่ 1 จำนวน 10 คน และหลังจากทำ

การซ่อมเสริมด้วยแบบฝึกการสอนซ่อมเสริมตามสาเหตุที่บกพร่องแล้ว พบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นหมดทุกคน

ชนิษฐา คำทอน (2539 : 63) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การศึกษาข้อบกพร่องในกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของ โรงเรียนสาธิต สังกัดทบวงมหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร” โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาข้อบกพร่องในกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของ โรงเรียนสาธิต ใน สังกัดทบวงมหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร จำนวน 400 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย ที่มีค่าความเที่ยง 0.89 ซึ่งผลการวิจัยพบว่า จำนวนนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีข้อบกพร่อง ในกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรียงลำดับจากมากไปหาน้อยดังนี้จำนวนแผนแก้ปัญหาคิดเป็นร้อยละ 42.25 ขึ้นดำเนินการตามแผนคิดเป็นร้อยละ 37.25 ขึ้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบคิดเป็นร้อยละ 36.75 และขึ้นทำความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหาคิดเป็นร้อยละ 17.50 นอกจากนี้จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ สูง ปานกลาง และต่ำ มีข้อบกพร่องในแต่ละขั้นตอนในกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ กลุ่มสูง มีข้อบกพร่องในการวางแผนแก้ปัญหาคิดเป็นร้อยละ 19.03 ขึ้นดำเนินการตามแผนคิดเป็นร้อยละ 12.83 ขึ้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบคิดเป็นร้อยละ 9.29 และขึ้นทำความเข้าใจปัญหาคิดเป็นร้อยละ 5.312 กลุ่มปานกลาง มีข้อบกพร่องในการวางแผนแก้ปัญหาคิดเป็นร้อยละ 52.24 ขึ้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบคิดเป็นร้อยละ 49.25 ขึ้นดำเนินการตามแผนคิดเป็นร้อยละ 46.27 และขึ้นทำความเข้าใจปัญหาคิดเป็นร้อยละ 19.402 และกลุ่มต่ำ มีข้อบกพร่องในขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบคิดเป็นร้อยละ 86.92 ขึ้นวางแผนแก้ปัญหาคิดเป็นร้อยละ 84.11 ขึ้นดำเนินการตามแผนคิดเป็นร้อยละ 83.18 และขึ้นทำความเข้าใจปัญหาคิดเป็นร้อยละ 42.06

วนิดา หงษ์ถิ (2540 : 8) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาสภาพความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยใช้เทคนิคการสัมภาษณ์ของนิวแมน และเปรียบเทียบความแตกต่างของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างการตอบแบบทดสอบแบบเลือกตอบกับแบบตอบสั้น กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2539 ของกลุ่มโรงเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 จังหวัดนครพนม กรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการจำนวน 196 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบแบบเลือกตอบและแบบตอบสั้น เรื่องร้อยละ ฉบับละ 15 ข้อ และแบบสัมภาษณ์ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นตามเทคนิคการสัมภาษณ์ของนิวแมน เพื่อถามความเข้าใจในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่

คณิตศาสตร์ด้วยข้อสอบที่เป็นตัวแทน ฉบับละ 6 ข้อ การวิเคราะห์ข้อมูลศึกษาสภาพความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ใช้ค่าร้อยละเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยใช้ไคสแควร์ (χ^2 -test)

มาลา ปาจุวัง (2542 : 3) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “ข้อบกพร่องทางเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจักรคำคณาทร จังหวัดลำพูน” โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์ โรงเรียนจักรคำคณาทร จังหวัดลำพูน ซึ่งกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541 จำนวน 40 คน ผลการวิจัยสรุปได้ว่า ข้อบกพร่องทางการเรียนที่นักเรียนมีมากที่สุดคือ ข้อบกพร่องด้านเทคนิคการแก้ปัญหาโจทย์ ซึ่งนักเรียนไม่ใช้รูปธรรมช่วยในการแก้ปัญหาโจทย์ ไม่รู้จักคาดคะเนคำตอบ มองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลกับปัญหาที่ต้องการแก้ ไม่มีการกำหนดขั้นตอนของการแก้ปัญหา รองลงมา ได้แก่ ข้อบกพร่องด้าน การคิดคำนวณ โดยนักเรียนขาดทักษะการคิดคำนวณเบื้องต้นไม่ตรวจสอบคำตอบ ตลอดจนขั้นตอนของการแก้โจทย์ปัญหาและมีความรู้พื้นฐานที่จะใช้ในการเรียนเนื้อหาอื่นๆ ไม่เพียงพอ และข้อบกพร่องด้านกฎ นิยาม สูตรหรือทฤษฎีไปใช้ โดยนักเรียนมีความเข้าใจและใช้กฎ นิยาม สูตรหรือทฤษฎียังไม่ถูกต้องส่วนข้อบกพร่องด้านพฤติกรรมการเรียนที่พบคือ นักเรียนไม่ให้ความร่วมมือในการตอบคำถามและขาดความกระตือรือร้นในการเรียน

กรรณิการ์ ปวนภาส (2543 : 5) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การใช้กระบวนการวิเคราะห์ ความผิดพลาดของนิเวศน์เพื่อวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการกำลังสองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนเมืองปานวิทยา จังหวัดลำปาง” ซึ่งกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนเมืองปานวิทยา ที่มีผลการเรียนในรายวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ จำนวน 10 คน ซึ่งสรุปผลได้ดังนี้ ความผิดพลาดในการแก้ โจทย์ปัญหาสมการกำลังสองของนักเรียนมีทั้งหมด 80 ความผิดพลาด ความผิดพลาดในการแก้ โจทย์ปัญหาสมการกำลังสองของนักเรียนเป็นความผิดพลาดประเภทความเข้าใจ ร้อยละ 45 ความผิดพลาดประเภทการเปลี่ยนรูป ร้อยละ 48.75 ความผิดพลาดประเภทการใช้ทักษะ กระบวนการ ร้อยละ 5 และความผิดพลาดประเภทการสรุปคำตอบร้อยละ 1.25

เมตตา มาเวียง (2544 : 56) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การศึกษาข้อบกพร่องในการแก้ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องสมบัติของจำนวนนับ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น” โดยกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเป็นนักเรียนระดับ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในปีการศึกษา 2544 จำนวน 234 คน ซึ่งสรุปได้ว่า นักเรียนมีลักษณะของ ข้อบกพร่องย่อย 12 ลักษณะ โดยเรียงลำดับลักษณะข้อบกพร่องย่อย 3 ลำดับ จากมากไปหาน้อยดังนี้ นักเรียนทำไม่ครบขั้นตอนหรือลำดับขั้นตอนผิด เปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยค คณิตศาสตร์ไม่ได้ และบอกกฎสูตร หรือนิยามของจำนวนนับไม่ได้ และเมื่อรวมลักษณะ ข้อบกพร่องย่อยเป็นลักษณะข้อบกพร่องใหญ่ได้ 4 ลักษณะ เรียงลำดับความถี่ที่พบต่อจำนวน ความถี่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากมากไปน้อย คือการตรวจสอบการแก้ปัญหาร้อยละ 56.00 การใช้กฎ สูตร และนิยาม ร้อยละ 36.89 การตีความหมาย ร้อยละ 29.00 และลำดับสุดท้ายคือ การคิดคำนวณ ร้อยละ 23.00

สุกัญญา แซ่มซ้อย (2545 : 74) ได้วิเคราะห์ห้ม โนทัศน์และการปฏิบัติงาน ประเมินผลภายในสถานศึกษาขั้นพื้นฐาน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษามโนทัศน์ และการปฏิบัติงานประเมินผลภายในสถานศึกษาขั้นพื้นฐาน และวิเคราะห์สภาพการปฏิบัติงาน ปัญหา อุปสรรค แนวทางแก้ไขปัญหา และปัจจัยที่ส่งผลต่อการปฏิบัติงานของโรงเรียนที่ ประสบความสำเร็จระดับสูงและระดับต่ำโดยใช้การวิจัยเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ ประชากร คือ ครูสังกัดสำนักงานการประถมศึกษาแห่งชาติจำนวน 929 คน ผลการวิจัยสรุปได้ว่า เมื่อ จำแนกโรงเรียนตามระดับมโนทัศน์ และการปฏิบัติงานประเมินผลภายในสถานศึกษาจะได้ 4 รูปแบบ คือ รูปแบบที่ 1 มีมโนทัศน์ระดับสูง และการปฏิบัติระดับสูง 21.30 % รูปแบบที่ 2 มี มโนทัศน์ระดับสูง การปฏิบัติงานต่ำ รูปแบบที่ 3 มีมโนทัศน์ระดับต่ำ การปฏิบัติงานระดับสูง และรูปแบบที่ 4 มีมโนทัศน์ต่ำ การปฏิบัติงานต่ำ สำหรับสภาพปฏิบัติงานประเมินผลภายใน ของโรงเรียนที่ประสบความสำเร็จระดับสูง มีการปฏิบัติตามวงจร PDCA อย่างต่อเนื่องอยู่ใน วงจรการทำงานปกติ ส่วนโรงเรียนที่ประสบความสำเร็จในระดับต่ำ มีการปฏิบัติงานใน ขั้นตอน P และ D เท่านั้น

จงกล ทำสวน (2547 : 45-48) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การวินิจฉัยข้อผิดพลาดทาง การเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม” ประชากรที่ใช้ในการศึกษาเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม และผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีข้อผิดพลาดทางการเรียน มากที่สุดในด้านการคำนวณ รองลงมาเป็นด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติ และ ด้านการตีความจากโจทย์ ตามลำดับ ส่วนข้อผิดพลาดในแต่ละส่วนประกอบของแต่ละด้านมีค่า ร้อยละ ดังนี้ ด้านการคิดคำนวณ นักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วนสรุปผลไม่ถูกต้อง ร้อยละ 62.89 ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ ร้อยละ 21.65 ขาดทักษะในหลักพีชคณิตเบื้องต้นใน

การแก้สมการและอสมการร้อยละ 8.25 และทำผิดขั้นตอนที่ถูกต้องในการคิดคำนวณ ร้อยละ 7.21 ด้านการใช้ทฤษฎีบท สสูตร กฎ นิยามและสมบัติ นักเรียนมีข้อผิดพลาดในความเข้าใจขั้นพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท สสูตร กฎ นิยามและสมบัติ ร้อยละ 50.70 ประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีบท สสูตร กฎ นิยามและสมบัติไม่ถูกต้องร้อยละ 36.62 จำทฤษฎีบท สสูตร กฎ นิยามและสมบัติ ผิด ร้อยละ 11.27 และขาดทักษะในการเลือกใช้ทฤษฎีบท สสูตร กฎ นิยามและสมบัติที่เหมาะสม ร้อยละ 1.41 และด้านตีความจากโจทย์นักเรียนมีความผิดพลาดในการแปลความหมายจากประโยคภาษาไปเป็นประโยคสัญลักษณ์ ร้อยละ 76.74 และนำข้อมูลมาใช้ผิด ร้อยละ 23.26

เวทฤทธิ์ อังกะภักทขจร (2551 : 25-33) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสาธิตพิบูลบำเพ็ญ” กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/7 จำนวน 43 คน ปีการศึกษา 2551 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 2 ชนิด คือแบบฝึกหัดและแบบทดสอบย่อยประจำบท ซึ่งผลการวิจัย พบว่า ในเนื้อหาเรขาคณิตวิเคราะห์และเนื้อหาภาคตัดกรวย นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้ง 4 ด้าน ที่ทำการศึกษา ได้แก่ ด้านการตีความจากโจทย์ ด้านการใช้ทฤษฎีบท สสูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติ ศศิมา กาละปลุก (2552 : 57) ได้ทำการศึกษาระบวนการวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิเวศวิเคราะห์ความผิดพลาดและสาเหตุของความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาสมการของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/2 จำนวน 10 คนในโรงเรียนบ้านเมืองนะ อำเภอเชียงดาวจังหวัดเชียงใหม่ เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา ได้แก่ แบบทดสอบ โจทย์ปัญหาสมการแบบเขียนตอบตารางบันทึกคำตอบจากแบบทดสอบ แบบบันทึกการสัมภาษณ์ และแบบวิเคราะห์ความผิดพลาดรายคน จากผลการศึกษาพบว่าความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหามากที่สุดคือในขั้นการเปลี่ยนรูปโดยพบว่า สาเหตุเกิดจากการที่นักเรียนมองไม่เห็นความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นในโจทย์ปัญหาทำให้ไม่สามารถนำข้อมูลที่มีในโจทย์ปัญหามาสัมพันธ์กันหรือเขียนเป็นสมการได้อย่างถูกต้อง รองลงมาคือการทำความเข้าใจศัพท์เฉพาะ การอ่านและการทำความเข้าใจศัพท์เฉพาะเกิดจากปัญหาด้านการใช้ภาษาไทยในการสื่อสาร รองลงมาอีกคือขั้นการใช้ทักษะกระบวนการเกิดจากการคิดคำนวณเพียงเพื่อต้องการให้ได้คำตอบตรงกับที่คาดคะเนเอาไว้ การนำกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ผิด การตรวจสอบคำตอบผิด การคิดคำนวณที่ไม่ถูกต้อง และท้ายสุดคือความสะเพร่าของนักเรียนเอง

ศรัญญา บุตรวงษ์ (2554 : 106) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนนาข่าวิทยาคม สังกัดองค์การบริหารส่วนจังหวัด

มหาสารคาม ” กลุ่มตัวอย่างที่ใช้มีจำนวนนักเรียน 137 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบทดสอบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ และแบบสัมภาษณ์ แบบมีโครงสร้าง วิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีพรรณนาวิเคราะห์ ซึ่งผลการวิจัย พบว่า ในเนื้อหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 2 แบบรูป คือ การตีความด้านภาษา และการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยามและสมบัติ และนักเรียนเกิดข้อผิดพลาด 2 แบบรูปเช่นกัน คือผิดพลาดในเทคนิคการทำ ขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา

2. งานวิจัยต่างประเทศ

เดวิส (Davis, 1979 : 58) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาข้อผิดพลาดของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับโครงสร้างของสาเหตุข้อผิดพลาด พร้อมทั้งวิธีการแก้ไข ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีข้อผิดพลาดในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเลขคณิตเรขาคณิต และแคลคูลัส 7 อย่าง ได้แก่ การสับสน กฎเกณฑ์ โครงสร้าง การตีความด้านภาษา การสรุปประโยคที่แสดงเกี่ยวกับกิริยา การให้เหตุผล และการใช้กฎที่ผิดลำดับขั้นตอน

นิวแมน (Newman, 1977 : 16) ได้วิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนเกรด 6 ที่มีผลสำเร็จทางการเรียนต่ำจำนวน 124 คน ผลการวิเคราะห์ของนิวแมนสามารถจำแนกประเภทความผิดพลาดที่พบทั้งหมด 3,002 ข้อนั้น จำแนกได้เป็น 47% ของผิดพลาดทั้งหมดเกิดขึ้นก่อนการใช้ทักษะการคิดคำนวณ และ 1 ใน 4 ของความผิดพลาดทั้งหมดเกิดจากความสะเพร่า นอกจากนั้นยังพบข้อมูลที่เป็นประโยชน์มากสำหรับครูคณิตศาสตร์ เช่นเด็กที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำต้องการความรู้จากการประยุกต์ใช้การกระทำทางคณิตศาสตร์ +, -, x, ÷ หรือทักษะพื้นฐานที่จำเป็นในการแก้สมการเชิงเส้นในรูป $ax+b=c$ มาซึ่งข้อมูลของนิวแมน ซึ่งให้เห็นว่า ความผิดพลาดทักษะพื้นฐานเป็นเพียงส่วนหนึ่งของความผิดพลาดส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้น

บูธและคณะ (Booth, et al. 1984 : 45) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การวิเคราะห์และข้อผิดพลาดทางการเรียนพีชคณิต ของนักเรียนในโรงเรียนมัธยมศึกษา” โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการออกข้อสอบและข้อผิดพลาดในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาประเทศอังกฤษที่มีอายุระหว่าง 13 – 15 ปี จำนวน 3,500 คนเครื่องมือในการวิจัยเป็นแบบสอบที่มีชื่อว่า CSMS (Concepts In Secondary Mathematics and Science) ผลการวิจัยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีความผิดพลาดในด้านต่าง ๆ

เช่น การให้ความหมายของตัวอักษร ความสัมพันธ์ของตัวอักษร เครื่องหมาย กฎและสัญลักษณ์ วิธีการที่นักเรียนใช้ในการคำนวณ วิธีการใช้สัญลักษณ์ เป็นต้น

โมฟโซวิทซ์ – ฮาดาร์ (Movshovitz – Hadar. 1987 : 3 – 14) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การวิเคราะห์รูปแบบข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา” ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 11 จำนวน 110 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือลักษณะข้อบกพร่องจำนวน 5 ด้าน และแบบสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีข้อบกพร่องตามลักษณะข้อบกพร่องเรียงตามลำดับความถี่จากมากไปหาน้อยในด้านต่างๆ ต่อไปนี้คือ การบิดเบือนทฤษฎีกฎ สูตร และนิยาม การใช้เทคนิคในการทำผิด การให้ข้อมูลผิด ข้อผิดพลาดในการใช้ภาษาสื่อสารการอ้างอิง วิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์และไม่มี การตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา

ทรูแรน (Truran. 1987 : 58-60) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ความผิดพลาดและเทคนิคการแก้ไขในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยทำการศึกษากับกลุ่มนักเรียนที่มีอายุระหว่าง 7-15 ปี ที่มีอุปสรรคในการเรียนคณิตศาสตร์ เครื่องมือที่ทำการวิจัยเป็นแบบทดสอบและการสัมภาษณ์ซึ่งมีการบันทึกเสียงไว้ แล้วนำมาสรุปผลการหาสาเหตุของข้อผิดพลาดของนักเรียนแต่ละคน ตามระดับความผิดพลาดที่เกิดขึ้น ซึ่งพิจารณาโดยใช้รูปแบบความผิดพลาด 9 ด้าน ของคาเซย์ คือ รูปแบบของคำถาม การอ่านคำถาม ความเข้าใจคำถาม กลยุทธ์ในการเลือกใช้ความรู้ ทักษะการเลือกใช้ความรู้ ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ การเสนอคำตอบความผิดพลาดซึ่งไม่สามารถระบุสาเหตุที่แน่นอนได้ เนื่องจากความระมัดระวังและความผิดพลาดซึ่งอาจจะทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน ผลการศึกษาพบข้อผิดพลาดตามรูปแบบนี้ แล้วนำเสนอวิธีการแก้ไข คือ ให้ใช้ประโยชน์จากสิ่งที่เป็นนามธรรมมาช่วยทั้งในส่วนบุคคลและในชั้นเรียน ให้นักเรียนใช้สมุดจดคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ที่พบใหม่พร้อมทั้งความหมายใช้ทักษะการอ่านในการแก้โจทย์ปัญหาตามลำดับขั้นต่อไป วิเคราะห์ประโยคอ่านซ้ำข้อความที่ไม่เข้าใจ ค้นหาคำถามซึ่งต้องการคำตอบ ค้นหาว่าตนเองกำลังศึกษาโจทย์ถึงขั้นใด อ่านประโยคดัง ๆ ถ้ายังไม่เข้าใจ ปรับระดับและสไตส์การอ่านให้ตรงกับเนื้อหาจนเข้าใจในเนื้อหาของคำถาม แล้วแปลความหมายของสิ่งที่อ่านไปสู่การคำนวณ นอกจากนี้ ครูควรช่วยเหลือนักเรียนแก้ปัญหาของบทเรียน โดยการอธิบายในชั้นเรียนก่อนที่จะให้นักเรียนลงมือทำ

ออง และ ลิม (Ong and Lim. 1987 : 199 - 205) ได้ทำการวิจัยเรื่องความเข้าใจและข้อผิดพลาดในวิชาพีชคณิต โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อสำรวจผลการสอนเกี่ยวกับความเข้าใจ

ในวิชาพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในสิงคโปร์ กลุ่มตัวอย่าง คือนักเรียนระดับมัธยมศึกษาที่มีอายุระหว่าง 15 – 16 ปี จำนวน 3 กลุ่ม เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 365 คน นักเรียนระดับเตรียมอุดมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 339 คน และนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัยจำนวน 267 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบพีชคณิตที่ผู้วิจัยดัดแปลงมาจากของอีวานส์ (Evans) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนจำนวนมากที่มีอายุระหว่าง 15 - 16 ปี ไม่สามารถแก้ปัญหาพีชคณิตต่างๆ ได้ และสาเหตุข้อผิดพลาดส่วนใหญ่ เนื่องจากนักเรียนไม่เข้าใจในการใช้ตัวอักษรแทนตัวแปรหรือค่าคงที่ นักเรียนใช้การแทนค่าจำนวนในสมการโดยไม่พิจารณากรณีที่เป็นไปไม่ได้

ชวาร์ซ (Schwartz, 1996 : 164 – 173) ศึกษาโน้ตที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับพีชคณิตโดยแบ่งเป็นเรื่องๆ ดังนี้

1. กลุ่มของสัญลักษณ์และลำดับของการดำเนินการ โดยศึกษากับนักเรียนวิทยาลัยชุมชนจำนวน 21 คน ศึกษาตั้งคำถามเกี่ยวกับชื่อของวงเล็บและลักษณะการใช้วงเล็บ ผลการศึกษาพบว่านักเรียนบางคนตอบว่า “ไม่แน่ใจทั้งชื่อและลักษณะการใช้วงเล็บ ผลการศึกษาพบว่านักเรียนบางคนตอบว่า ไม่แน่ใจทั้งชื่อและลักษณะการใช้” นักเรียนส่วนใหญ่ตอบว่า “ใช้วงเล็บก่อนเป็นลำดับแรกหรือต้องอยู่ในตำแหน่งในสุด ตามด้วยวงเล็บกำมปู และวงเล็บปีกกาตามลำดับ” นอกจากนี้ยังได้ศึกษาโดยใช้แบบสอบถามชนิดให้ตอบว่า ใช่ หรือไม่ใช่ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจอีกครั้งหนึ่ง โดยแบบสอบถามข้อที่ 1 – 3 จะให้สัญลักษณ์ของวงเล็บทั้งสามแบบได้แก่ () [] { } แล้วให้นักเรียนเติมชื่อ ส่วนข้อที่ 4- 14 เป็นลักษณะของการใช้วงเล็บทั้งสามแบบ ผลการศึกษาพบว่านักเรียนเพียงคนเดียวที่ตอบแบบสอบถามข้อที่ 4-14 ถูกทุกข้อ นอกจากนี้ยังนักเรียนส่วนใหญ่มักตอบว่า “ต้องใช้วงเล็บเล็กก่อนเป็นลำดับแรก ตามด้วยวงเล็บกำมปูและวงเล็บปีกกาเป็นลำดับนอกสุด” และนักเรียนแสดงความประหลาดใจเมื่อครูบอกว่า “ กลุ่มของสัญลักษณ์เหล่านี้ สามารถใช้ลำดับใดก่อนหลังก็ได้ ใช่ ใช่หรือซ้อนกันก็ได้เช่นเดียวกัน นอกจากนี้ผู้ศึกษายังกล่าวอีกว่าในตำราหรือหนังสือส่วนใหญ่ นั้นไม่มีผู้เขียนคนใดบอกไว้ตรงๆว่าจะใช้ลำดับของวงเล็บทั้งสามแบบนี้อย่างไร แต่จะแฝงไว้ด้วยการเสนอตัวอย่าง ซึ่งเป็นลักษณะเดียวกันคือวงเล็บเล็กจะอยู่ในสุด แล้วตามด้วยวงเล็บกำมปู และวงเล็บปีกกาในตำแหน่งนอกสุด ทำให้ผู้เรียนคิดว่าคือสิ่งที่ถูกต้องซึ่งแสดงให้เห็นว่าผู้เรียนเรียนรู้จากตัวอย่าง ไม่ใช่เรียนรู้จากรูปแบบการใช้ที่ถูกต้องจริงๆ

2. สมการ อสมการ และประพจน์โดยให้นักเรียนบอกว่า ข้อใดเป็นสมการ ข้อใดเป็นอสมการ และข้อใดเป็นประพจน์ จากการศึกษาพบว่า ไม่มีนักเรียนคนใดตอบถูกทุกข้อ และมีนักเรียนหนึ่งคนตอบผิดทุกข้อ

บาร์เซลลอส (Barcellos, 2005 : Abstract) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์เรื่อง พีชคณิตของนักเรียนในระดับมหาวิทยาลัย ผู้วิจัยได้ทำการศึกษากลุ่มตัวอย่างที่อยู่ในชั้นเรียนที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้น จำนวนครึ่งหนึ่งของนักเรียนที่สอบผ่านเท่านั้น โดยสัมภาษณ์หัวข้อเกี่ยวกับ ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ ที่ทำให้นักเรียนมีความคิดรวบยอดที่ผิดพลาด ระหว่างความผิดพลาดในระยะเบียบวิธีการ และความสะเพร่าเล็กๆน้อยๆตามปกติ พบว่า มีความผิดพลาด 4 ประการ ได้แก่ กรณีที่ 1 คือการไม่เข้าใจในการใช้เครื่องหมายแสดงการเท่ากัน และอีก 3 กรณีเป็นการใช้สมบัติการแจกแจง นักเรียนที่ไม่เข้าใจการใช้เครื่องหมายแสดงการเท่ากัน มีสาเหตุมาจากการเขียนข้อความที่สมมูลกันกับข้อความก่อนหน้าหรือมีสาเหตุมาจากการบกพร่องเกี่ยวกับสัญลักษณ์ที่จะใช้เขียนเพื่ออธิบายขั้นตอนการแก้ปัญหาส่วนความไม่เข้าใจเกี่ยวกับสมบัติการแจกแจง มีสาเหตุมาจากความไม่เข้าใจเนื้อหาของการดำเนินการที่ถูกต้อง ข้อค้นพบดังกล่าวมีผลมาจากทั้งความเข้าใจผิดพลาดที่พบมาก (การใช้กระบวนการ โดยไม่ถูกต้อง) และความเข้าใจผิดพลาดที่พบส่วนน้อย (ไม่สามารถใช้กระบวนการที่ถูกต้อง) สิ่งนี้นักเรียนแนะนำ คือจำนวนจริงที่ติดกรณีที่ไม่สามารถถอดรากได้จะเป็นกรณีพิเศษที่สามารถถอดรากได้โดยการดำเนินการของจำนวนจริงดังกล่าว

เซออบอลี่ (Xiaobaoli, 2006 : Abstract) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนเกี่ยวกับตัวแปร สมการและฟังก์ชัน พบว่าเป้าหมายพื้นฐานของการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้คือการสำรวจว่าทำไมนักเรียนจำนวนมากจึงมีปัญหาในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อให้บรรลุเป้าหมายนี้ การศึกษาค้นคว้ามุ่งเน้นเกี่ยวกับสาเหตุที่คล้ายกันที่ทำให้เกิดข้อผิดพลาดของนักศึกษาในช่วงระยะเวลาหนึ่ง จึงได้ทำการศึกษาเรื่องต่อไปนี หลักการพื้นฐาน 3 อย่างที่เกี่ยวกับพีชคณิตคือ ตัวแปร สมการ และฟังก์ชัน ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดของผู้เรียนและแนวคิดพื้นฐานของข้อผิดพลาด : มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนโดยการวิจัยแนวคิดพื้นฐานทั้ง 3 นี้จะทำให้เกิดความเข้าใจมากขึ้นในหลักการพื้นฐาน และปัญหาการเรียนรู้อื่นๆที่เกี่ยวข้อง การศึกษาวิจัยในครั้งนี้ ถึงแม้ว่าข้อผิดพลาดของนักเรียนแตกต่างกันในระดับที่ใด บางครั้งข้อผิดพลาดสัมพันธ์กับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของผู้เรียนเกิดขึ้นบ่อยครั้งและเกิดขึ้นหลังจาก 1 ปีของการสอนเพิ่มเติม ดังนั้นเป็นไปได้ที่จะระบุว่าจะระบบ

การคิดของผู้เรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนรวมทั้งข้อผิดพลาด ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงทำการสำรวจมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน โดยการสำรวจเปรียบเทียบระดับความเข้าใจในระดับสูง ต่ำ โดยความคิดรวบยอดทั้ง 2 ระดับนี้ วัตถุประสงค์ (โครงสร้าง) หรือกระบวนการ (การดำเนินงาน) นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนบรรลุในระดับสูงพบว่าใช้วัตถุประสงค์ (โครงสร้าง) การคิดเพื่อแก้ปัญหาแม้ว่าจะเกิดปัญหาสามารถแก้ไขได้ผ่านทางวิธีการพีชคณิตและคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังพบว่าความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนและการคิดในเชิงวัตถุประสงค์รวบยอดอธิบายได้ว่าทำไมบางคนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนยากที่จะเปลี่ยนความเข้าใจของผู้เรียน แนวความคิดที่ทั้งสองขั้นตอน (ขั้นตอนและวัตถุประสงค์) ปฏิสัมพันธ์กับทั้งสองด้าน (มโนทัศน์ที่ถูกต้องและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน) เมื่อผู้เรียนมีความเข้าใจแนวคิดที่เป็นกระบวนการ กับ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแล้ว ทำให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและความผิดพลาดน้อยลง

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศ สรุปได้ว่า การวิเคราะห์ห้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ มีความสำคัญต่อกระบวนการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพและได้ผลดียิ่งขึ้น จากผลการวิเคราะห์ห้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด ทำให้ทราบสาเหตุ ปัญหา และวิธีการคิดของเด็กในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตลอดจนกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหา ข้อมูลเหล่านี้มีประโยชน์อย่างมากต่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของครูตลอดจนการคิดหาแนวทางในการแก้ไขเพื่อช่วยให้นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์น้อยลงและเพื่อให้นักเรียนมีมโนทัศน์ที่ถูกต้อง จากผลการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่ได้นำเสนอมา ผู้วิจัยจึงได้นำแนวคิดและหลักการเหล่านั้นมาเป็นแนวทางในการทำวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ห้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ เรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2