

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่องการพัฒนาการสอนวิชากลศาสตร์วิศวกรรมโดยการใช้โปรแกรมช่วยสอน ในวิชา
กลศาสตร์วิศวกรรม ของนักศึกษาโปรแกรมวิชา การจัดการงานวิศวกรรมและเทคโนโลยี ผู้วิจัยได้วิเคราะห์
ข้อมูลตามวัตถุประสงค์ในการวิจัยดังนี้

ผลการนำโปรแกรมช่วยสอนมาใช้ในรายวิชากลศาสตร์วิศวกรรม ของคณะวิทยาศาสตร์และ
เทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

ในการนำโปรแกรมช่วยสอนมาใช้ในรายวิชากลศาสตร์วิศวกรรม ของคณะวิทยาศาสตร์และ
เทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม ดังแสดงในตารางที่ 1 โดยแบ่งหน่วยของ โปรแกรมช่วยสอน
ออกเป็น 5 หน่วยดังนี้

หน่วยที่ 1 สเตลาร์และเวกเตอร์

หน่วยที่ 2 ระบบแรงและแรงลัพธ์

หน่วยที่ 3 สภาพสมดุล

หน่วยที่ 4 การวิเคราะห์โครงสร้าง

หน่วยที่ 5 ความเสียดทาน

หน่วยที่ 6 งานเสมือน

1. สเตลาร์และเวกเตอร์

1.1 บทนำ (Introduction)

กลศาสตร์เป็นวิชาแขนงหนึ่งทางฟิสิกส์ ซึ่งศึกษาสภาวะหยุดนิ่ง หรือ เคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้การ
กระทำของแรง อาจกล่าวได้ว่าไม่มีวิชาใดที่มีบทบาทในการวิเคราะห์ทางวิศวกรรมศาสตร์มากไปกว่า
กลศาสตร์ ในตอนเริ่มต้นของวิชานี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับหลักการทางกลศาสตร์ ต่อมาได้มีการวิจัยและพัฒนา
ศาสตร์ในสาขาวิชานี้ โดยศึกษาเกี่ยวกับการสั่นสะเทือน (Vibration) ความคงทน (Stability) และความ
แข็งแรง (Strength) ของโครงสร้าง รวมไปถึงเครื่องจักร โครงสร้างของหุ่นยนต์ การออกแบบเครื่องบิน
(Spacecraft design) การออกแบบประสิทธิภาพของเครื่องยนต์ การไหลของของเหลว (Fluid flow)
นอกจากนั้นยังศึกษาเกี่ยวกับ โมเมนต์ อีตอม และ พหุคูณอื่น ๆ ซึ่งเกี่ยวข้องกับหลักการขั้นพื้นฐานทาง
วิศวกรรมศาสตร์ ตลอดจนความเข้าใจในวิชานี้ว่าเป็นพื้นฐานสำหรับงานในสาขาอื่น ๆ ทั้งหมด

ปกติแล้วหลักการทางกลศาสตร์จะเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก ดังนั้นคณิตศาสตร์จึงเข้า
มามีบทบาทเป็นอย่างสูงในวิชากลศาสตร์ ซึ่งจะถูกนำไปประยุกต์เพื่อนำไปหาคำตอบที่สำคัญทางกลศาสตร์

1.2 ความคิดรวบยอดขั้นพื้นฐาน (Basic Concepts)

หลักและนิยามโดยทั่วไป ของการศึกษากลศาสตร์ ซึ่งทุกคนควรเข้าใจมีดังนี้

อวกาศ (Space) หมายถึงตำแหน่งใดๆทางเรขาคณิตของวัตถุ ที่ซึ่งตำแหน่งถูกอธิบายโดยการวัด เป็นเส้นตรงหรือมุม ซึ่งสัมพันธ์กับระบบ โคออร์ดิเนต (Coordinate System)

อนุภาค (Particle) วัตถุใดๆที่ไม่แสดงขนาดเราเรียกว่าอนุภาค ในทางคณิตศาสตร์ อนุภาคจัดเป็น วัตถุซึ่งมีขนาดเข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งจะแสดงเป็นจุดของวัตถุ บ่อยครั้งที่อนุภาคถูกเลือกกว่าเป็นส่วนย่อยๆ ของวัตถุ

วัตถุแข็งเกร็ง (Rigid Body) คือ วัตถุที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างใดๆ เมื่อวัตถุเกิดการเคลื่อนที่ สัมพัทธ์ระหว่างอนุภาคภายในของวัตถุ วัตถุแข็งเกร็งจะมีมวลเป็นคุณสมบัติที่ใช้คำนวณการเคลื่อนที่แบบ เลื่อนตำแหน่ง และมีโมเมนต์ของความเฉื่อยเป็นคุณสมบัติที่ใช้คำนวณการหมุน

1.3 ปริมาณสเกลาร์และเวกเตอร์ (Scalar and Vector quantities)

ปกติแล้วปริมาณกลศาสตร์จะขึ้นอยู่กับปริมาณ 2 ชนิด คือ ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ ปริมาณสเกลาร์เป็นปริมาณที่บอกแต่เพียงขนาดอย่างเดียวเท่านั้นทุกคนก็สามารถเข้าใจได้ตรงกัน ตัวอย่าง ของปริมาณสเกลาร์ในทางกลศาสตร์ เช่น เวลา ปริมาตร ความหนาแน่น อัตราเร็ว พลังงาน และ มวล เป็นต้น

ปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณที่ต้องแสดงทั้งขนาดและทิศทาง ตัวอย่างของปริมาณเวกเตอร์ เช่น การขจัด (Displacement) ความเร็ว (Acceleration) แรง (Force) และ โมเมนต์ (Moment) เป็นต้น

ปริมาณทางฟิสิกส์ (Physical quantities) ซึ่งอยู่ในรูปเวกเตอร์ ถูกแบ่งออกเป็น 3 ชนิดดังนี้

1. **เวกเตอร์อิสระ (Free vector)** เป็นเวกเตอร์ที่กระทำไม่แน่นอนบน space ใดๆ เวกเตอร์ชนิดนี้สามารถย้ายไปอยู่ตำแหน่งใดๆได้แต่ต้องมีขนาดและทิศทางที่เท่าเดิม

2. **เวกเตอร์เลื่อนระดับ (Sliding vector)** เป็นเวกเตอร์ที่กระทำในทิศทางเดียวตลอดการเคลื่อนที่ โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลง

3. **เวกเตอร์คงที่ (Fixed vector)** เป็นเวกเตอร์ที่กระทำ ณ จุดใดจุดหนึ่ง เพียงจุดเดียวบนวัตถุ โดยการกระทำของเวกเตอร์จะเกิดการเปลี่ยนแปลงภายในของวัตถุและจะขึ้นอยู่กับจุดที่ถูกแรงกระทำ

เวกเตอร์ 2 มิติ (Two – Dimensional Vector)

เวกเตอร์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปดังสมการ

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \quad (2.1)$$

และขนาดของเวกเตอร์ $|\vec{A}|$ สามารถเขียนดังสมการ (2)

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (2.2)$$

และยังสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ดังสมการที่ (2.3)

$$\text{(Unit Normal Vector)} \quad \hat{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \quad (2.3)$$

เวกเตอร์ 3 มิติ (Three – Dimensional Vector)

นอกจากเวกเตอร์สามารถเขียนให้อยู่ในรูป 2 มิติได้ ทำนองเดียวกันเวกเตอร์สามารถกำหนดให้อยู่ในรูป 3 มิติได้เช่นเดียวกัน ดังสมการ (2.4) ถึง (2.6)

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (2.4)$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (2.5)$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \quad (2.6)$$

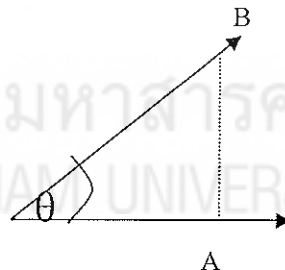
Scalar and Cross products

Scalar products

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$



Cross products

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \hat{u}_{\vec{A} \times \vec{B}}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

1.4 Newton's Law

1. วัตถุจะรักษาสภาพหยุดนิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ตลอดไป เมื่อไม่มีแรงใด ๆ

มากระทำ
$$\sum \vec{F} = 0$$

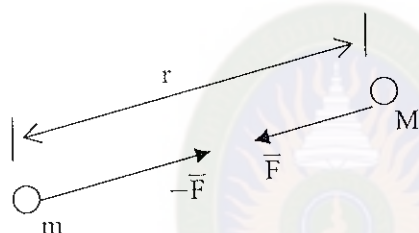
2. วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร่งในทิศทางเดียวกันแรงลัพธ์ ถ้าแรงลัพธ์ไม่เป็นศูนย์มา

กระทำต่อวัตถุ
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

3. Action = Reaction
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

1.5 Law of Gravity

$$\vec{F} = -\vec{F}_{21}$$



m, M = มวลของแต่ละอนุภาค

r = ระยะห่างระหว่างอนุภาคทั้งสอง

G = ค่าคงที่ของความโน้มถ่วง

ถ้าพิจารณาแรงดึงดูดที่กระทำต่อวัตถุบนผิวโลก พบว่า แรงดึงดูดระหว่างวัตถุกับโลกคือน้ำหนัก

$$\text{ดังนั้น } mg = \frac{GmM}{r^2}, \quad g = \frac{GM}{r^2}$$

2. ระบบของแรงและแรงลัพธ์

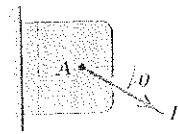
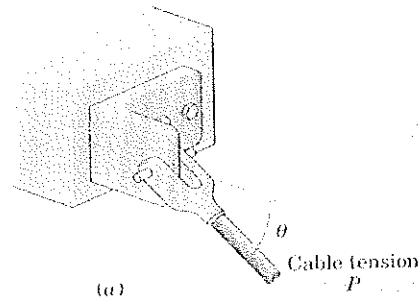
2.1 Introduction

ในบทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติและชนิดของแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนโครงสร้างและเครื่องจักร ตลอดจนศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานทางด้านกลศาสตร์ เช่น การวิเคราะห์ความเค้น (Stress analysis) การออกแบบโครงสร้าง (Design structures) และเครื่องจักร (machines) ปกติพื้นฐานความเข้าใจมีใช้อยู่เพียงสถิตศาสตร์ (Static) เท่านั้นแต่มันยังรวมถึงวัสดุ (material)

2.2 Forces

ก่อนที่จะศึกษาเกี่ยวกับระบบของแรงทั้งหมด มันเป็นสิ่งจำเป็นที่จะต้องตรวจสอบคุณสมบัติของแรงเดี่ยว (Single force) ซึ่งกระทำบนวัตถุใดวัตถุหนึ่งก่อน เราพบว่าแรงเป็นปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantity) โดยขึ้นอยู่กับขนาดและทิศทางของแรงที่กระทำ และแรงนี้อาจจะรวมถึงทฤษฎีแกนขนานของแรง (Parallelogram law of vector) ตัวอย่างเช่น การกระทำของแรงดึงของสายเคเบิลที่กระทำต่อแท่นยึด (bracket) ดังรูป

2.1 (a)



(b)

รูป 2.1 การกระทำของแรงดึง

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

และรูป 2.1 (b) แสดงถึงขนาดและทิศทางของแรง (\vec{P}) ผลของการกระทำบนแท่นยึดนี้จะขึ้นอยู่กับขนาดของแรง P มุม θ และตำแหน่งของจุด A ซึ่งการเปลี่ยนแปลงหนึ่งใน 3 ข้อกำหนดที่ว่าจะมีผลต่อแท่นยึดทันทีที่โดยแรงที่กระทำบนหัวนอตจะเป็นตัวทำให้แท่นยึดถูกยึดกับฐานอย่างปลอดภัย ดังนั้นข้อกำหนดที่สมบูรณ์ของการกระทำของแรงต้องประกอบด้วย ขนาด ทิศทาง และตำแหน่งของการกระทำ

การกระทำของแรงบนวัตถุสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. แรงภายใน (Internal force) ผลจากการกระทำของแรงภายนอกที่แท่นยึดทำให้เกิดความเค้น (Stresses) และความเครียด (Strain) ภายในเนื้อวัสดุของแท่นยึด ความสัมพันธ์ของแรงภายในและการยึดภายในจะเกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของวัสดุของวัตถุนั้น ๆ รวมถึงความแข็งแรง (Strength) ของวัสดุ เช่นเดียวกัน

2. แรงภายนอก (External force) ผลจากการกระทำของแรงภายนอก P ที่แท่นยึดจะเป็นแรงปฏิกิริยา (Reaction) หรือแรงที่มีอยู่แล้วบนแท่นยึด ดังนั้นแรงภายนอกที่กระทำบนวัตถุถูกแบ่งออกเป็น 2 ชนิด ดังนี้

2.1 แรงกระทำโดยตรง (Applied force)

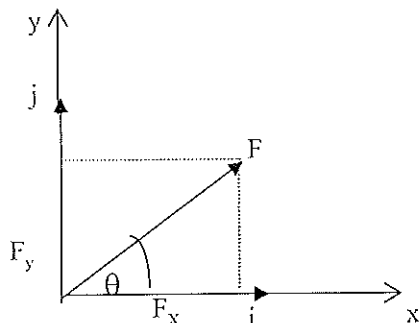
2.2 แรงปฏิกิริยา (Reaction force)

แรงอาจจะถูกจัดว่าเป็นแบบต้องสัมผัส (contact) ระหว่างวัตถุ 2 ชนิด หรือไม่สัมผัส (non-contact) ระหว่างวัตถุทั้ง 2 ชนิดก็ได้ แรงที่กระทำกับวัตถุแบบไม่ต้องสัมผัส หรือระยะทางไกล (Remote action) ได้แก่แรงดึงดูด (Gravitational) และแรงแม่เหล็ก (Magnetic force)

ในทำนองเดียวกัน แรงอาจจะจัดเป็นแบบกระทำที่จุดใดจุดหนึ่ง (Concentrated force) หรือกระจาย (Distributed force) ไปยังวัตถุ แรงที่เป็น concentrate load จะถูกกระทำในพื้นที่ จำกัดหรือพื้นที่เล็ก ๆ เมื่อเปรียบเทียบกับ distributed force

2.3 Rectangular Components (2D)

ปกติส่วนใหญ่แล้วเวกเตอร์ของแรงใน 2 มิติจะอยู่ในรูปองค์ประกอบที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน (Rectangular component) ซึ่งจากทฤษฎีแกนขนานเวกเตอร์ \vec{F} ของรูป 2.2 อาจจะถูกเขียนใหม่ ดังนี้



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \quad (2.7)$$

หรือเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปองค์ประกอบของ

Unit normal vector

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \quad (2.8)$$

รูป 2.2 องค์ประกอบที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

โดย F_x เป็นขนาดของแรงในแนวแกน $x = F \cos \theta$

F_y แทนขนาดของแรงในแนวแกน $y = F \sin \theta$

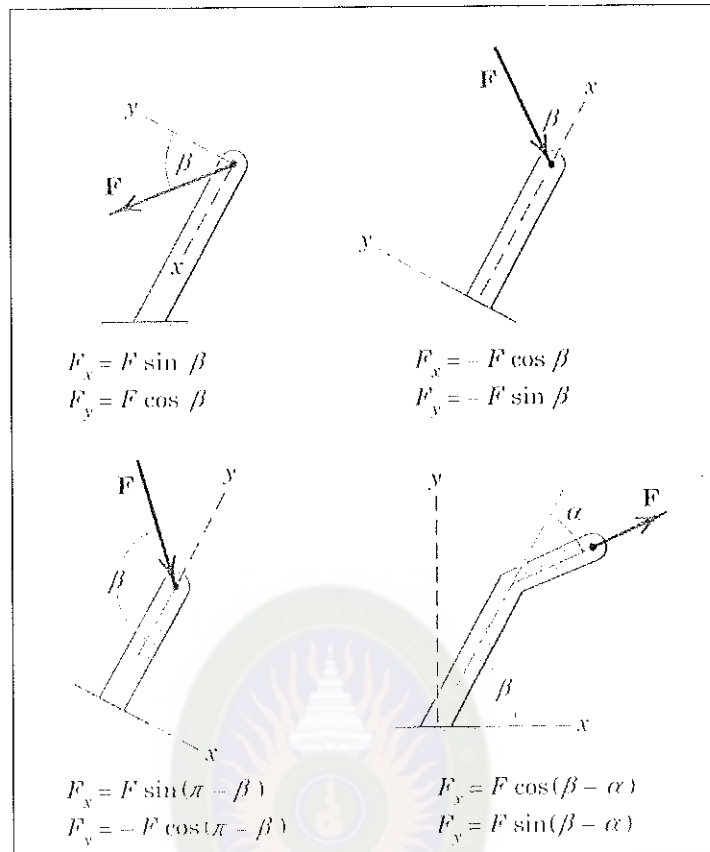
$$\text{ดังนั้น } |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.9)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x} \quad (2.10)$$

θ แทนด้วยมุมของแรง F ที่กระทำโดยเทียบกับแกน x

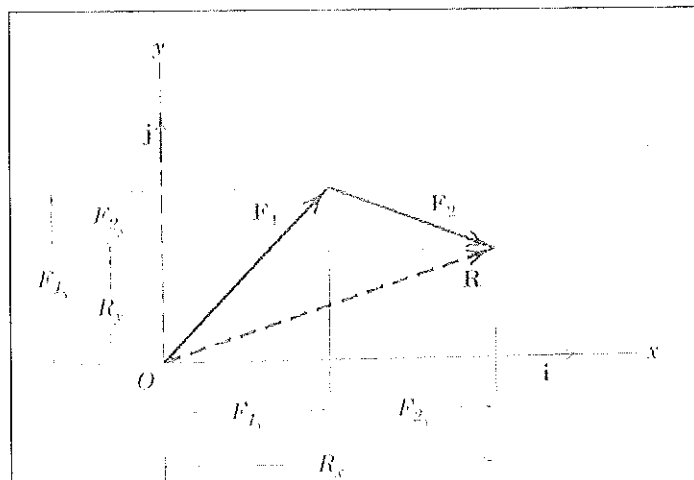
ปัญหาจริง ๆ ที่แรงมากระทำอาจจะไม่สะดวกเหมือนกับรูป 2.2 วิธีการคือพยายามหาแกนที่เป็นแกนหลักก่อน (Principal axis) ในที่นี้หมายถึงแกน x (Horizontal axis) และแกน y (Vertical axis) รูป

2.3 แสดงถึงวิธีการหาองค์ประกอบของแรงในกรณีต่าง ๆ



รูป 2.3 วิธีการหาค่าประกอบของแรงในกรณีต่างๆ
ที่มา : Russell C. Hibbeler.

ปกติแรงที่กระทำต่อวัตถุมิได้มีเพียงแรงเดียวเท่านั้น อาจเกิดจากแรงหลายๆ แรงกระทำร่วมกัน ณ จุดใด จุดหนึ่งหรือหลาย ๆ จุด ดังนั้น วิธีการที่ง่ายที่สุดคือ ต้องหาแรงลัพธ์ทั้งหมด หรือ หาแรงลัพธ์ในแต่ละแกนก่อนจึงคำนวณหาแรงลัพธ์สุดท้าย ดังรูป 2.4

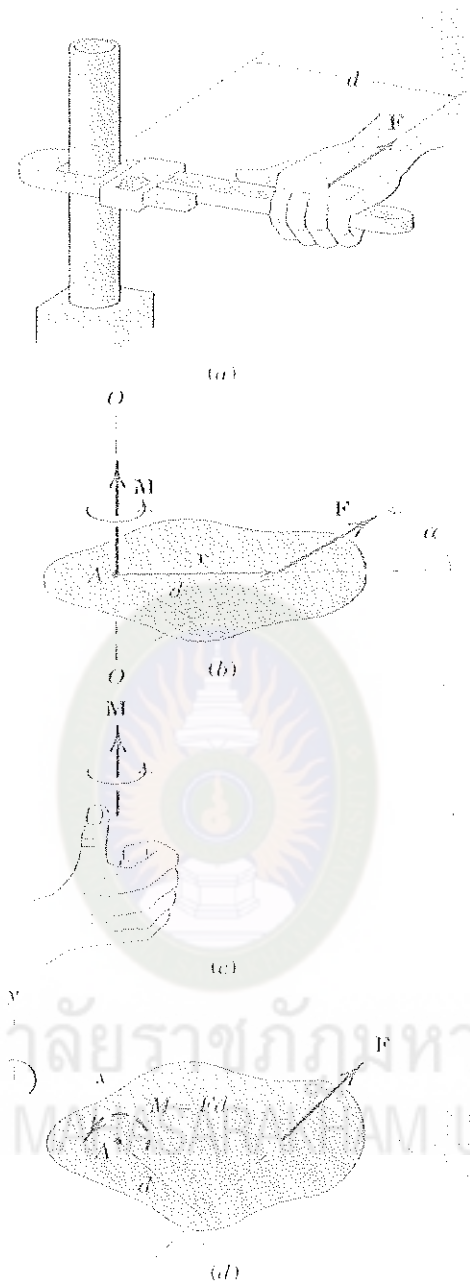


รูป 2.4 แรงลัพธ์ในแต่ละแกน
ที่มา : Russell C. Hibbeler.

$$\begin{aligned}
 \bar{R} &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \\
 &= \left(F_{1x} \hat{i} + F_{1y} \hat{j} \right) + \left(F_{2x} \hat{i} + F_{2y} \hat{j} \right) \\
 \therefore R_x \hat{i} + R_y \hat{j} &= \left(F_{1x} + F_{2x} \right) \hat{i} + \left(F_{1y} + F_{2y} \right) \hat{j} \\
 \sum F_x &= R_x = F_{1x} + F_{2x} \\
 \sum F_y &= R_y = F_{1y} + F_{2y} \\
 |\bar{R}| &= \sqrt{\left(F_{1x} + F_{2x} \right)^2 + \left(F_{1y} + F_{2y} \right)^2} \\
 \theta &= \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}
 \end{aligned}$$

2.4 Moment

การที่จะทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปโนทิศทางที่แรงกระทำ แรงนั้นจะมีผลทำให้วัตถุหมุนรอบแกนใด แกนหนึ่ง แกนนี้อาจจะเป็นเส้นตรงใดๆ ก็ได้ แต่แกนนี้ต้องไม่ตัดผ่านแนวกระทำของแรง การหมุนของแรง ในกรณีนี้เรียกว่า โมเมนต์ (M) ของแรง หรือ อาจเรียกอีกชื่อว่า การบิด (Torque) ตัวอย่าง concept ของ โมเมนต์ คือการพิจารณาประแจปากตาย (wrench) ที่จับอยู่กับท่อ (pipe) ดังรูป 2.10 (a) มันค่อนข้างชัดว่า แรงที่กระทำมีทิศทางตั้งฉากกับที่จับของประแจปากตาย โดยที่อวกหมุนรอบแกนตั้ง (Vertical axis) ขนาดของการหมุนขึ้นอยู่กับขนาดของแรงที่กระทำ (F) และความยาวของประแจปากตาย (d) ดังนั้นจาก ประสบการณ์แสดงว่าถ้าเราดึงประแจปากตายในทิศทางที่ไม่ตั้งฉากกับมือจับจะมีผลทำให้ประสิทธิภาพ ต่ำลง รูป 2.10 (b) แสดงวัตถุใน 2 มิติที่ถูกกระทำโดยแรง F ในระนาบ ของขนาดของโมเมนต์ หรือแรงที่ หมุนวัตถุรอบแกน O - O จะตั้งฉากกับระนาบของวัตถุ ซึ่งโมเมนต์นี้จะเป็นส่วนโดยตรงทั้งขนาดของ แรง และระยะของโมเมนต์ (d) โดยระยะทางตั้งฉากนี้วัดจากแกนถึงเส้นของการกระทำของแรงดังนั้นขนาด ของโมเมนต์ถูกกำหนด ดังนี้



รูปที่ 2.5 โมเมนต์ของแรงการเคลื่อนที่ในรูปแบบต่างๆ

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

$$M = Fd$$

(2.11)

โมเมนต์ (M) เป็นเวกเตอร์หนึ่งที่ตั้งฉากกับระนาบของวัตถุ โดย M ขึ้นอยู่กับทิศทางของ F ที่จะหมุนวัตถุ และ โมเมนต์ของ F รอบ O-O อาจจะถูกแทนเสมือนหนึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ชี้ในทิศทางของหัวแม่มือตามกฎมือขวา ดังรูป 2.10 (c)

ปกติแล้วแรงที่กระทำบนระนาบที่กำหนดให้เราแล้วได้ว่ามันจะเกิด โมเมนต์รอบจุด ๆ หนึ่ง ซึ่ง โมเมนต์ที่ว่าจะเทียบกับแกนที่ตั้งฉากกับระนาบและผ่านทะลุจุดที่กำหนดให้ ดังรูป 2.10 (d)

ในกรณีที่ เป็น 2 มิติหรือมากกว่านั้น โมเมนต์ที่พิจารณาจะอยู่ในรูป

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.12)$$

โดย \vec{r} เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งที่วัดจากจุด A ไปยังเส้นตรงของแรง \vec{F} โดยขนาดมีค่าเท่ากับ

$$M = rF\sin\theta = Fd \quad (2.13)$$

2.5 Couple (แรงคู่ควบ)

การเกิดโมเมนต์โดยแรงที่มีขนาดเท่ากันและทิศทางตรงกันข้าม ถูกเรียกว่าแรงคู่ควบ แรงคู่ควบมีคุณสมบัติที่สำคัญและมีการนำไปประยุกต์ในระบบกลศาสตร์

พิจารณาการกระทำของแรง F และ $-F$ โดยมีขนาดเท่ากันและทิศทางตรงกันข้าม โดยมีระยะห่างกันด้วยระยะทาง d ดังรูป 2.6 (a) แรง 2 แรงเหล่านี้ไม่สามารถถูกนำมารวมกันให้เป็นเพียงแรงเดียว แต่ผลรวมในทุกทิศทางทุกทางมีค่าเท่ากับศูนย์ซึ่งผลของแรง ทั้งหมดจะทำให้วัตถุเกิดการหมุน ผลรวมของโมเมนต์ของแรง 2 แรง รอบแกนหนึ่งแกนใด ที่ตั้งฉากกับระนาบและผ่านทะลุจุดหนึ่งจุดใดเช่น จุด O ในระนาบโดยจะมีค่าแรงคู่ควบเท่ากับ M มันจะมีขนาดเท่ากับ

$$M = F(a + d) - Fa$$

หรือ

$$M = Fd \quad (2.14)$$

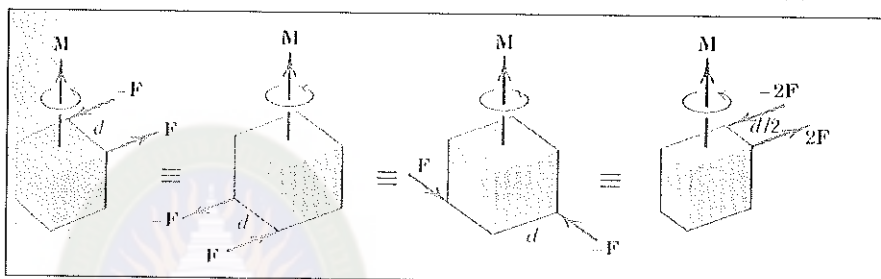
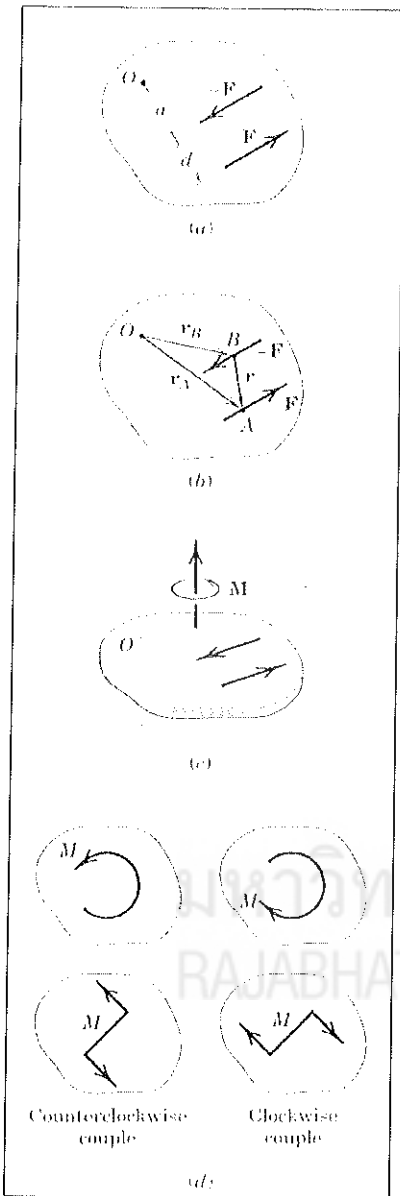
และถูกหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา สังเกตว่าขนาดของแรงคู่ควบที่เกิดขึ้น ไม่มีค่า Reference เป็นระยะทาง a ถึงจุดหมุน ดังนั้นเราจึงแทนโมเมนต์ของแรงคู่ควบโดยใช้เวกเตอร์เข้ามาช่วย โดยใช้ cross product จากรูป 2.6 (b) โมเมนต์รอบจุด O ของแรงคู่ควบจะมีค่า

$$\begin{aligned} M_A &= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) \\ &= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} \end{aligned} \quad (2.15)$$

ซึ่ง \vec{r}_A และ \vec{r}_B เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งจากจุด O ไปยังจุด A และ B ของการกระทำ \vec{F} และ $-\vec{F}$ ตามลำดับ แต่ $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}$ ดังนั้น

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.16)$$

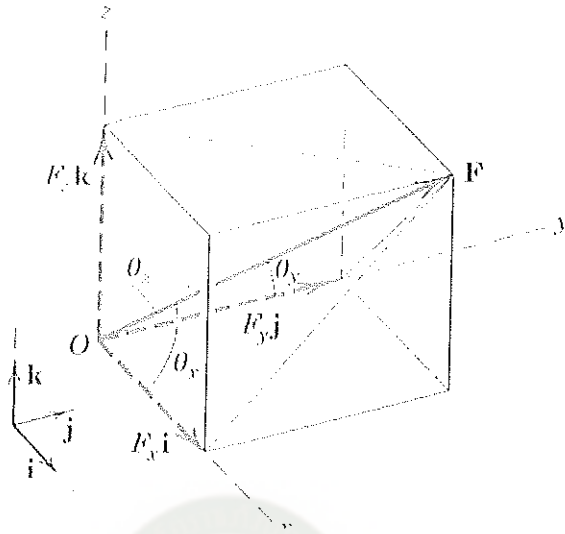
เราพบว่าค่าโมเมนต์ไม่มีการอ้างอิงที่จุดศูนย์กลางโมเมนต์ O ดังนั้นเราจะแทน \bar{M} ด้วย
 เวกเตอร์อิสระ (Free vector) ดังรูป 2.6 (c) ที่ซึ่งทิศทางของ \bar{M} จะตั้งฉากกับระนาบของแรงคู่ควบโดยใช้
 กฎมือขวาดังรูป 2.6 (d)



รูปที่ 2.7 configurations ที่แตกต่างกันของแรงคู่ควบ
 ที่มา : Russell C. Hibbeler.

รูป 2.6 การเกิด โมเมนต์ โดยแรงที่มีขนาดเท่ากันและทิศทางตรงกันข้าม
 ที่มา : Russell C. Hibbeler.

2.6 Three – Dimensional Force System Rectangular Components

รูป 2.8 แรง \vec{F} ที่กระทำ ณ จุดศูนย์กลาง

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

จากรูป 2.8 แรง \vec{F} ที่กระทำ ณ จุด O จะมียังประกอบของแรงเป็น F_x , F_y และ F_z โดย

$$F_x = F \cos \theta_x, \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F_y = F \cos \theta_y, \quad \vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

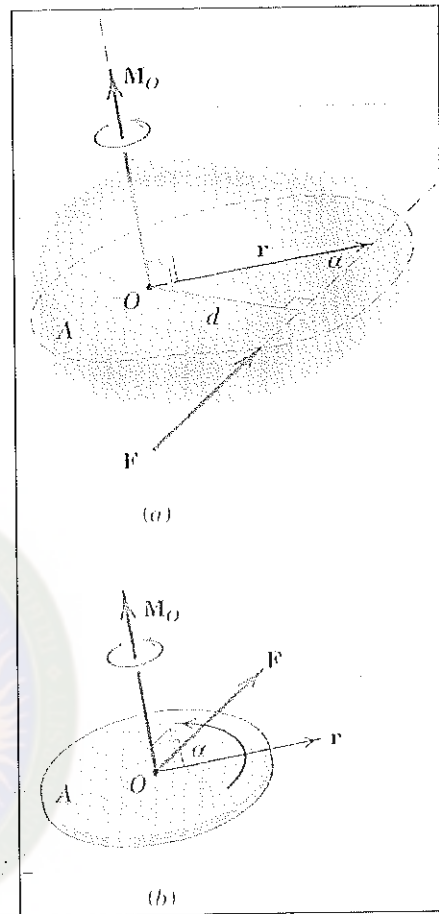
$$F_z = F \cos \theta_z, \quad \vec{F} = F \cos \theta_x \hat{i} + F \cos \theta_y \hat{j} + F \cos \theta_z \hat{k}$$

Unit vector \hat{i} , \hat{j} และ \hat{k} อยู่ในทิศทาง x , y และ z ตามลำดับ ถ้าเรากำหนด direction cosine ของ F โดย $l = \cos \theta_x$, $m = \cos \theta_y$ และ $n = \cos \theta_z$ แล้ว $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ดังนั้น

$$\vec{F} = F(l \hat{i} + m \hat{j} + n \hat{k}) \quad (2.17)$$

2.7 Moment and Couple in three Dimension

จากหัวข้อที่ผ่านมาในการหา Moment และ Couple เป็นงานที่ค่อนข้างง่ายถ้าจะหาขนาดของ moment โดยใช้กฎมือขวา เราก็สามารถหาคำตอบได้ แต่ถ้าในกรณีที่เป็น Three dimension การหาระยะทางที่ตั้งฉากระหว่างจุดหรือเส้นและการกระทำของแรงในแต่ละแกนเป็นการยากที่จะนำมาคำนวณหา moment ใน 3 มิติ เพราะฉะนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างมากที่จะนำเอาเวกเตอร์และ cross product เข้ามาช่วย



รูปที่ 2.9 โมเมนต์ใน 3 มิติโดยใช้กฎมือขวา

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

Moment

พิจารณาแรง F ที่กระทำบนวัตถุดังรูป 2.18 โดยจุด O ไม่ได้อยู่บนแนวทางการกระทำ แต่ F อยู่บนระนาบ A โมเมนต์ M_o ของ F รวมแกนที่ทะลุผ่านจุด O และตั้งฉากกับระนาบมีขนาด $M_o = Fd$ โดย d เป็นระยะทางตั้งฉากจากจุด O ถึงเส้นทางของแนวแรง F โมเมนต์นี้ถูกอ้างเสมือนหนึ่งว่าเป็นโมเมนต์ของ \vec{F} รอบจุดหมุน O เวกเตอร์ M_o จึงเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบและพุ่งผ่านจุด O โดยขนาดและทิศทางของ M_o อธิบายได้โดยใช้หลัก cross-product ใน 2 มิติ ในกรณีที่เวกเตอร์ \vec{r} ขยายจากจุด O ไปยังจุดใด ๆ บนเส้นของการกระทำ \vec{F} cross product ของ \vec{r} และ \vec{F} ถูกเขียนในรูป $\vec{r} \times \vec{F}$ โดยมีขนาดเท่ากับ $(r \sin \alpha) F$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ Fd เท่ากับขนาดของ M_o โดยทิศทางที่ถูกต้องอธิบายโดยใช้กฎมือขวา (right hand rule) ดังนั้นเวกเตอร์ \vec{r} และ \vec{F} กระทำตัวเสมือนหนึ่งเป็นเวกเตอร์อิสระจากจุด O ดังรูป 2.18 (b) และสามารถเขียนโมเมนต์ของ \vec{F} รอบแกนที่ทะลุผ่าน O ได้ดังนี้

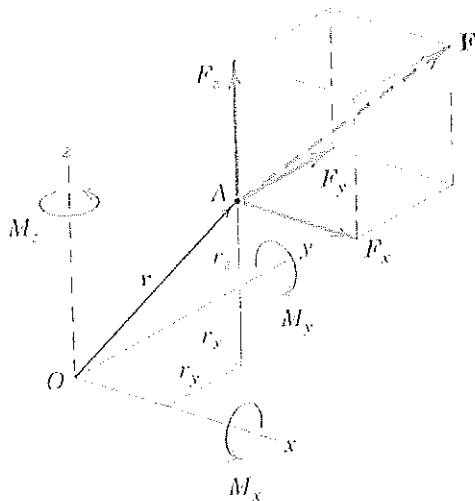
$$M_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

ข้อสังเกต $\vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r}$ ดังนั้นเวกเตอร์ในการ cross product ต้องเรียงลำดับเช่นเดียวกัน

$$\therefore M_o = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

$$\therefore M_o = (r_y F_z - r_z F_y) \hat{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \hat{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \hat{k} \quad (2.19)$$

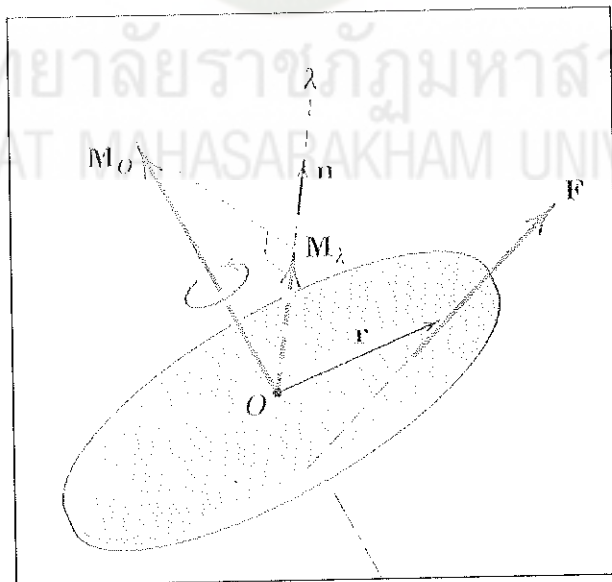
ซึ่ง $M_x = r_y F_z - r_z F_y$, $M_y = r_z F_x - r_x F_z$ และ $M_z = r_x F_y - r_y F_x$ สังเกตว่าทิศทางของ M_x , M_y และ M_z แสดงดังรูป 2.10



รูป 2.10 ทิศทางของ M_x , M_y และ M_z

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

กรณีของ Moment (M_λ) ของ F รอบแกน λ ที่ทะลุผ่านจุด O แสดงดังรูป 2.11 ถ้า \hat{n} เป็น unit vector ในทิศทางของ λ แล้วใช้ dot product สำหรับองค์ประกอบของเวกเตอร์ ดังนั้น องค์ประกอบของ M_O ในทิศทางของ λ จะมีค่าเท่ากับ $M_O \cdot \hat{n}$ ซึ่งก็คือขนาดของโมเมนต์ M_λ ของ F รอบแกน λ ซึ่งเขียนในรูปของขนาดและทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้ดังนี้



รูป 2.11 Moment (M_λ) ของ F รอบแกน λ

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

$$M_\lambda = (\vec{r} \times \vec{F} \cdot \hat{n}) \hat{n} \quad (2.20)$$

ซึ่ง $\vec{r} \times \vec{F}$ แทนด้วย M_O การแทนค่า $\vec{r} \times \vec{F} \cdot \hat{n}$ เราเรียกว่าเป็น Triple scalar product ซึ่งมันไม่ได้เขียนอยู่ในรูป $(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}$ แต่มันหมายความว่า $\vec{r} \times (\vec{F} \cdot \hat{n})$ ซึ่ง

$$\vec{r} \times (\vec{F} \cdot \hat{n}) = \vec{r} \cdot \vec{F} \times \hat{n} \quad (2.21)$$

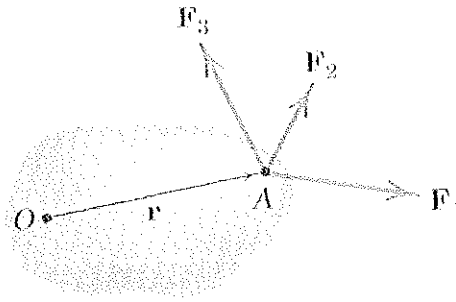
$$\therefore |\vec{M}_\lambda| = M_\lambda = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

ซึ่ง α, β, γ เป็น direction cosine ของ Unit vector \hat{n}

Varignon's Theorem

ทฤษฎีนี้สามารถง่ายที่จะเขียนอยู่ในรูป 3 มิติ เมื่อแรงกระทำ ณ จุดหรือตำแหน่งเดียวกัน ดังรูป 2.12 ดังนั้นผลรวมของโมเมนต์ร่วจุด O ของแรงเหล่านี้ถูกเขียนดังนี้

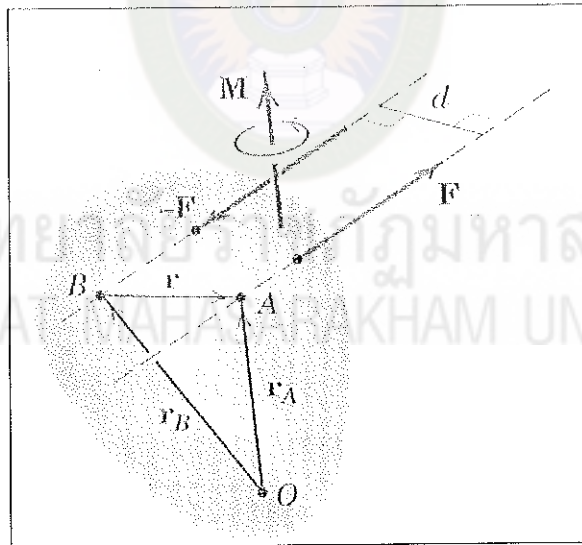
มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY



รูป 2.12 แรง 3 มิติ เมื่อแรงกระทำ ณ จุดหรือตำแหน่งเดียวกัน
ที่มา : Russell C. Hibbeler.

$$\begin{aligned}\bar{r} \times \bar{F}_1 + r \times \bar{F}_2 + r \times \bar{F}_3 + \dots &= \bar{r} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots) \\ &= \bar{r} \times \sum \bar{F}\end{aligned}\quad (2.23)$$

Couple in three dimension (แรงคู่ควบใน 3 มิติ)



รูป 2.13 แรง 2 แรงที่มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงกันข้าม
ที่มา : Russell C. Hibbeler.

Couple ของแรงคู่ควบถูกอธิบายในหัวข้อ 2.4 (2 มิติ) ดังนั้นในหัวข้อนี้เป็นการขยายความเข้าใจที่เกิดขึ้นใน 3 มิติ รูป 2.13 แสดงถึงแรง 2 แรงที่มีขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงกันข้าม \vec{F} และ $-\vec{F}$ ที่กระทำบนวัตถุเวกเตอร์ \vec{r} เชื่อมระหว่างจุด B บนแนวแรง $-\vec{F}$ ไปที่จุด A บนแนวของแรง \vec{F} จุด A และ B ถูกแสดงโดยเวกเตอร์บอกตำแหน่ง \vec{r}_A และ \vec{r}_B จากจุด O ดังนั้นผลรวมของโมเมนต์ของแรง 2 แรงรอบจุด O คือ

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} \quad (2.24)$$

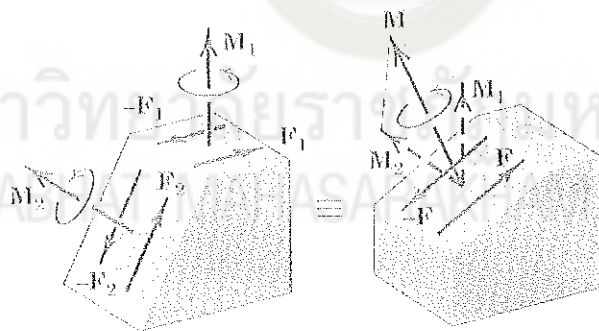
แต่ $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}$ ดังนั้นการอ้างอิงทั้งหมดที่จุดศูนย์กลางโมเมนต์ O จึงไม่ปรากฏ และโมเมนต์ของแรงคู่ควบ จะมีค่าเป็น

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.25)$$

หรือ $M = Fd$ ซึ่ง d เป็นระยะทางตั้งฉากระหว่างแนวทางของแรง 2 แรง

สังเกตว่า โมเมนต์ของแรงคู่ควบ เป็นเวกเตอร์อิสระ (free vector) ดังนั้นโมเมนต์ของแรงรอบจุดใด ๆ จึงจัดเป็นสไลด์เวกเตอร์

เวกเตอร์ของแรงคู่ควบสามารถนำมาพิจารณาตามกฎของปริมาณเวกเตอร์ดังรูป 2.23 เวกเตอร์ของแรงคู่ควบ \vec{M}_1 เกิดจากแรง \vec{F}_1 และ $-\vec{F}_1$ และเวกเตอร์ของแรงคู่ควบ \vec{M}_2 เกิดจากแรง \vec{F}_2 และ $-\vec{F}_2$ ดังนั้นผลรวมของแรง \vec{F}_1 และ $\vec{F}_2 = \vec{F}$ และ $-\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}$ ก็สามารถเกิดแรงคู่ควบ \vec{M} ซึ่งเกิดจากแรง \vec{F} และ $-\vec{F}$



รูป 2.14 เวกเตอร์ของแรงคู่

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

3. สภาพสมดุล

3.1 Introduction

วิชาทางด้านสถิตศาสตร์ (Static) หลักการโดยรวมขึ้นอยู่กับรายละเอียดในเงื่อนไขของแรง ซึ่งจำเป็นมากในการรักษาสภาพสมดุลย์ในโครงสร้าง จากบทที่ 2 เป็นเรื่องที่ศึกษาเกี่ยวกับแรง โมเมนต์ แรงคู่ควบ แต่บทนี้เป็นการหาคำตอบของปัญหาทางด้านกลศาสตร์ และรวมถึงปัญหาทางด้านต่างๆ ทางวิศวกรรมศาสตร์

เมื่อวัตถุใดๆอยู่ในสภาวะสมดุล ผลลัพธ์ของแรงทั้งหมดที่กระทำจะมีค่าเท่ากับศูนย์ รวมทั้งผลรวมของโมเมนต์ (M) มีค่าเท่ากับศูนย์ เช่นเดียวกัน เราจึงกล่าวได้ว่าวัตถุนั้นอยู่ในสภาวะสมดุลเชิงสมการ

$$\Sigma \bar{F} = \mathbf{0} \quad \text{และ} \quad \Sigma \bar{M} = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

สมการที่ (3.1) เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอต่อการหาสภาวะสมดุลในระบบ อย่างไรก็ตาม ถ้าสมการดังกล่าวข้างต้นไม่เพียงพอสมการเรขาคณิตของโครงสร้างจะต้องถูกนำมาพิจารณาประกอบ อย่างไรก็ตาม โครงสร้างทางกายภาพของวัตถุจะเป็น 3 มิติ แต่เวลาพิจารณาส่วนใหญ่อาจจะถูกพิจารณาเสมือนหนึ่งเป็นระบบ 2 มิติ เมื่อแรงที่ถูกกระทำอยู่ในระนาบใดระนาบหนึ่งหรืออาจจะถูก projection ลงบนระนาบใดระนาบหนึ่งได้ แต่ถ้าเมื่อไรที่มันไม่สามารถถูกกระทำอยู่ใน 2 มิติได้ ปัญหานั้นก็ต้องนำมาพิจารณาเป็น 3 มิติ

3.2 Mechanical System Isolation

ระบบทางกลศาสตร์ถูกนิยามเสมือนหนึ่งเป็นวัตถุชิ้นเดียว หรือกลุ่มของวัตถุ ซึ่งสามารถถูกแยกออกจากวัตถุอื่นๆ ทั้งหมด แต่ละระบบอาจจะเป็นวัตถุชิ้นเดียว หรือ การรวมของวัตถุที่ติดกัน วัตถุอาจจะเป็นวัตถุแข็งเกร็ง (rigid) หรือ ยืดหยุ่น (non-rigid) หรือระบบอาจจะถูกนิยามเป็นมวลของของเหลว หรือกาซ หรืออาจจะเป็นการรวมของของไหลกับของแข็ง อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับสมดุลของระบบ ซึ่งอาจจะประกอบด้วยวัตถุชิ้นเดียวหรือหลายชิ้นรวมกัน จึงจำเป็นต้องแยกวัตถุที่ต้องพิจารณาออกจากวัตถุชิ้นอื่นๆ แล้วนำมาเขียนเป็นโครงสร้างอิสระของวัตถุ (Free body diagram) ซึ่งค่อนข้างสำคัญและจำเป็นอย่างมากในการพิจารณาดังในรูปที่ 2.15 แสดงชนิดของการประยุกต์ของแรงบนระบบใน 2 มิติ จากกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน แรงกิริยามีขนาดเท่ากับแรงปฏิกิริยาแต่ทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้นทิศทางของแรงปฏิกิริยาจะปรากฏบนผิวสัมผัสและมีทิศทางตั้งฉากกับผิววัตถุ

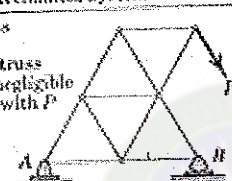
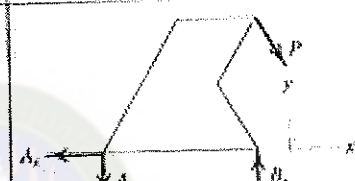
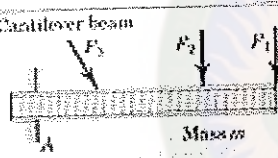
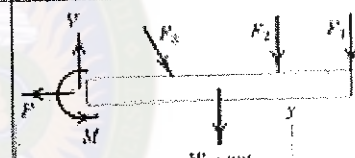
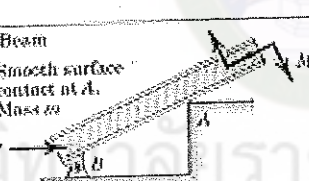
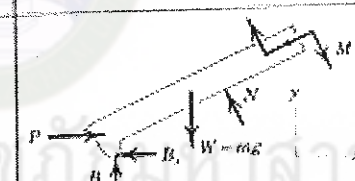
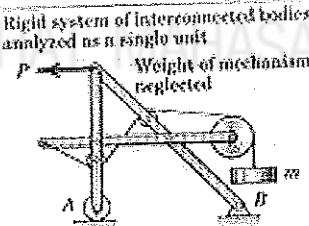
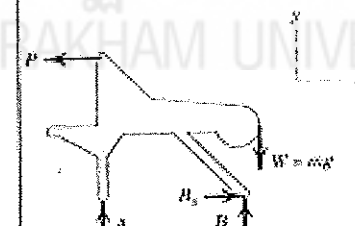
MODELING THE ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS	
Type of Contact and Force Origin	Action on Body to be Isolated
<p>1. Flexible cable, belt, chain, or rope</p> <p>Weight of cable negligible</p> <p>Weight of cable not negligible</p>	<p>Force exerted by a flexible cable is always a tension away from the body in the direction of the cable.</p>
<p>2. Smooth surfaces</p>	<p>Contact force is compressive and is normal to the surface.</p>
<p>3. Rough surfaces</p>	<p>Rough surfaces are capable of supporting a tangential component F (frictional force) as well as a normal component N of the resultant contact force R.</p>
<p>4. Roller support</p>	<p>Roller, rocker, or ball support transmits a compressive force normal to the supporting surface.</p>
<p>5. Freely sliding guide</p>	<p>Collar or slider free to move along smooth guides; can support force normal to guide only.</p>

รูปที่ 2.15 ชนิดของการประยุกต์ของแรงบนระบบใน 2 มิติ

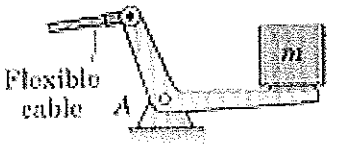
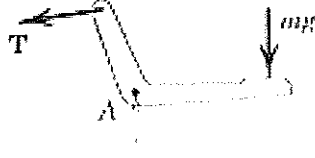
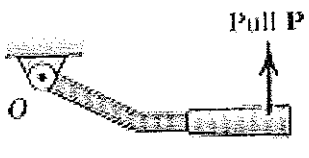
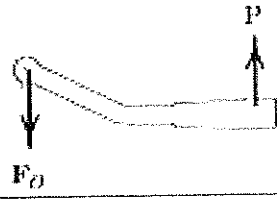
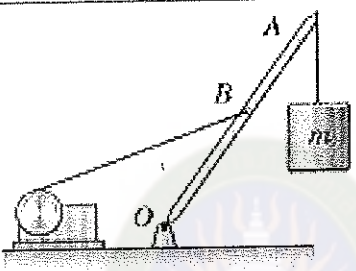
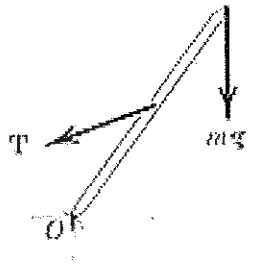
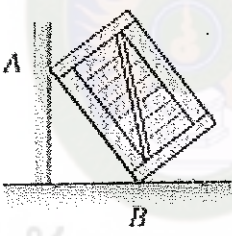
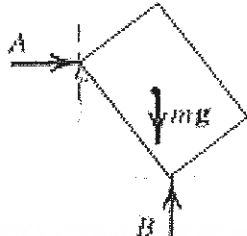
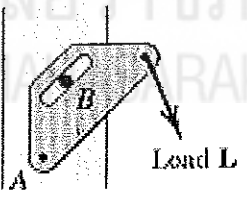

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

รูปที่ 2.16 แสดงตัวอย่างโครงสร้างอิสระทางกลศาสตร์ที่ถูกต้อง โดยแต่ละกรณีระบบทั้งหมดถูกกระทำเสมือนหนึ่งเป็นวัตถุชิ้นเดียว ดังนั้นแรงภายในจะไม่ถูกนำมาแสดง เช่น ตัวอย่างที่ 1 โครงถัก (truss) ถูกประกอบด้วยโครงสร้างหลายอันต่อเข้าด้วยกัน ดังนั้นเราอาจจะนำเอาโครงสร้างถักภายในออกจากตัวสนับสนุน (supporting foundation) และกระทำมันเสมือนหนึ่งเป็นวัตถุเกร็งชิ้นเดียว (single rigid body) รวมทั้งแรงภายนอก P แรงปฏิกิริยาบนโครงสร้าง A และ B สังเกตว่าแรงกระทำกับฐานรับแบบลูกกลิ้ง เป็นแรงกดในแนวตั้งฉากกับผิวของฐานรับ (แรงปฏิกิริยาในแนวตั้งเท่านั้น) ตัวอย่างที่ 2 เป็น

cantilever beam ถูกยึดติดกับผนังและมีแรงภายนอกกระทำ 3 แรง เมื่อเราพิจารณาส่วนประกอบของ beam ทางด้านขวาของ section A เราต้องรวมแรงปฏิกิริยาที่กระทำที่ beam บนกำแพงด้วย รวมทั้งน้ำหนัก แรงเฉือนในแนวตั้ง V ที่มีทิศทางขึ้น และแรงดึง F ที่ทำให้เกิดการสมมูลย์ในระบบ ตัวอย่างที่ 3 น้ำหนัก $w = mg$ ถูกกระทำทะลุผ่านจุดศูนย์กลางมวลของ beam และแรงปฏิกิริยาที่กระทำ ณ จุด A ของ beam โดยมีทิศทางตั้งฉากกับผิวของ beam ถ้าผิวสัมผัสที่จุด A ไม่เรียบ องค์ประกอบของแรงเสียดทานในแนวสัมผัสจะต้องนำมาพิจารณารวมทั้งแรง P และแรงคู่ควมของ M นอกจากนั้นต้องมีแรงที่จุดเชื่อม B ตัวอย่างที่ 4 โครงสร้างอิสระของระบบจะถูกแยกออกมาและพิจารณาในโครงสร้างด้วย load mg และ แรง P แรงที่ Pin B และ แรงปฏิกิริยา A

SAMPLE FREE-BODY DIAGRAMS	
Mechanical System	Free-Body Diagram of Isolated Body
<p>1. Plane truss</p> <p>Weight of truss assumed negligible compared with P</p> 	
<p>2. Cantilever beam</p> 	
<p>3. Beam</p> <p>Smooth surface contact at A.</p> <p>Mass m</p> 	
<p>4. Rigid system of interconnected bodies analyzed as a single unit</p> <p>Weight of mechanism neglected</p> 	

รูปที่ 2.16 ตัวอย่าง โครงสร้างอิสระทางกลศาสตร์ที่ถูกต้อง
ที่มา : Russell C. Hibbeler.

	Body	Incomplete FBD
1. Bell crank supporting mass m with pin support at A .		
2. Control lever applying torque to shaft at O .		
3. Boom OA , of negligible mass compared with mass m . Boom hinged at O and supported by hoisting cable at B .		
4. Uniform crate of mass m leaning against smooth vertical wall and supported on a rough horizontal surface.		
5. Loaded bracket supported by pin connection at A and fixed pin in smooth slot at B .		

รูปที่ 2.17 สมดุลย์แบบต่างๆ ในระบบ 2 มิติ
ที่มา : Russell C. Hibbeler.

3.3 Equilibrium Conditions (2D)



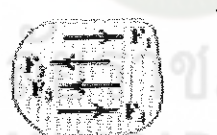
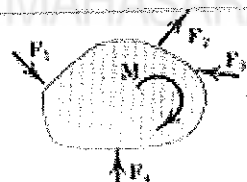
เรานิยามสภาพสมดุลย์โดยมีเงื่อนไขว่า ผลรวมของแรงลัพธ์ที่กระทำบนวัตถุมีค่าเท่ากับศูนย์ และ โมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำบนวัตถุเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนเป็นสมการสมดุลย์ในรูปสเกลาร์ ดังนี้

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M_o = 0 \tag{2.27}$$

สมการ (3.2) เป็นสิ่งจำเป็นและมีเงื่อนไขเพียงพอสำหรับสภาพสมดุลย์ใน 2 มิติ รูปที่ 2.17 แสดงสมดุลย์แบบต่างๆ ในระบบ 2 มิติ ซึ่งได้แก่ ระบบแรงที่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน แรงตัดกันที่จุดจุด

หนึ่ง แรงขนานกันและแรงอื่นๆ สมการที่สัมพันธ์กับแรงและความเร่งสำหรับกรณีที่เป็นวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid Body) สมการเหล่านี้จะแสดงความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุว่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงลัพธ์ (ΣF) ที่กระทำบนวัตถุนั้นๆ ดังนั้นถ้าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ (ความเร่งเท่ากับศูนย์) ผลลัพธ์ที่กระทำบนวัตถุต้องมีค่าเท่ากับศูนย์เช่นเดียวกันและวัตถุนั้นอาจจะถูกแสดงเสมือนหนึ่งว่าอยู่ในสภาวะสมดุล

สำหรับสภาพสมดุลที่สมบูรณ์ใน 2D แล้วสมการทั้ง 3 ใน (3.2) ต้องเท่ากับศูนย์เสมอ แต่ก็มีบางกรณีที่เป็นข้อยกเว้น เช่น วัตถุที่สไลด์ไปตามผิวแนวระดับ ด้วยความเร็วที่เพิ่มขึ้นภายใต้การกระทำของแรง สมการสภาพสมดุลของแรงจะสอดคล้องในแนวตั้ง คือ ($\Sigma F_y = 0$) ที่มีความเร่งเป็นศูนย์ แต่จะไม่สอดคล้องในแนวระดับ หรือในกรณีที่วัตถุหมุนรอบจุดศูนย์กลางมวลด้วยอัตราเร็วเชิงมุมที่เพิ่มขึ้นก็จะไม่อยู่ในสมดุลของการหมุน แต่สมการสมดุลของแรง 2 แรงจะสอดคล้อง

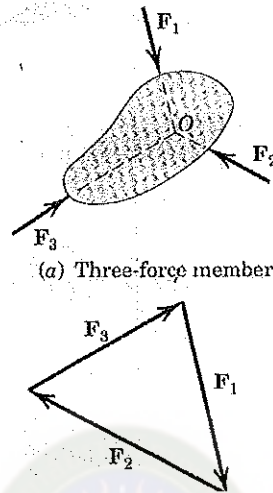
CATEGORIES OF EQUILIBRIUM IN TWO DIMENSIONS		
Force System	Free-Body Diagram	Independent Equations
1. Collinear		$\Sigma F_x = 0$
2. Concurrent at a point		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
3. Parallel		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_y = 0$

รูปที่ 2.18 ทิศทางตรงกันข้ามและอยู่ในแนวเดียวกัน

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

สภาพสมดุลที่พบกันบ่อยๆ แบ่งออกเป็น 2 ชนิด 1) สภาวะสมดุลภายใต้การกระทำของแรง 2 แรงเท่านั้น สังเกตว่าวัตถุจะรับแรง 2 แรง โดยมีขนาดเท่ากัน ทิศทางตรงกันข้ามและอยู่ในแนวเดียวกัน โดยไม่คำนึงถึงรูปร่างและน้ำหนักของวัตถุ ดังรูป 2.18 2) สภาวะสมดุลภายใต้การกระทำของแรง 3 แรง จาก รูป 2.19 (a) สังเกตว่าแรงทั้ง 3 จะตัดกันที่จุดๆ หนึ่ง (concurrent) ซึ่งทำให้ผลรวม

ของแรงลัพธ์ทั้ง 3 มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังรูป 2.19 (b) แต่ถ้ามีแรงหนึ่งแรงใดไม่ตัดกันกับจุดตัดจะทำให้วัตถุเกิดโมเมนต์ (การหมุน) รอบจุดตัด



รูปที่ 2.19 สภาวะสมดุลภายใต้การกระทำของแรง 3 แรง
ที่มา : Russell C. Hibbeler.

3.4 Equilibrium Condition (3D)

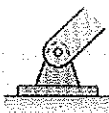
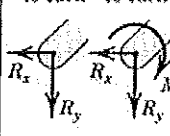
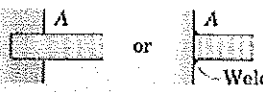
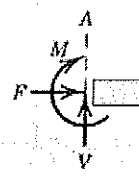
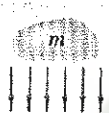

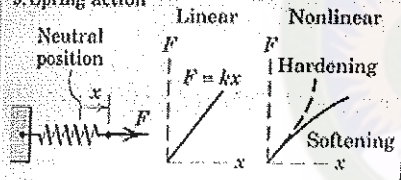

โดยหลักการพิจารณา เงื่อนไขของสภาพสมดุลใน 3 D จะเหมือนกับ 2D เพียงแต่วัตถุภายใต้เงื่อนไขดังกล่าวจะมีองค์ประกอบของแรงในแนวแกน Z และโมเมนต์ของแรงรอบจุดหมุนในแนวแกน Z เท่ากับศูนย์ เช่นเดียวกับ

$$\therefore \sum \vec{F} = 0, \quad \sum \vec{M} = 0$$

และเขียนอยู่ในรูปองค์ประกอบของแรงดังนี้

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

MODELING THE ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS (cont.)	
Type of Contact and Force Origin	Action on Body to be Isolated
<p>6. Pin connection</p> 	<p>Pin free to turn Pin not free to turn</p>  <p>A freely hinged pin connection is capable of supporting a force in any direction in the plane normal to the axis; usually shown as two components R_x and R_y. A pin not free to turn may also support a couple M.</p>
<p>7. Built-in or fixed support</p> 	 <p>A built-in or fixed support is capable of supporting an axial force F, a transverse force V (shear force), and a couple M (bending moment) to prevent rotation.</p>
<p>8. Gravitational attraction</p> 	 <p>The resultant of gravitational attraction on all elements of a body of mass m is the weight $W = mg$ and acts toward the center of the earth through the center mass G.</p>
<p>9. Spring action</p> <p>Neutral position Linear Nonlinear</p> 	 <p>Spring force is tensile if spring is stretched and compressive if compressed. For a linearly elastic spring the stiffness k is the force required to deform the spring a unit distance.</p>

รูปที่ 2.20 แสดงแรงปฏิกิริยาที่จุดหมุนและจุดเชื่อมต่อในระบบ 3 มิติ
ที่มา : Russell C. Hibbelér.

4. การวิเคราะห์โครงสร้าง

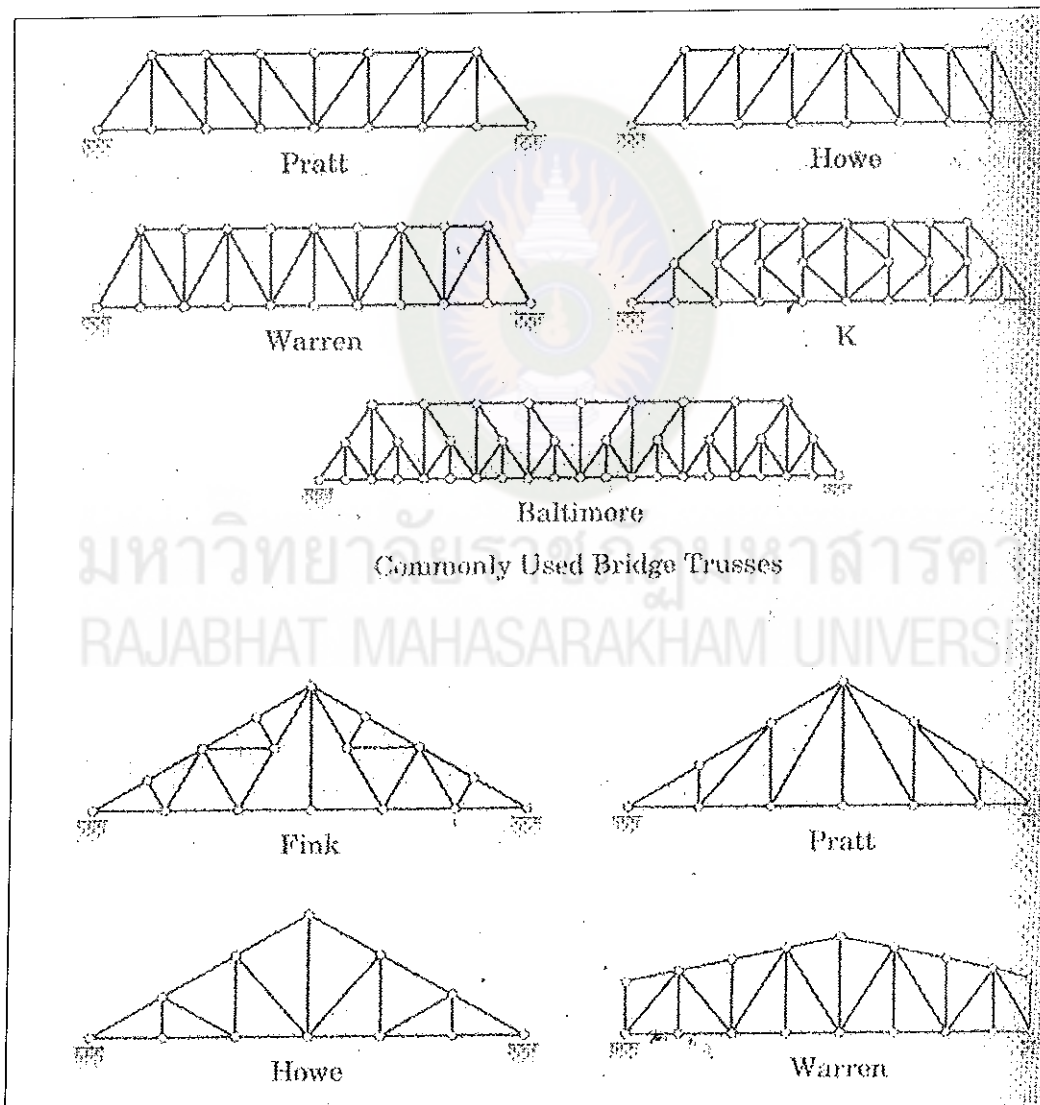
4.1 Introduction

จากบทที่ 3 เราเห็นสภาพสมดุลของวัตถุแข็งเกร็งชนิดเดียว (Single rigid Body) หรือระบบระบบเดียวที่มีโครงสร้างต่อกัน ในปัญหาที่แล้วสิ่งแรกคือเราต้องเขียน free body diagram ของวัตถุแข็งเกร็งชนิดเดียวก่อนจากนั้นแสดงแรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำบนโครงสร้าง ต่อจากนั้นเรานำสมการสมดุลของแรงและโมเมนต์แก้ปัญหาดังกล่าว ในบทที่ 4 จุดประสงค์โดยตรงของเราอยู่ที่การหาแรงภายใน (internal forces) ของโครงสร้าง นั่นคือ แรงของการกระทำ และแรงปฏิกิริยาระหว่างโครงสร้างที่เชื่อมต่อกัน โครงสร้างที่ถูกสร้างปกติจะมีฐานรองรับ เพื่อกระจายแรงให้โครงสร้างนั้นปลอดภัยในการรับน้ำหนัก ดังนั้นในการวิเคราะห์โครงสร้างจึงมีความจำเป็นอย่างมากที่จะขกเว้นไม่พิจารณาจุดเชื่อมต่อของโครงสร้างใดโครงสร้างหนึ่งไม่ได้ ดังนั้นต้องพิจารณาจุดเชื่อมต่อทั้งหมดในโครงสร้าง และวิเคราะห์ Free body diagram แยกในแต่ละโครงสร้างออกมา เพื่อที่จะหาแรงภายในของโครงสร้าง การวิเคราะห์เราต้องใช้ กฎข้อที่ 3 ของนิวตันซึ่งจะมีขนาดของแรงเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้ามเข้ามาแก้ปัญหา

บทนี้วิเคราะห์ แรงภายในที่กระทำต่อชนิดของโครงสร้างหลายชนิด เช่น โครงสร้างถัก (trusses) กรอบ(frames) และเครื่องจักร (machines) เป็นต้น ในการพิจารณาครั้งนี้จะพิจารณาโครงสร้างที่หยุดนิ่ง และมีฐานรองรับรวมทั้งความจำเป็นของสภาพสมดุล ดังนั้นสมการของสมดุลต้องเพียงพอที่จะหาแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด

4.2 Plane Trusses

องค์ประกอบของโครงสร้างที่เชื่อมต่อกันที่ด้านปลายของโครงสร้างวัตถุแข็งเกร็ง ถูกเรียกว่า Trusses ซึ่งจะเป็นพวกสะพาน หลังคา และโครงสร้างอื่น ๆ ที่รูปร่างที่ถูกยึดติดกันจะเป็นพวก I-beam แท่งโลหะซึ่งถูกเชื่อมต่อด้วย rivet หรือนอต หรือหมุด เป็นต้น โครงสร้างของ plane trusses ดังแสดงรูป 2.21



รูปที่ 2.21 โครงสร้างของ plane trusses

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

ชนิดของโครงสร้างในระนาบ

โครงสร้างที่สามารถคำนวณได้จากสมการสมดุล โดย $\sum \bar{F} = 0$ และ $\sum \bar{M} = 0$ และถ้าพิจารณาตัวโครงสร้างดังรูป 4.1 ได้มีการนิยามความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนของสมาชิกในโครงสร้าง และจำนวนของจุดเชื่อมที่จำเป็นสำหรับสถานะเสถียรภายในโดยปราศจากความฟุ่มเฟือยในการใช้สมาชิกของโครงสร้าง เราสามารถกำหนดสถานะสมดุลของแต่ละจุดเชื่อม โดยใช้สมการของแรงซึ่งมีสมการ $m+3=2j$ สำหรับโครงสร้างในระนาบที่มีจุดเชื่อมต่อเท่ากับ j สำหรับกรณีของโครงสร้างทั้งหมดประกอบด้วยสมาชิกที่มีอยู่ในโครงสร้างจำนวน m ชิ้น และแรงปฏิกิริยาที่มีตัวไม่ทราบค่า 3 ค่า ดังนั้นโครงสร้างถ้อย่างง่ายที่ประกอบไปด้วยชิ้นส่วนจะมีค่าเท่ากับ

$$m+3 = 2j \tag{2.28}$$

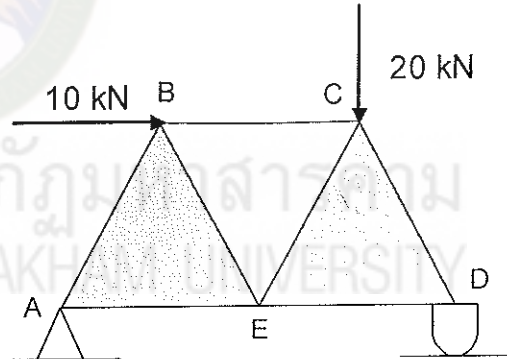
- m แทนด้วยจำนวนชิ้นส่วนทั้งหมดที่อยู่บนโครงสร้าง
- 3 แทนด้วย จำนวนสูงสุดของตัวไม่ทราบค่า ที่จุดรองรับของโครงสร้าง
- j จำนวนจุดยึดทั้งหมดบนโครงสร้าง

เช่น โครงสร้าง ดังรูปที่ 4.2 จะสอดคล้องกับสมการ (3.1) ดังนี้

- m แทนด้วยจำนวนชิ้นส่วนทั้งหมดบนโครงสร้าง เท่ากับ 7
- 3 แทนจำนวนตัวที่ไม่ทราบค่าที่จุดรองรับ (A_x, A_y และ D_y)
- j จำนวนจุดเชื่อมต่อทั้งหมดเท่ากับ 5

$$\therefore m + 3 = 2j$$

$$7 + 3 = 2(5) = 10$$



รูปที่ 2.22 โครงสร้างตัวอย่าง

ที่มา : Russell C. Hibbeler.

ความสัมพันธ์ ดังกล่าวข้างต้น เป็นเงื่อนไขที่จำเป็น สำหรับวัตถุที่หยุดนิ่งอยู่กับที่ (Stable) แต่มันอาจจะไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข ถ้าจำนวนชิ้นบนโครงสร้าง (m) มีมากหรือน้อยกว่าจุดเชื่อมต่อ j ดังนั้น

ถ้า $m + 3 > 2j$ แสดงว่า ชิ้นส่วนบนโครงสร้างมีมากเกินไปจนเกิดความจำเป็น (redundant)

สำหรับสภาพสมดุลบนโครงสร้าง

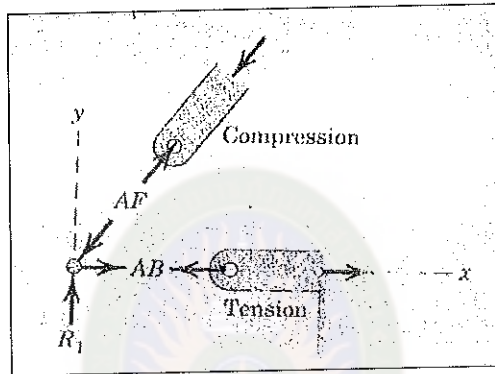
ถ้า $m + 3 < 2j$ แสดงว่า ชิ้นส่วนบนโครงสร้างมีไม่เพียงพอต่อสภาพสมดุลบน

โครงสร้าง เพราะฉะนั้น จะมีผลโดยตรงต่อการยุบตัวของโครงสร้าง

วิธีการคำนวณโครงสร้างในระนาบโดยใช้สมการสมดุลย์

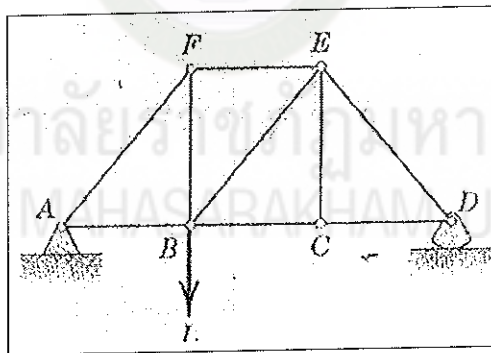
4.3 Method of joints (วิธีการคำนวณแบบจุดเชื่อมต่อ)

วิธีนี้หลักการ คือ คำนวณหาแรงในชิ้นส่วนของโครงสร้าง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของสภาพสมดุลย์ ซึ่งแรงนั้นกระทำบนจุดเชื่อมต่อของแต่ละชิ้นในโครงสร้าง ดังรูป 2.23 ซึ่งสมการสมดุลย์ของหมุดเชื่อมต่อแต่ละชิ้น สามารถคำนวณโดยใช้ $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ รูปที่ 2.24 แสดงโครงสร้างระนาบของสะพานและใช้หลักแบบจุดเชื่อมต่อ พิจารณาที่โครงสร้างรูปที่ 2.25 ($\sum \vec{F} = 0$) จะได้แต่ละจุดที่แสดงเวกเตอร์ของแรงดังรูป 2.23



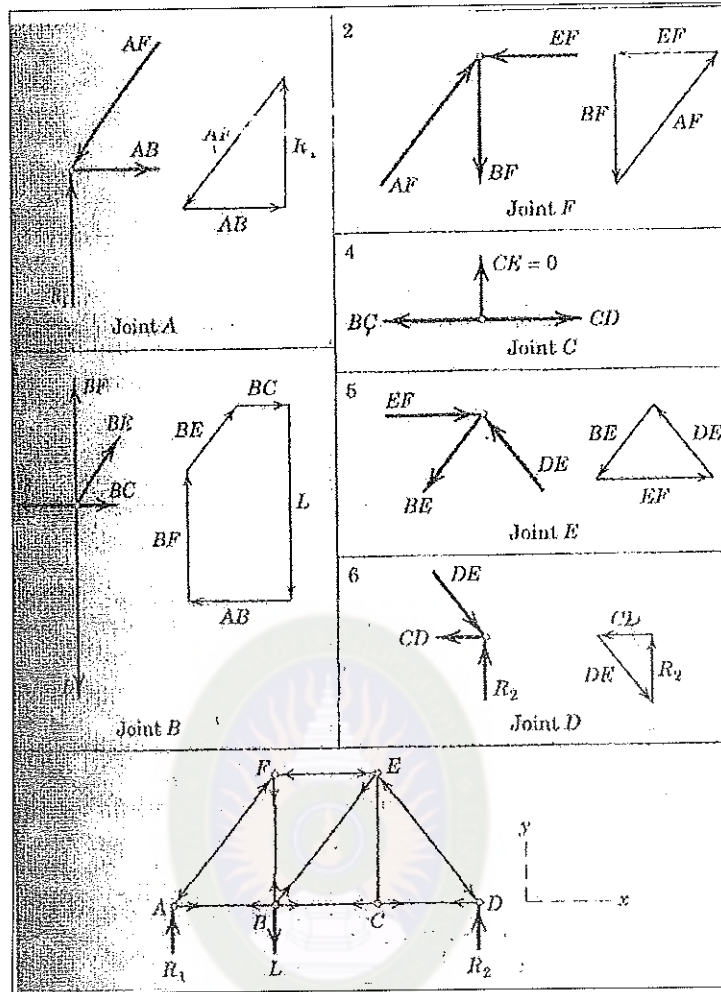
รูปที่ 2.23 แรงกระทำบนจุดเชื่อมต่อของแต่ละชิ้นในโครงสร้าง

ที่มา : Russell C. Hibbeler



รูปที่ 2.24 แสดงโครงสร้างระนาบของสะพานและใช้หลักแบบจุดเชื่อมต่อ

ที่มา : Russell C. Hibbeler



รูปที่ 2.25 เวกเตอร์ของแรงแต่ละจุด

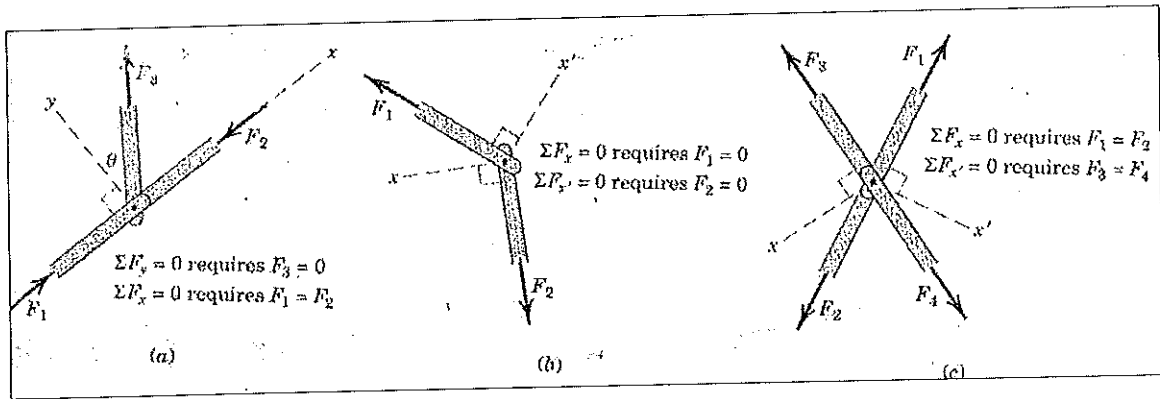
ที่มา : Russell C. Hibbeler

วิธีคิดโดยใช้หลักการเชื่อมต่อ

1. ณ ตำแหน่งหมุดที่นำมาคิดจะต้องมีตัวไม่ทราบค่า (unknown) ไม่เกิน 2 ตัว และต้องมีตัวทราบค่าอย่างน้อย 1 ตัว เพราะสมการของสมดุลมีเพียง $\sum \bar{F}_x = 0$ และ $\sum \bar{F}_y = 0$ เท่านั้น
2. แรงแต่ละชิ้นส่วนที่กระทำต่อหมุด ต้องมีทิศทางเดียวกับชิ้นส่วนนั้น ๆ โดย แรงที่มีทิศทางพุ่งเข้าหาหมุดเราเรียกว่า แรงกด (Compressive force) และแรงที่มีทิศทางพุ่งออกจากหมุด เราเรียกว่า แรงดึง (Tension force)

กรณีพิเศษ ที่ค่อนข้างพบบ่อย โดยมี 2 ชิ้นส่วนอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังรูป 2.26 (a)

$$\sum \bar{F}_x = 0 \therefore F_1 = F_2 \quad \text{และ} \quad \sum \bar{F}_y = 0 \quad \therefore F_3 = 0$$



รูปที่ 2.26 ชิ้นส่วนอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

ที่มา : Russell C. Hibbeler

↑ จุดเชื่อมต่อที่ประกอบด้วย 2 ชิ้นส่วน ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังรูป 2.26 (b)

$$\sum F_x = 0 \quad \therefore F_1 = 0$$

$$\sum F_x' = 0 \quad \therefore F_2 = 0$$

→ ถ้าจุดเชื่อมต่อประกอบด้วย 4 ชิ้นส่วน โดยชิ้นส่วนแต่ละคู่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันดังรูป

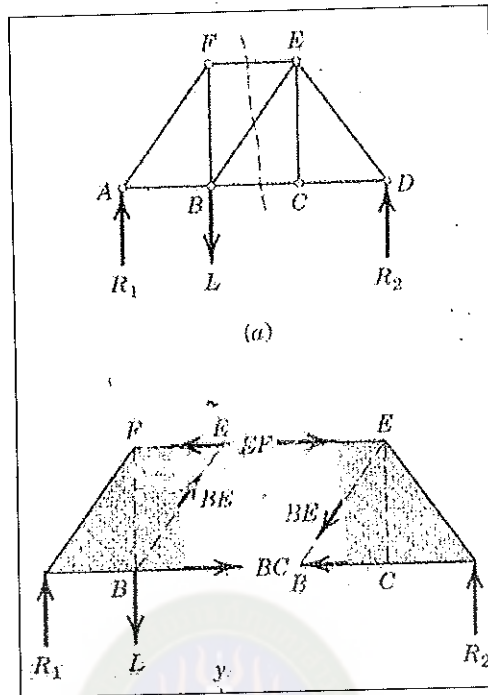
2.26 (c)

$$\sum F_x = 0 \quad \therefore F_1 = F_2$$

$$\sum F_x' = 0 \quad \therefore F_3 = F_4$$

4.4 Method of Sections (วิธีพิจารณาส่วนตัด)

จากการวิเคราะห์โครงสร้างของระนาบโดยพิจารณาจุดเชื่อมต่อ (Method of joints) พบว่าเราใช้สมการสมดุลเพียง 2 ใน 3 สมการสมดุลเท่านั้น ($\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$) ในขั้นตอนวิธีการหาแรงในแต่ละจุดของโครงสร้าง ดังนั้นวิธีการพิจารณาจากส่วนตัด จะนำสมการโมเมนต์ ($\sum M = 0$) เข้ามาช่วยพิจารณา เพื่อให้การแก้ปัญหาในโครงสร้างระนาบง่ายขึ้น รูป 4.7 (a) แสดงโครงสร้างที่ถูกตัด และแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนโครงสร้าง



รูปที่ 2.27 โครงสร้างที่ถูกตัด และแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนโครงสร้าง

ที่มา : Russell C. Hibbeler

วิธีคิดโดยพิจารณาจากการตัดโครงสร้าง

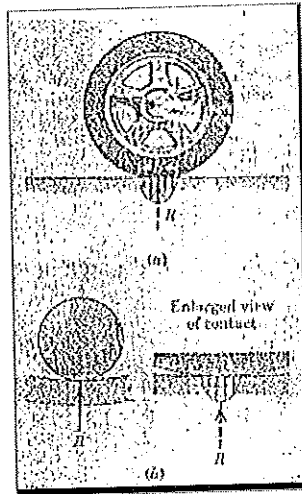
1. ตัวไม่ทราบค่า ต้องไม่เกิน 3 ตัว เท่านั้น เพราะมีเพียง 3 สมการ และต้องมีตัวที่ทราบค่าอย่างน้อย 1 ตัว

2. แรงของแต่ละชิ้นส่วนบน โครงสร้างที่ถูกตัดให้เขียนที่ด้านนอกในแนวเดียวกับชิ้นส่วน ซึ่งอาจจะมีแรงกดหรือแรงดึง ขึ้นอยู่กับโครงสร้างนั้น ดังรูป 2.27 (b)

5. ความเสียดทาน

5.1 Introduction

ในบทเรียนที่ผ่านมาแรงทั้งหมดที่เราพิจารณายู่ในรูป "Concentrated load" ซึ่งเป็นการกระทำเฉพาะจุดและมีทิศทางของแรงตามแนวเส้นตรงที่กระทำ ซึ่งในความเป็นจริงแล้ว Concentrated load ไม่ได้เป็นการกระทำเฉพาะจุดจริงอย่างที่ว่าแต่มันเปรียบเสมือนเป็นแรงภายนอกที่กระทำไปที่วัตถุใด ๆ แล้วมีการกระจายของแรงไปในพื้นที่สัมผัส แต่อย่างไรก็ตามพื้นที่ของการกระจายของแรงค่อนข้างเล็ก เช่น แรงปฏิกิริยาที่กระทำบนล้อรถยนต์ ดังรูป 2.28 (a) เราพบว่าแรงจะมีการกระจายหัวพื้นที่ผิวสัมผัสทั้งหมด ยิ่งถ้ายางรถยนต์ที่มีลมค่อนข้างอ่อน ดังรูป 2.28 (b)



รูปที่ 2.28 การกระจายของแรงไปในพื้นที่สัมผัส

ที่มา : Russell C. Hibbeler

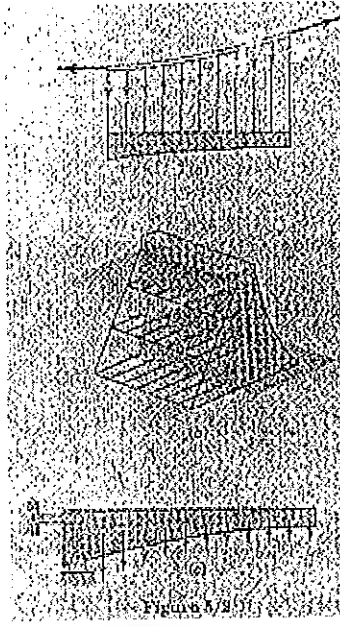
แต่สิ่งที่น่าสนใจอีกอันหนึ่งและสำคัญคือ การหาการกระจายของแรงภายใน (internal forces) ในวัสดุของวัตถุที่บริเวณใกล้เคียงกับตำแหน่งของหน้าสัมผัส ซึ่งมันจะเกิดความเค้นและความเครียดภายใน (internal stresses and strains) ชนิดของปัญหาที่ว่านี้ต้องการความรู้เกี่ยวกับคุณสมบัติของวัสดุและระบบกลไกของวัสดุ รวมทั้งทฤษฎีของความยืดหยุ่น (elasticity) ปกติแล้วมี 3 หัวข้อใหญ่ๆที่ต้องนำมาพิจารณาในการกระจายของแรง

Line distribution

เมื่อแรงถูกกระจายไปตามเส้นตรงเปรียบเสมือนแรงที่กระทำในแนวตั้ง โดยทำให้ สายเคเบิลยืดออก ดังรูป 2.28 (a) โดยความเข้ม (w) ของแรงถูกแทนด้วยแรงต่อหน่วยความยาวของเส้นตรง มีหน่วยเป็น (N/m)

Area Distribution เมื่อแรงถูกกระจายเหนือพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่งจะเปรียบเสมือนความดันของน้ำที่ถูกดัน โดยพื้นที่หน้าตัดภายในของเขื่อน ดังรูป 2.28 (b) ความเค้นถูกแทนด้วย แรงต่อหน่วยพื้นที่ ซึ่งหมายถึงความดัน (pressure) มีหน่วยเป็น N/m^2 หรือ Pascal (Pa)

Volume Distribution เป็นแรงที่ถูกกระจายเหนือปริมาตรทั้งหมดของวัตถุ ซึ่งเราเรียกว่า Body forces ซึ่งปกติที่เรารู้จักกันคือ แรงโน้มถ่วงซึ่งความเข้มของแรงโน้มถ่วงจะเป็นน้ำหนักเฉพาะ (ρg) โดย ρ แทนด้วยความหนาแน่น (มวลต่อหน่วยปริมาตร) และ g เป็นความเร่งของแรงโน้มถ่วงมีหน่วยเป็น N/m^3



รูปที่ 2.29 แรงที่กระทำในแนวตั้ง
ที่มา : Russell C. Hibbeler

5.2 Center of Mass

จุดศูนย์กลางมวล (Center of mass, G) หรือจุดศูนย์กลางความโน้มถ่วง (Center of gravity) หมายถึงจุดศูนย์กลางรวมของแรงดึงดูด หรือน้ำหนัก ของโลกที่กระทำต่อวัตถุ

จุดเซนทรอยด์ (Centroid, C) คือจุดศูนย์กลางของรูปทรงใด ๆ

ในกรณีที่วัตถุมีความหนาแน่นมวล ρ เท่ากันในทุก ๆ ส่วนของวัตถุ จุดศูนย์กลางมวลและจุดเซนทรอยด์จะเป็นจุดเดียวกัน

วิธีการหาค่าตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุใด ๆ เราจะใช้หลัก Principle of moment โดย moment ของแรงโน้มถ่วงลัพธ์ (W) ที่หมุนรอบแกนใด ๆ จะมีค่าเท่ากับ ผลรวมของโมเมนต์รอบแกนที่เหมือนกันของอนุภาคภายในวัตถุนั้น (dw) ผลรวมของแรงโน้มถ่วงบนอนุภาคทั้งหมด จะมีค่าเท่ากับน้ำหนักของวัตถุนั้น ๆ ซึ่งค่าเท่ากับ $W = \int dw$



รูปที่ 2.30 ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุใด ๆ
ที่มา : Russell C. Hibbeler

ดังนั้นถ้าเรา apply หลักของโมเมนต์รอบแกน y ค่าของ element weight จะมีค่าเท่ากับ $x dw$ และผลรวมของโมเมนต์เหล่านี้ทั้งหมดของวัตถุจะมีค่าเท่ากับ $\int x dw$ หรือเท่ากับ $\bar{x} W$ ทำให้เราสามารถหาค่าแห่งของจุดศูนย์กลางโน้มถ่วง (G) มีค่าเท่ากับ

$$\bar{x} = \frac{\int x dw}{w} \quad \bar{y} = \frac{\int y dw}{w} \quad \bar{z} = \frac{\int z dw}{w} \quad (2.29)$$

แต่ $W = mg$ และ $dW = g dm$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{m} \quad (2.30)$$

ถ้าเขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์ฟอร์ม ดังรูป 5.3 ซึ่งจุดศูนย์กลางมวล G ถูกบอกตำแหน่งโดยเทียบกับเวกเตอร์ $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ และ $\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\hat{i} + \bar{y}\hat{j} + \bar{z}\hat{k}$ ดังนั้นสมการ 2.30 จะถูกเขียนใหม่ในรูป

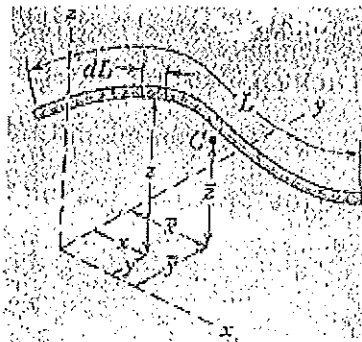
$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int r dm}{m} \quad (2.31)$$

ในที่นี้เราจะกล่าวถึงเฉพาะวัตถุที่มีความหนาแน่นมวล ρ เท่ากันในทุก ๆ ส่วนของวัตถุ ดังนั้นจุดเซนทรอยด์ของรูปทรงต่าง ๆ สามารถหาค่าได้ดังนี้

1) กรณีที่เป็นเส้น (Line)

$$\begin{aligned} dm &= \rho A dL \\ \therefore m &= \rho A \int dL = \rho AL \\ \therefore \bar{x} &= \frac{\int x dL}{L}, \bar{y} = \frac{\int y dL}{L}, \bar{z} = \frac{\int z dL}{L} \end{aligned} \quad (2.32)$$

โดย $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ แทนตำแหน่งของจุดเซนทรอยด์ของเส้น ความยาว L



รูปที่ 2.31 กรณีที่เป็นเส้น (Line)

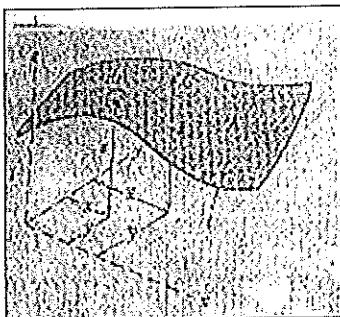
ที่มา : Russell C. Hibbeler

2) กรณีที่เป็นพื้นที่ (Areas)

$$dm = \rho t dA, \quad m = \rho t \int dA = \rho t A$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dA}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A} \quad (5.5)$$

โดย $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ แทนตำแหน่งของจุด Centroid ของ พื้นที่ A



รูปที่ 2.32 กรณีที่เป็นพื้นที่ (Areas)

ที่มา : Russell C. Hibbeler

3) กรณีที่เป็นปริมาตร (Volumes)

$$dm = \rho dv, \quad m = \rho \int dv = \rho v$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dv}{v}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dv}{v}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dv}{v}$$

โดย $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ แทนตำแหน่งของจุด centroid ของปริมาตร V

4) Choices of element for integration

วิธีการเลือกส่วนย่อย ๆ เพื่อนำมาคำนวณหา Centroid position มีดังนี้

4.1 Order of element (อันดับของส่วนย่อย) ควรเลือกใช้ส่วนย่อยที่มีอนุพันธ์น้อยที่สุดเพราะจะทำให้ง่ายต่อการคำนวณ หรืออินทิเกรต การหาค่า เช่น รูป 5.4(a) element มีค่า $dA = \ell dy$ เป็นอนุพันธ์อันดับ 1 แต่ถ้าเป็นรูป 5.4(b) element มีค่า $dA = dx dy$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่สอง ทำให้ยากต่อการ integration รูปที่ 5.5(a) element มีค่า $dv = \pi r^2 dy$ เป็นอนุพันธ์อันดับ 1 แต่ถ้าเป็นรูป 5.5(b) element มีค่า $dv = dx dy dz$ เป็นอนุพันธ์อันดับ 3 ทำให้ยากต่อการ integration

4.2 Continuity (มีความต่อเนื่องใน element) หมายถึง การ integration ต้องครอบคลุมพื้นที่ทั้งหมด เช่น รูป 5.6(a) element dA เป็นแกนในแนวนอน โดย $dA = \ell dy$ เมื่อ integrate ด้วยค่า limit ของ y จะครอบคลุมพื้นที่ทั้งหมดได้ ส่วนรูป 5.6 (b) element dA แทนด้วยแกนในแนวตั้ง โดย $dA = y dx$ แต่ค่า x มี limit ตั้งแต่ σ ถึง $x = x_1$ เท่านั้น ซึ่งไม่ครอบคลุมพื้นที่ทั้งหมด

4.3 Discarding higher-order terms (ไม่พิจารณาเทอมที่สูงกว่า) เช่นรูป 2.23 พื้นที่ของ element $dA = ydx + \frac{1}{2} dx dy$ เทอมที่เป็นอนุพันธ์อันดับที่ 2 จะไม่ถูกนำมาพิจารณาเพราะค่ามีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้น $dA = ydx$ เท่านั้น

4.4 Choices of Coordinates (เลือก coordinate ให้เหมาะสม) เช่นรูป 2.23(a) สมการเส้นโค้งที่กำหนดให้คือ $x = ky^2$ (xy coordinate) ส่วนรูป 2.23 (b) สมการเส้นโค้ง คือ $x = r\theta$ ($r - \theta$ coordinate)

6. งานเสมือน

6.1 Introduction

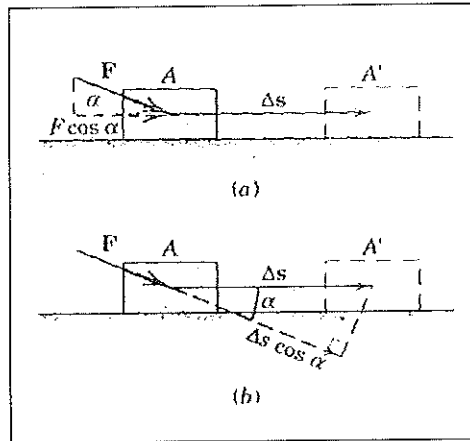
ในบทที่แล้วเราได้ทำการวิเคราะห์สภาพสมดุลของวัตถุ โดยเขียนให้อยู่ในรูป free body diagram และใช้สมการ $\Sigma \vec{F}$ และ $\Sigma \vec{M} = 0$ และเราหาค่าแรงภายนอก หรือตัวแบ่งไม่ทราบค่าได้จากสมการข้างต้น นอกจากนั้นวิธีการหาค่าดังกล่าวยังสามารถหาค่าโดยวิธีของงาน (work) เข้ามาช่วย หรือเรียกว่า method of virtual work (งานเสมือน)

6.2 Work (งาน)

6.2.1 งานเนื่องจากแรง (Work of a force) พิจารณาแรงคงที่ \vec{F} ที่กระทำบนวัตถุดังรูป 6.1 (a) ซึ่งเคลื่อนที่ไปตามระนาบจากจุด A ถึง A' โดยแทนในรูปของเวกเตอร์ ΔS เราเรียกว่า การขจัด (displacement) ของวัตถุ โดยนิยามแล้วงาน (W) ที่ทำโดยแรง \vec{F} ต้องมีทิศทางเดียวกับการขจัด ดังนี้

$$W = (F \cos \alpha) \Delta S \quad (2.33)$$

$$\text{หรือ } W = F (\Delta S \cos \alpha) \quad (2.34)$$

รูปที่ 2.33 แรงคงที่ \vec{F} ที่กระทำบนวัตถุ

ที่มา : Russell C. Hibbeler

ผลลัพธ์ที่ได้จากทั้ง 2 สมการ จะมีค่าเท่ากันโดยงาน (W) จะเป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งเขียนใหม่เป็น

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} \quad (2.35)$$

รูป 2.33 (a) แสดงถึงแรง \vec{F} หนึ่งกระทำบนวัตถุใด ๆ ที่จุด A ซึ่งทำให้วัตถุนั้น ๆ เคลื่อนที่ไปตามเส้นทางจากจุด A_1 ถึง A_2 โดยจุด A ถูกแสดงตำแหน่งด้วย เวกเตอร์บอกตำแหน่ง \vec{r} ซึ่งวัดจากจุด origin O และการขจัดน้อยมากในการเคลื่อนที่จาก A ไปยัง A' โดยมีค่าการเปลี่ยนแปลงเท่ากับ $d\vec{r}$ ดังนั้น งานที่ทำโดยแรง \vec{F} ระหว่างการขจัด $d\vec{r}$ จึงถูกนิยามด้วย

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.36)$$

หรือ

$$dW = F ds \cos \alpha$$

ซึ่งแสดงดังรูป 2.33 (b) โดยองค์ประกอบของแรงจะอยู่ในทิศทางเดียวกับการขจัด

ถ้าเราแทน \vec{F} และ $d\vec{r}$ ในเทอมขององค์ประกอบแบบ rectangular เราจะได้

$$\begin{aligned} dW &= (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

ดังนั้นถ้าระยะของการเคลื่อนที่จากจุด A_1 ถึง A_2 ค่าพลังงานทั้งหมดมีค่า

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (2.37)$$

$$\text{หรือ} \quad W = \int F \cos \alpha ds \quad (2.38)$$

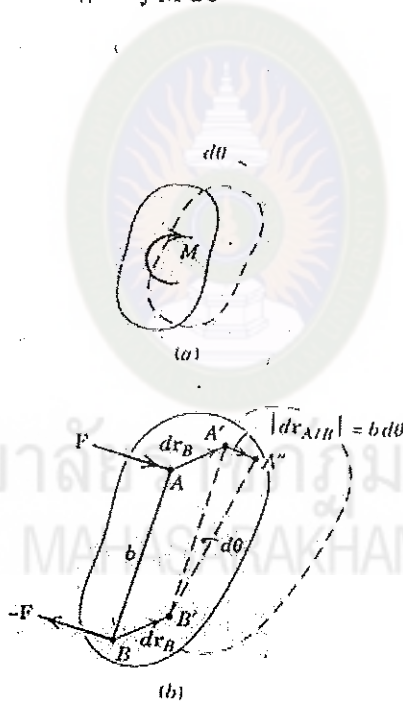
6.2.2 งานที่เกิดจากแรงคู่ควบ (Work of a Couple)

นอกจากงานที่เกิดจากแรงแล้ว ยังมีงานที่เกิดจากแรงคู่ควบ (Couple) รูป 2.25 (a) แสดงถึงแรงคู่ควบ M ที่กระทำบนวัตถุ ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมมีค่าเท่ากับ $d\theta$ งานที่ทำโดยแรงคู่ควบจะหาได้จากการรวมกันของงานซึ่งเกิดจากแรง 2 แรงซึ่งเป็นตัวทำให้เกิดแรงคู่ควบจากรูป 2.25 (b) เราแทนแรงคู่ควบซึ่งเกิดจากแรง 2 แรงซึ่งมีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้าม ด้วย \vec{F} และ $-\vec{F}$ ซึ่งกระทำที่จุด A และจุด B ดังนั้น $\vec{F} = \frac{\vec{M}}{b}$ หรือ $\vec{M} = \vec{F} b$ ดังนั้น งานที่มีค่า

$$dW = M d\theta \quad (2.39)$$

ดังนั้น งานทั้งหมดของแรงคู่ควบมีค่าเท่ากับ

$$W = \int M d\theta \quad (2.40)$$



รูปที่ 2.34 งานที่เกิดจากแรงคู่ควบ

ที่มา : Russell C. Hibbeler

6.2.3 งานเสมือน (Virtual Work)

เราพิจารณาอนุภาคหนึ่งๆซึ่งอยู่ในตำแหน่งสมดุล โดยหาค่าจากแรงซึ่งกระทำบนอนุภาคนั้นๆ โดยสมมติว่าการขจัดน้อยๆ δr อยู่ห่างจากตำแหน่งตามธรรมชาติและคงที่ด้วยเงื่อนไขของระบบที่เรียกว่า การขจัดเสมือน (virtual displacement) ดังนั้นคำว่าเสมือน (virtual) จึงถูกนำมาใช้เพื่อที่จะชี้ว่าการขจัดไม่ได้มีอยู่จริง แต่ถูกสมมติขึ้นโดยเปรียบเทียบกับตำแหน่งสมดุล ดังนั้น งานที่ทำโดยแรง F บนอนุภาคระหว่างการขจัดเสมือน δr จึงถูกเรียกว่า งานเสมือน (virtual work) มีค่าเป็น

$$\delta W = \bar{F} \cdot \delta \bar{r} \quad \text{หรือ} \quad \delta W = F \delta S \cos \alpha$$

โดย α เป็นมุมระหว่าง \bar{F} และ $\delta \bar{r}$ และ δS เป็นขนาดของ $\delta \bar{r}$

ความแตกต่างระหว่าง $\delta \bar{r}$ และ $d\bar{r}$ หมายถึงการเปลี่ยนแปลงน้อย ๆ ในการเคลื่อนที่จริง และสามารถหาการขจัดได้โดยการ integration แต่ $\delta \bar{r}$ หมายถึง การเสมือนในช่วงสั้น ๆ หรือการเคลื่อนที่สมมติ และไม่สามารถ integrate ได้

นอกจากนั้น การขจัดเสมือนอาจจะหมายถึงการหมุนของวัตถุ $\delta \theta$ ดังนั้นงานที่ทำโดยแรงคู่ควมมีค่าเท่ากับ

$$\delta W = \bar{M} \delta \theta$$

6.3 สภาพสมดุล (Equilibrium)

เราสามารถแทนเงื่อนไขของสภาพสมดุลในเทอมของงานเสมือนในรูปของอนุภาค วัตถุแข็งเกร็ง และระบบที่เชื่อมต่อกับวัตถุแข็งเกร็ง ดังนี้

(a) อนุภาค

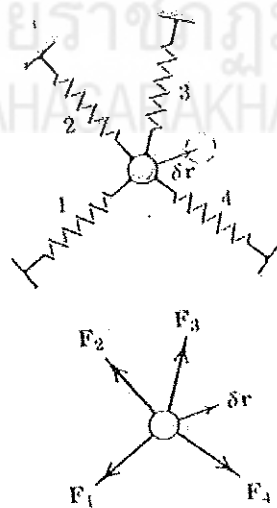
$$\delta W = \bar{F}_1 \cdot \delta \bar{r} + \bar{F}_2 \cdot \delta \bar{r} + \bar{F}_3 \cdot \delta \bar{r} + \dots = \sum F \delta r$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ} \quad \delta W &= \sum \bar{F} \cdot \delta \bar{r} = \left(\hat{i} \sum F_x + \hat{j} \sum F_y + \hat{k} \sum F_z \right) \cdot \left(\hat{i} \delta x + \hat{j} \delta y + \hat{k} \delta z \right) \\ &= \sum F_x \delta x + \sum F_y \delta y + \sum F_z \delta z \end{aligned}$$

(b) วัตถุแข็งเกร็ง ผลรวมของระบบมีค่าเท่ากับศูนย์

(c) ระบบที่เชื่อมต่อกับวัตถุแข็งเกร็ง

$$\delta W = 0$$



รูปที่ 2.35 ระบบที่เชื่อมต่อกับวัตถุแข็งเกร็ง

ที่มา : Russell C. Hibbeler

ซึ่งหมายความว่างานเสมือนที่กระทำโดยแรงภายนอกบนระบบที่สมดุลจะมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยหลักการของงานเสมือนสำหรับสภาวะสมดุลจะไม่ใช้กับวัตถุเพียงอันเดียว แต่จะใช้กับระบบวัตถุที่มีวัตถุหลาย ๆ อันเชื่อมต่อกัน โดยแรงที่ทำให้เกิดงานเสมือนจะเป็นแรงประเภทแรงกระทำเท่านั้น ส่วนแรงปฏิกิริยาและแรงภายในจะไม่ทำให้เกิดงานเสมือน

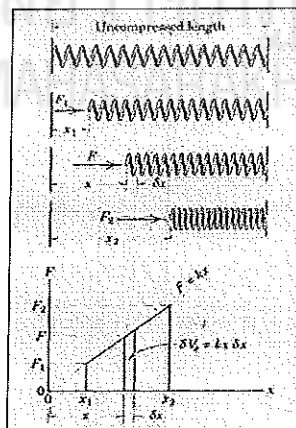
6.4 Potential energy and Stability

กรณีที่ระบบที่มีชิ้นส่วนสามารถยืดหดได้ งานที่กระทำต่อชิ้นส่วนที่ยืดหดได้จะถูกเก็บไว้ในชิ้นส่วนประกอบในรูปของพลังงานศักย์เนื่องจากการยืดและหดตัว ถ้าชิ้นส่วนที่ยืดหดได้นั้นอยู่ในรูปของสปริง และแรงที่กระทำต่อสปริงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะยืดและหดเท่ากับ x โดยที่ $\vec{F} = k\vec{x}$ ดังนั้นพลังงานศักย์ของสปริงมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} W_e &= \int_0^x \vec{F} dx = \int_0^x kx dx \\ &= \frac{1}{2} kx^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

ขณะที่มีการยืดและหดตัวของสปริงจาก x_1 ถึง x_2 งานที่ทำ โดยสปริงมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์ยืดหยุ่น ดังรูป (2.27)

$$\Delta W_e = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) \quad (2.42)$$



รูปที่ 2.36 ชิ้นส่วนสามารถยืดหดได้

ที่มา : Russell C. Hibbeler

ในขณะที่เกิดการขจัดเสถียรของสปริง δx งานเสมือนบนสปริงจะมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์ยืดหยุ่น

$$\delta W_e = F \delta x = kx \delta x \quad (2.43)$$

กรณีที่มีการอัดของสปริง แล้วปล่อยจาก x_2 ไป x_1 การเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์ของสปริงจะมีค่าติดลบ ทำให้ δx มีค่าเป็นลบ รวมทั้ง δW_e ก็มีค่าติดลบ เช่นเดียวกัน

จากรูป (2.27) งานเสมือนเนื่องจากน้ำหนักเป็นการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์เนื่องจากตำแหน่ง (δW_g) โดยพลังงานศักย์เนื่องจากตำแหน่ง (W_g) มีค่าเท่ากับ

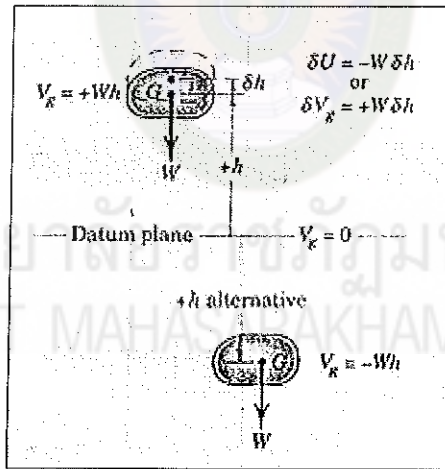
$$W_g = mgh \quad (2.44)$$

การเปลี่ยนแปลงเสมือนของพลังงานศักย์เนื่องจากตำแหน่งจะมีค่าเป็น

$$\delta W_g = mg \delta h \quad (2.45)$$

δh เป็นการเปลี่ยนตำแหน่งเสมือนในแนวตั้งของจุดศูนย์กลางมวล ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงเสมือนของสถานะสมดุลย์ มีค่าเท่ากับ

$$\delta U = \delta W_e + \delta W_g = \delta v \quad (2.46)$$



รูปที่ 2.37 ตำแหน่งเสมือนของสถานะสมดุล

ที่มา : Russell C. Hibbeler

การพิจารณาดำเนินการสมดุลย์และความมั่นคงในระบบ (Stability)

ถ้าไม่มีแรงใด ๆ มากระทบกับระบบ ยกเว้นแรงเนื่องจากน้ำหนัก สมการของงานเสมือนในสมการที่ (2.37) จะเขียนได้เป็น

$$\delta v = 0 \quad (2.47)$$

และถ้าพิจารณาในรูปของตัวแปรที่กำหนดตำแหน่ง (x) ดังนั้น

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad (2.48)$$

ซึ่งแสดงว่า ถ้า $\frac{d^2V}{dx^2} > 0$ ตำแหน่งจะมีความมั่นคง

ถ้า $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$ ตำแหน่งสมดุลงจะไม่มั่นคง

และ $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$ สมดุลจะเป็นกลาง

ดังรูปที่ (2.37) แสดงความมั่นคงในระบบ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เรือตรี สุรศักดิ์ ราเลิศ (2553 : บทคัดย่อ) การพัฒนาทักษะการใช้เส้นมาตรฐานในการเขียนแบบ โดยใช้แบบฝึกการเขียนเส้นมาตรฐานในการเขียนแบบ สำหรับ นรจ. ชั้นปีที่ 1 ห้อง 1.7, 1.8, พรรคกลิน, ห้อง 1.16, 1.17, 1.18 พรรคพิเศษ, (ยช.อล).(ยช.ฟ.ฟ.) จากการวิจัยพบว่า ผลการทำกิจกรรมเสริมโดยการอธิบายเพิ่มเติม นอกเวลาเรียนสำหรับ นรจ. ชั้นปีที่ 1 กล.,ยช.อล และ ยช.ฟ.ฟ. พบว่าเป็นกิจกรรมที่เหมาะสมสำหรับ นรจ. กลุ่มดังกล่าวในการพัฒนาเพิ่มเติมการเรียนรู้ การใช้เส้นมาตรฐานในการเขียนแบบมากขึ้น โดยกิจกรรมประกอบด้วย 1.) ครูอธิบายเพิ่มเติมและสาธิตการใช้เส้นมาตรฐานในการเขียนแบบ 2.) ให้ นรจ. ที่เข้าร่วมกิจกรรมตอบคำถามในแบบทดสอบที่เตรียมมาผลคะแนนการตอบคำถาม หลังจากอธิบายเพิ่มเติม จำนวน 1 ครั้ง ผ่านเกณฑ์โดยมีคะแนนเฉลี่ยร้อยละ 8 คะแนนพัฒนาการโดยรวม ร้อยละ 65.999 คะแนน พัฒนาการสูงสุด 80 และคะแนน พัฒนาการต่ำสุด ร้อยละ 50 โดยผ่านเกณฑ์การประเมินทุกนัยคิดเป็นร้อยละ 100

กฤษณะ (2551 : บทคัดย่อ) การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดีย ชุดระบบนิเวศ สำหรับนิสิตปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์มาตรฐาน และศึกษาผลการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียที่พัฒนาขึ้น ผลการวิจัยสรุปได้ว่า 1) บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียชุด ระบบนิเวศ ที่พัฒนาขึ้นมีคุณภาพทั้งในด้านเนื้อหาและด้านเทคโนโลยีการศึกษาจากการประเมินของผู้เชี่ยวชาญอยู่ในระดับดี และมีประสิทธิภาพ 91.08/93.33 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์มาตรฐาน 2) ผลการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดีย พบว่า ผู้เรียนที่เรียนจากบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียที่พัฒนาขึ้นมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนถึงร้อยละ 90.00 ของผู้เรียนทั้งหมด

จารุเนตร ทนงสุข. (2549: บทคัดย่อ) การวิจัยนี้เป็นการพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดีย เรื่อง หน่วยของสิ่งมีชีวิตและการดำรงชีวิตของพืช กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาวิทยาศาสตร์ สำหรับนักเรียนช่วงชั้นที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่กำลังศึกษาอยู่ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2549 จำนวน 48 คน ของโรงเรียนพรตพิทยพยัตจ.กรุงเทพมหานคร ซึ่งได้มาโดยวิธีการสุ่มแบบหลายขั้นตอน ผลการวิจัย

ครั้งได้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดีย เรื่อง หน่วยของสิ่งมีชีวิตและการดำรงชีวิตของพืช กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ มีคุณภาพเนื้อหาและด้านเทคโนโลยีการศึกษาอยู่ในระดับดี และมีประสิทธิภาพ 94.41/92.89

เทอร์เนอร์ (Turner. 1983 : 1750-A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติของครูฝึกสอน โดยใช้หนังสือเรียนโปรแกรมกับคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการสอนวิธีการอ่าน ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แต่ในด้านเจตคติพบว่า กลุ่มตัวอย่างเรียนจากคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีเจตคติที่ดีต่อการสอนวิธีการอ่านมากกว่ากลุ่มที่เรียนโดยหนังสือบทเรียนโปรแกรมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ



มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY