

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ความผิดพลาดทางการแก้โจทย์ปัญหา เรื่องอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนร่องคำ จังหวัดกาฬสินธุ์ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องโดยขอเสนอตามลำดับหัวข้อดังต่อไปนี้

1. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

3. แบบฝึกหัด

4. โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

5. ความผิดพลาดทางการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

6. การวิเคราะห์ความผิดพลาดทางการแก้โจทย์ปัญหา

7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

7.1 งานวิจัยภายในประเทศ

7.2 งานวิจัยต่างประเทศ

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มุ่งให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง ตามศักยภาพ โดยกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคนเป็น 6 สาระ โดยกำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ตามสาระต่าง ๆ เป็นดังนี้

สาระที่ 1: จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1: เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2: เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่าง การดำเนินการต่าง ๆ และสามารถใช้ในการดำเนินการในการแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.3: ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.4: เข้าใจในระบบจำนวนและสามารถนำสมบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้ได้

สาระที่ 2: การวัด

มาตรฐาน ค 2.1: เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด

มาตรฐาน ค 2.2: วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัดได้

มาตรฐาน ค 2.3: แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้

สาระที่ 3: เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1: อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2: ใช้การนึกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

สาระที่ 4: พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1: อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2: ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระที่ 5: การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1: เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูลได้

มาตรฐาน ค 5.2: ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้
อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐาน ค 5.3: ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหาได้

สาระที่ 6: ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1: มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2: มีความสามารถในการให้เหตุผล

มาตรฐาน ค 6.3: มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

มาตรฐาน ค 6.4: มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

มาตรฐาน ค 6.5: มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

คุณภาพผู้เรียนเมื่อจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริง มีความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วน สัดส่วน ร้อยละ เลขยกกำลัง ที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง สามารถคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เศษส่วน ทศนิยม เลขยกกำลัง รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนไปใช้ในชีวิตจริงได้
2. สามารถนึกภาพและอธิบายลักษณะของรูปเรขาคณิตสามมิติจากภาพสองมิติ มีความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตร สามารถเลือกใช้หน่วยการวัดในระบบต่าง ๆ เกี่ยวกับความยาว พื้นที่ และปริมาตรได้อย่างเหมาะสม พร้อมทั้งสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในชีวิตจริงได้
3. มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีพีทาโกรัสและบทกลับ และสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้
4. มีความเข้าใจเบื้องต้นเกี่ยวกับการแปลง (Transformation) ทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation) และนำไปใช้ได้
5. สามารถวิเคราะห์แบบรูป สถานการณ์หรือปัญหา และสามารถใช้สมการ อสมการ กราฟ หรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ในการแก้ปัญหาได้
6. มีความเข้าใจเกี่ยวกับค่ากลางของข้อมูลในเรื่องค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม และเลือกใช้ได้อย่างเหมาะสม สามารถกำหนดประเด็น เขียนข้อคำถาม กำหนดวิธีการศึกษา และเก็บรวบรวมข้อมูลที่เหมาะสมได้ สามารถนำเสนอข้อมูลรวมทั้งอ่านแปลความหมาย และวิเคราะห์ข้อมูลจากการนำเสนอข้อมูลต่าง ๆ สามารถใช้ความรู้ในการพิจารณาข้อมูลข่าวสารทางสถิติ ตลอดจนเข้าใจถึงความคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดขึ้นได้จากการนำเสนอข้อมูลทางสถิติ
7. มีความเข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็น
8. ของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดคะเนและประกอบการตัดสินใจในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
9. มีความเข้าใจเกี่ยวกับการประมาณค่าและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

10. มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็น สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลายและใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสม สามารถให้เหตุผล สื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำเสนอ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ

คำอธิบายรายวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ศึกษา ฟังก์ชัน/กระบวนการในสาระต่อไปนี้ พืชคณิต อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและการนำไปใช้ การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น การเก็บรวบรวมข้อมูล ค่ากลางของข้อมูลและการนำไปใช้ การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูลจากการนำเสนอ การทดลองสุ่มและเหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ การใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ การใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นประกอบการตัดสินใจ

โดยจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องให้ผู้เรียน ได้ศึกษาค้นคว้าโดยการปฏิบัติจริง ทดลอง สรุปรายงาน เพื่อพัฒนาทักษะ/กระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิดทักษะกระบวนการ ที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบระเบียบมีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

ตารางที่ 1 ตารางวิเคราะห์เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2

| สาระ | มาตรฐาน | ตัวชี้วัด | สาระการเรียนรู้ |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| สาระที่ 4 พีชคณิต | มาตรฐาน ค.4.2 ใช้ นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟและตัวแบบเชิง คณิตศาสตร์อื่น ๆ แทน สถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมาย และนำไปใช้แก้ปัญหา | ใช้ความรู้เกี่ยวกับอสมการเชิง เส้นตัวแปรเดียวในการ แก้ปัญหาพร้อมทั้งตระหนัก ถึงความสมเหตุสมผลของ คำตอบ | อสมการเชิงเส้น ตัวแปรเดียวและ การนำไปใช้ |

| สาระ | มาตรฐาน | ตัวชี้วัด | สาระการเรียนรู้ |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| สาระที่ 5 การวิเคราะห์ ข้อมูลและ ความน่าจะเป็น | มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจ และใช้ข้อมูลทางสถิติใน การวิเคราะห์ข้อมูล | 1. กำหนดประเด็น และเขียน ข้อคำถามเกี่ยวกับปัญหาหรือ สถานการณ์ต่าง ๆ รวมทั้ง กำหนดวิธีการศึกษาและการ เก็บรวบรวมข้อมูลที่ เหมาะสม | การเก็บรวบรวม ข้อมูล |
| | | 2. หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และ ฐานนิยมของ ข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจง ความถี่และเลือกใช้ได้อย่าง เหมาะสม | ค่ากลางของข้อมูล และการนำไปใช้ |
| | | 3. นำเสนอข้อมูลในรูปแบบ ที่เหมาะสม | การนำเสนอ ข้อมูล |
| | | 4. อ่าน แปลความหมาย และวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จาก การนำเสนอ | การวิเคราะห์ ข้อมูลจากการ นำเสนอ |
| | มาตรฐาน ค 5.2 ใช้ วิธีการทางสถิติและ ความรู้เกี่ยวกับความ น่าจะเป็นในการ คาดการณ์ได้อย่าง สมเหตุสมผล | หาความน่าจะเป็นของ เหตุการณ์จากการทดลองสุ่ม ที่ผลแต่ละตัวจากการทดลองมี โอกาสเกิดขึ้นเท่าๆ กัน และ ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็น ในการคาดการณ์ได้อย่าง สมเหตุสมผล | 1. การทดลอง สุ่มและเหตุการณ์ 2. ความน่าจะเป็น ของเหตุการณ์ 3. การใช้ความรู้ เกี่ยวกับความ น่าจะเป็นในการ คาดการณ์ |

| สาระ | มาตรฐาน | ตัวชี้วัด | สาระการเรียนรู้ |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| สาระที่ 5 การวิเคราะห์ ข้อมูลและ ความน่าจะเป็น | มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ ความรู้เกี่ยวกับสถิติและ ความน่าจะเป็นช่วยใน การตัดสินใจและ แก้ปัญหา | 1. ในสถานการณ์ต่างๆ 2. อภิปรายถึงความ คลาดเคลื่อน ที่อาจเกิดขึ้นได้ จากการนำเสนอ ข้อมูลทาง สถิติ | ใช้ความรู้เกี่ยวกับ สถิติและความ น่าจะเป็น ประกอบการ ตัดสินใจ |
| สาระที่ 6 ทักษะ กระบวนการ ทาง คณิตศาสตร์ | มาตรฐาน ค 6.1 มี ความสามารถในการ แก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อ ความหมายทาง คณิตศาสตร์ การนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยง คณิตศาสตร์กับศาสตร์ อื่น ๆ และมีความคิด ริเริ่มสร้างสรรค์ | 1. ใช้วิธีการที่หลากหลาย แก้ปัญหา 2. ใช้ความรู้ ทักษะ/ กระบวนการทาง คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ในการแก้ปัญหาใน สถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่าง เหมาะสม 3. แสดงเหตุผลโดยการ อ้างอิงความรู้ ข้อมูลหรือ ข้อเท็จจริง หรือสร้าง แผนภาพ 4. ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ในการ สื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ ได้อย่าง ถูกต้อง | - - - - |

| สาระ | มาตรฐาน | ตัวชี้วัด | สาระการเรียนรู้ |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| สาระที่ 6 ทักษะ กระบวนการ ทาง คณิตศาสตร์ | มาตรฐาน ค 6.1 มี ความสามารถในการ แก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อ ความหมายทาง คณิตศาสตร์ การนำเสนอ คณิตศาสตร์ | 5. ใช้ความรู้ ทักษะ/ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการ แก้ปัญหาในสถานการณ์ ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม คณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับ ศาสตร์อื่น ๆ | - |
| | การเชื่อมโยงความรู้ ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยง คณิตศาสตร์กับศาสตร์ อื่น ๆ และมีความคิด ริเริ่มสร้างสรรค์ | 6. มีความคิดริเริ่ม สร้างสรรค์ | - |

ตารางที่ 2 ตารางวิเคราะห์เนื้อหารายวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

| สาระ | มาตรฐาน | ตัวชี้วัด | สาระการเรียนรู้ |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| สาระที่ 4 พีชคณิต | มาตรฐาน ค 4.2 ใช้ นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟและตัว แบบเชิงคณิตศาสตร์อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมาย และนำไปใช้แก้ปัญหา | ใช้ความรู้เกี่ยวกับอสมการเชิง เส้นตัวแปรเดียวในการ แก้ปัญหาพร้อมทั้งตระหนัก ถึงความสมเหตุสมผลของ คำตอบ | อสมการเชิงเส้น ตัวแปรเดียวและ การนำไปใช้ |

ตารางที่ 3 กำหนดการสอน เรื่องอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

| หน่วยการเรียนรู้ที่ | ชื่อหน่วยการเรียนรู้ | จำนวน ชั่วโมง | หมายเหตุ |
|---------------------|-------------------------------------------------------|---------------|----------|
| 5 | อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว | 8 | |
| | 1. คำตอบและกราฟ แสดงคำตอบของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว | 2 | |
| | 2. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว | 3 | |
| | 3. การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว | 3 | |

สรุปหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ได้กำหนดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้เป็นเกณฑ์ในการกำหนดคุณภาพของผู้เรียนเมื่อจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน ซึ่งกำหนดไว้เฉพาะส่วนที่จำเป็นสำหรับพื้นฐานในการดำรงชีวิตให้มีคุณภาพ สำหรับสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ตามความสามารถ ความถนัด และความสนใจของผู้เรียนสถานศึกษาสามารถเพิ่มเติมได้ สำหรับสาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ประกอบด้วย สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ สาระที่ 2 การวัด สาระที่ 3 เรขาคณิต สาระที่ 4 พีชคณิต สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น สาระที่ 6 ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ สำหรับเรื่องอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เป็นเนื้อหาหนึ่งในสาระที่ 4 พีชคณิต กำหนดให้เรียน 8 ชั่วโมง ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหา คำตอบและกราฟ แสดงคำตอบของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวแปรหนึ่งตัวแปรและกล่าวถึงการไม่เท่ากัน โดยใช้เครื่องหมาย ไม่เท่ากับ มากกว่า ($>$) น้อยกว่า ($<$) น้อยกว่าหรือเท่ากับ (\leq) มากกว่าหรือเท่ากับ (\geq) การแก้สมการนั้นแก้แบบปกติเหมือนกับการแก้สมการแต่ต่างกันที่หากคูณกับจำนวนติดลบแล้วต้องเปลี่ยนเครื่องหมายมากกว่า ($>$) น้อยกว่า ($<$) ให้เป็นตรงกันข้าม อสมการจะเป็น จริง หรือ เท็จ ขึ้นอยู่กับจำนวนจริงที่นำมาแทนตัวแปร อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว อาจมีพจน์ที่เป็นตัวแปรมากกว่าหนึ่งพจน์ ซึ่งจะอยู่ข้างเดียวกันหรือคนละข้างของอสมการก็ได้ โดยเรียกอสมการที่อยู่ในรูปต่อไปนี้ว่า อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1. $ax + b < c$
2. $ax + b \leq c$
3. $ax + b > c$
4. $ax + b \geq c$
5. $ax + b \neq c$

เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว $a \neq 0$ และ x เป็นตัวแปร

ตัวอย่างของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เช่น

1. $2x + 3 < 7$
2. $4x + 5 \leq 8$
3. $7x - 3 > 9$
4. $\frac{x}{5} + 4 \geq 12$
5. $-4x + 7 \neq 10$
6. $3(4x - 8) > 15$
7. $12x + 9 < 4x - 3$
8. $7(x + 4) \geq 2(3x - 5)$

1. คำตอบและกราฟ แสดงคำตอบของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

คำตอบของอสมการเชิงตัวแปรเดียว คือ จำนวนจริงที่แทนค่าตัวแปรในอสมการ แล้วทำให้อสมการเป็นจริง

ตัวอย่างเช่น กำหนดอสมการ $x + 3 < 7$

ถ้าแทนค่า x ด้วย 5 จะได้อสมการ $5 + 3 < 7$ หรือ $8 < 7$ ซึ่งอสมการเป็นเท็จ

ดังนั้น 5 ไม่เป็นคำตอบของอสมการนี้

ถ้าแทนค่า x ด้วย 2 จะได้อสมการ $2 + 3 < 7$ หรือ $5 < 7$ ซึ่งอสมการเป็นจริง

ดังนั้น 2 เป็นคำตอบของอสมการนี้

ถ้าแทนค่า x ด้วย 1 จะได้อสมการ $1 + 3 < 7$ หรือ $4 < 7$ ซึ่งอสมการเป็นจริง

ดังนั้น 1 เป็นคำตอบของอสมการนี้

เซตคำตอบของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง เมื่อนำมาแทนค่าในตัวแปรแล้วทำให้อสมการเป็นจริง ซึ่งอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแต่ละทีก็อาจมีคำตอบได้หลายลักษณะ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาคำตอบของอสมการ $a \neq 30$

วิธีทำ เนื่องจากเมื่อแทน a ด้วยจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 30

ใน อสมการ $a \neq 30$ จะได้อสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของอสมการ $a \neq 30$ คือ จำนวนจริงทุกจำนวน ยกเว้น 30

ตอบ จำนวนจริงทุกจำนวนยกเว้น 30

ตัวอย่างที่ 2 จงหาคำตอบของอสมการ $x \geq 7$

วิธีทำ เนื่องจากเมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริงใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 7

ใน อสมการ $x \geq 7$ จะได้อสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของอสมการ $x \geq 7$ คือ จำนวนจริงทุกจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 7

ตอบ จำนวนจริงทุกจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 7

ตัวอย่างที่ 3 จงหาคำตอบของอสมการ $m + 1 < m + 2$

วิธีทำ เนื่องจากเมื่อแทน m ด้วยจำนวนจริงใดๆ

ใน อสมการ $m + 1 < m + 2$ แล้วจะได้อสมการที่เป็นจริงเสมอ

ดังนั้น คำตอบของอสมการ $m + 1 < m + 2$ คือ จำนวนจริงทุกจำนวน

ตอบ จำนวนจริงทุกจำนวน

ตัวอย่างที่ 4 จงหาคำตอบของอสมการ $z - 2 > z$

วิธีทำ เนื่องจากไม่มีจำนวนจริงใด ๆ ที่แทนใน อสมการ $z - 2 > z$

แล้วจะทำให้สมการที่เป็นจริง

ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของอสมการ $z - 2 > z$

ตอบ ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบ

ตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นแสดงให้เห็นถึงอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3 แบบ ตามลักษณะต่อไปนี้

1. อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีจำนวนจริงบางจำนวนเป็นคำตอบ เช่น อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2
2. อสมการไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบที่มีจำนวนจริงทุกจำนวนเป็นคำตอบ เช่น อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในตัวอย่างที่ 3
3. อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบ เช่น ในตัวอย่างที่ 4

เนื่องจากคำตอบของอสมการ ที่เราหาได้จะเป็นจำนวนจริงเสมอ ดังนั้นเราสามารถที่จะนำคำตอบที่หาได้แสดงบนเส้นจำนวนได้ การแสดงคำตอบในลักษณะนี้เราเรียกว่า "กราฟแสดงคำตอบ" การใช้กราฟแสดงคำตอบของอสมการ ทำให้เป็นภาพคำตอบได้ชัดเจน ในกรณีที่มีคำตอบมากกว่า 1 คำตอบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 ที่ให้พิจารณา $a + 1 \leq 4$

วิธีทำ $a + 1 \leq 4$

$$a + 1 - 1 \leq 4 - 1$$

$$a \leq 3$$

นั่นคือ a มีค่า น้อยกว่าหรือเท่ากับ 3 เขียนกราฟแสดงคำตอบของ

$$a + 1 \leq 4 \text{ ได้ดังนี้}$$



ตัวอย่างที่ 6 จงเขียนกราฟแสดงคำตอบของอสมการต่อไปนี้ $a + 4 > 10$

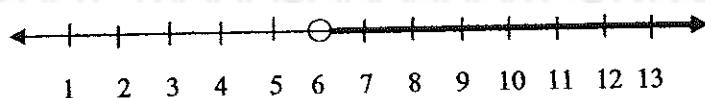
วิธีทำ $a + 4 > 10$

$$a + 4 - 4 > 10 - 4 \text{ (เอา 4 บวกเข้าทั้งสองข้าง)}$$

$$a > 6$$

นั่นคือ a มากกว่า 6 ขึ้นไป จะเป็น 7,8,9,10,11,...

เขียนกราฟแสดงคำตอบของ $a + 4 > 10$ ได้ดังนี้



การเขียนวงกลมโปร่งที่ตำแหน่งเลข 6 เพื่อแสดงว่า กราฟแสดงคำตอบนี้ไม่รวม 6 แต่แสดงจำนวนที่มากกว่า 6 เช่น 6.01, 6.10, 6.35... เป็นคำตอบทุกจำนวน

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $x - 3 < 8$ พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงคำตอบ

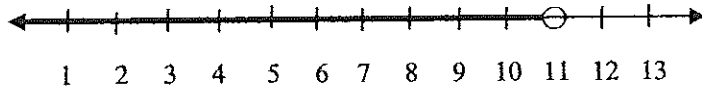
วิธีทำ $x - 3 < 8$

นำ 3 มาบวกทั้งสองข้างของอสมการ

จะได้ $x - 3 + 3 < 8 + 3$

หรือ $x < 11$

ตรวจคำตอบ เมื่อนำจำนวนใด ๆ ที่น้อยกว่า 11 เช่น 10.8, 10, 9, 0, -5 เป็นต้น ไปแทนค่า x ในอสมการ $x - 3 < 8$ จะได้อสมการที่เป็นจริง ดังนั้นคำตอบของอสมการ $x - 3 < 8$ คือจำนวนทุกจำนวนที่น้อยกว่า 11 เขียนกราฟแสดงคำตอบของอสมการได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $x + 4 \geq 9$ พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงคำตอบ

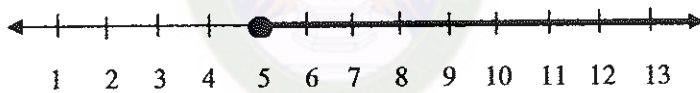
วิธีทำ $x + 4 \geq 9$

นำ -4 มาบวกทั้งสองข้างของอสมการ

จะได้ $x + 4 + (-4) \geq 9 + (-4)$

หรือ $x \geq 5$

ตรวจคำตอบ เมื่อนำจำนวนใด ๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 5 เช่น 5.8, 6, 6.3, 8, 9 เป็นต้น ไปแทนค่า x ในอสมการ $x + 4 \geq 9$ จะได้อสมการที่เป็นจริง ดังนั้นคำตอบของอสมการ $x + 4 \geq 9$ คือจำนวนทุกจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 5 เขียนกราฟแสดงคำตอบของอสมการได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 9 จงแก้สมการ $5x + 4 < 4x$ พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงคำตอบ

วิธีทำ $5x + 4 < 4x$

นำ $(-4x)$ มาบวกทั้งสองข้างของอสมการ

จะได้ $5x + 4 + (-4x) < 4x + (-4x)$

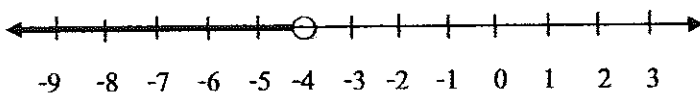
หรือ $x + 4 < 0$

นำ (-4) มาบวกทั้งสองข้างของอสมการ

จะได้ $x + 4 + (-4) < 0 + (-4)$

$$x < -4$$

ดังนั้น คำตอบของอสมการ $5x + 4 < 4x$ คือจำนวนทุกจำนวนที่น้อยกว่า -4 เขียนกราฟแสดงคำตอบของอสมการได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 10 จงแก้สมการ $6x - 3 \leq 7x - 9$ พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงคำตอบ

วิธีทำ $6x - 3 \leq 7x - 9$

นำ $(-6x)$ มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $6x + (-6x) - 3 \leq 7x - 9 + (-6x)$

$$-3 \leq 4x - 9$$

นำ 9 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $(-3) + 9 \leq 4x - 9 + 9$

หรือ $6 \leq 4x$

หรือ $x \geq 6$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $6x - 3 \leq 7x - 9$ คือจำนวนทุกจำนวนที่น้อยกว่า -6 เขียนกราฟแสดงคำตอบของสมการได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 11 จงแก้สมการ $4x > -5$ พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงคำตอบ

วิธีทำ $4x > -5$

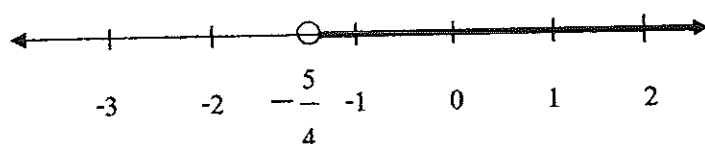
นำ $\frac{1}{4}$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\frac{1}{4}(4x) > \frac{1}{4}(-5)$

หรือ $x > -\frac{5}{4}$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $4x > -5$ คือจำนวนทุกจำนวนที่มากกว่า $-\frac{5}{4}$

เขียนกราฟแสดงคำตอบของสมการได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 12 จงแก้สมการ $-3x \geq 10$

วิธีทำ $-3x \geq 10$

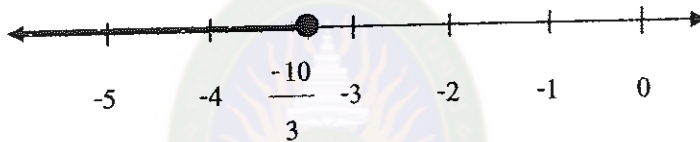
นำ $\frac{-1}{3}$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\frac{-1}{3}(-3x) \leq \frac{-1}{3}(10)$

หรือ $x \leq \frac{-10}{3}$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือจำนวนทุกจำนวนที่น้อยกว่า $\frac{-10}{3}$

เขียนกราฟแสดงคำตอบของสมการได้ดังนี้



ข้อสังเกต ในตัวอย่างนี้ ควรสังเกตว่า เมื่อนำตัวคูณที่เป็นจำนวนลบคูณทั้งสองข้างของสมการแล้ว จะได้สมการที่มีสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกลับกันกับสมการเดิม

2. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ การหาเซตคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นิยมใช้สมบัติ 4 ข้อดังนี้

1. การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากันเข้าทั้งสองข้างของสมการ

ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

2. การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากันเข้าทั้งสองข้างของสมการ

ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

3. การตัดออกสำหรับการบวก

4. การตัดออกสำหรับการคูณ

การใช้สมบัติในการแก้สมการต้องระมัดระวังในเรื่อง การคูณทั้งสองข้างของสมการด้วยจำนวนจริงลบ การกลับเศษเป็นส่วน การยกกำลังสองทั้งสองข้าง ต้องระวังการเปลี่ยนเครื่องหมายของการไม่เท่ากัน

อย่างไรก็ตามในการแก้สมการ เราอาจต้องใช้ทั้งสมบัติการบวกและสมบัติการคูณ
ช่วยในการแก้สมการ ให้ศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} \geq 1$

วิธีทำ $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} \geq 1$

นำ ค.ร.น. ของ 2, 3 คูณทั้งสองข้างของสมการ

$$6\left(\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{3}\right) \geq 6$$

จะได้ $3(3x-1) - 2(2x+3) \geq 6$

$$9x - 3 - 4x - 6 \geq 6$$

$$9x - 4x \geq 6 + 3 + 6$$

$$5x \geq 15$$

$$x \geq \frac{15}{5}$$

หรือ $x \geq 3$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} \geq 1$ คือ จำนวนทุกจำนวนที่

มากกว่าหรือเท่ากับ 3

ข้อสังเกต ในตัวอย่างนี้ ควรสังเกตว่าในกรณีที่อยู่รูปเศษส่วน ควรทำตัวส่วน
ให้หมดไป โดยนำ ค.ร.น. ของตัวส่วนทุกจำนวนคูณทั้งสองข้างของสมการในการแก้สมการ
บางครั้งเราอาจหาคำตอบบางคำตอบที่ต้องการได้

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่เป็นคำตอบของสมการ

$$\frac{3x+1}{2} - \frac{7x+3}{6} < \frac{3-x}{3}$$

วิธีทำ $\frac{3x+1}{2} - \frac{7x+3}{6} < \frac{3-x}{3}$

นำ ค.ร.น. ของ 2, 6, 3 คูณทั้งสองข้างของสมการ

$$6\left(\frac{3x+1}{2} - \frac{7x+3}{6}\right) < 6\left(\frac{3-x}{3}\right)$$

จะได้ $3(3x+1) - (7x+3) < 2(3-x)$

$$9x + 3 - 7x - 3 < 6 - 2x$$

$$9x - 7x + 2x < 6$$

$$4x < 6$$

$$x < \frac{6}{4}$$

หรือ

$$x < \frac{3}{2}$$

ดังนั้น คำตอบของอสมการ $\frac{3x+1}{2} - \frac{7x+3}{6} < \frac{3-x}{3}$ คือ จำนวนทุก

จำนวนที่ น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{3}{2}$ จำนวนเต็มที่น้อยกว่า $\frac{3}{2}$ ได้แก่ 1, 0, -1, -2, ...

นั่นคือ จำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่เป็นคำตอบของอสมการที่กำหนดคือ 1

ในการแก้สมการ เราอาจพบว่าสมการบางอสมการ ไม่มีคำตอบ

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $10 - 3(x + 1) < 3(2 - x)$

วิธีทำ $10 - 3(x + 1) < 3(2 - x)$

$$10 - 3x - 3 < 6 - 3x$$

$$-3x + 3x < 6 - 10 + 3$$

$$0x < -1$$

หรือ

$$0 < -1$$

อสมการไม่เป็นจริง

ดังนั้น อสมการ $10 - 3(x + 1) < 3(2 - x)$ ไม่มีคำตอบ (ไม่มีค่า x ใดๆ ที่

สอดคล้องกับอสมการ)

จากตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น จะ ได้เห็นตัวอย่างของการแก้สมการที่ใช้สัญลักษณ์ $<$, \leq , $>$ และ \geq บอกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน ในตัวอย่างต่อไป จะ ได้ศึกษาการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่ใช้สัญลักษณ์ \neq บอกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน การแก้สมการ $A \neq B$ มีวิธีการดังนี้

1. หาคำตอบของสมการ $A = B$ โดยการแก้สมการ

2. หาคำตอบของสมการ $A \neq B$ โดยหาจำนวนทุกจำนวนที่ไม่เท่ากับคำตอบของสมการ

$A = B$ ในข้อ 1

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $7(x - 3) - 6(2x - 3) \neq 2$

วิธีทำ พิจารณาสมการ $7(x - 3) - 6(2x - 3) = 2$

$$7x - 21 - 12x + 18 = 2$$

$$7x - 12x = 2 + 21 - 18$$

$$-5x = 5$$

$$x = \frac{5}{-5}$$

หรือ

$$x = -1$$

คำตอบของสมการ $7(x-3) - 6(2x-3) = 2$ คือ -1

ดังนั้น คำตอบของสมการ $7(x-3) - 6(2x-3) \neq 2$ คือจำนวนทุกจำนวนที่ไม่เท่ากับ -1

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $\frac{7x}{3} - \frac{6}{5} \neq \frac{12x}{5} - \frac{2}{3}$

วิธีทำ พิจารณาสมการ $\frac{7x}{3} - \frac{6}{5} = \frac{12x}{5} - \frac{2}{3}$

นำ ค.ร.น. ของ 3, 5 คูณทั้งสองข้างของสมการ

$$15\left(\frac{7x}{3} - \frac{6}{5}\right) = 15\left(\frac{12x}{5} - \frac{2}{3}\right)$$

$$35x - 18 = 36x - 10$$

$$-18 + 10 = 36x - 35x$$

$$-8 = x$$

หรือ $x = -8$

คำตอบของสมการ $\frac{7x}{3} - \frac{6}{5} = \frac{12x}{5} - \frac{2}{3}$ คือ -8

ดังนั้น คำตอบของสมการ $\frac{7x}{3} - \frac{6}{5} \neq \frac{12x}{5} - \frac{2}{3}$ คือ จำนวนทุกจำนวนที่

ไม่เท่ากับ -8

3. การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

เรานำความรู้เรื่องการแก้สมการที่ได้กล่าวมาแล้ว เพื่อใช้หาคำตอบของโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว วิธีแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว มีวิธีทำเป็นขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดตัวแปรแทนจำนวนที่ต้องการทราบค่า
2. แปลงปัญหาให้อยู่ในรูปสมการ
3. หาคำตอบโดยการแก้สมการ
4. พิจารณาคำตอบ โดยพิจารณาถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ใน

สถานการณ์ต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 1 ผลบวกของจำนวนสองจำนวนเท่ากับ 46 แต่เมื่อนำจำนวนน้อยหักออกจากจำนวนมากจะมีค่าไม่เกิน 10 จงหาจำนวนบวกที่เป็นจำนวนมาก

วิธีทำ ให้จำนวนบวกที่เป็นจำนวนมากคือ x (ขั้นที่ 1)

จะได้ จำนวนบวกที่เป็นจำนวนน้อย คือ $46 - x$

เมื่อนำจำนวนน้อยหักออกจากจำนวนมากจะมีค่าไม่เกิน 10

จะได้ $x - (46 - x) \leq 10$ (ขั้นที่ 2)

$$x - 46 + x \leq 10$$

$$2x \leq 10 + 46$$

$$2x \leq 56 \quad (\text{ขั้นที่ 3})$$

$$x \leq 28$$

เนื่องจาก ผลบวกของจำนวนสองจำนวนเท่ากับ 46 จำนวนสองจำนวนนี้จะเท่ากันเมื่อจำนวนแต่ละจำนวนมีค่าเท่ากับ $\frac{46}{2} = 23$ (ขั้นที่ 4)

ดังนั้น จำนวนบวกที่เป็นจำนวนมาก ต้องมีค่ามากกว่า 23 แต่มีค่าไม่เกิน 28

ตัวอย่างที่ 2 หวานใจจัดแจกันดอกไม้ประดิษฐ์ขายเป็นงานอดิเรก วันหนึ่งเธอขายแจกันดอกไม้ประดิษฐ์แบบเดียวกันได้ 3 แจกัน เธอนำเงินไปใส่กระปุก 300 บาท ส่วนเงินที่เหลือเธอนำไปซื้ออุปกรณ์เพิ่มเติมคิดเป็นเงินทั้งสิ้น 120 บาท เธอเหลือเงินติดตัวไว้เป็นทุนสำรองไม่ถึง 180 บาท จงหาว่าหวานใจจัดแจกันดอกไม้ประดิษฐ์ขายแจกันละกี่บาท

วิธีทำ ให้หวานใจจัดแจกันดอกไม้ประดิษฐ์ขายแจกันละ x บาท (ขั้นที่ 1)

เธอขายแจกันดอกไม้ประดิษฐ์ 3 แจกัน จึงได้เงิน $3x$ บาท

นำเงินไปใส่กระปุก 300 บาท และซื้อ

อุปกรณ์เพิ่มเติม 120 บาท

หวานใจจะเหลือเงิน $3x - (300 + 120)$ บาท

(ขั้นที่ 2)

หวานใจเหลือเงินติดตัวเป็นทุนสำรองไม่ถึง 180 บาท

ดังนั้น $3x - (300 + 120) < 180$

$$3x - 420 < 180$$

$$3x < 420 + 180$$

$$3x < 600 \quad (\text{ขั้นที่ 3})$$

$$x < \frac{600}{3}$$

หรือ $x < 200 \dots (1)$

จำนวนเงินที่หวานใจชายแจกันคอกไม้ประดิษฐ์ได้ต้องมากกว่า

$$300 + 120 \quad \text{บาท}$$

หรือ มากกว่า $420 \quad \text{บาท}$

นั่นคือ $3x > 420 \quad (\text{ขั้นที่ } 4)$

$$x > \frac{420}{3}$$

หรือ $x > 140 \dots (2)$

จาก (1) และ (2) แสดงว่าหวานใจชายแจกันคอกไม้ประดิษฐ์แต่ละแจกัน
ได้เป็นเงินมากกว่า 140 บาท แต่ไม่ถึง 200 บาท

ตัวอย่างที่ 3 ร้านขายหนังสือแห่งหนึ่งต้องการขายหนังสือรายเดือนฉบับหนึ่ง ซึ่งมีต้นทุน
ฉบับละ 6.50 บาท แต่ต้องเสียค่าหัวหนังสือเดือนละ 1,000 บาท บาทคงที่ ถ้าร้านขายหนังสือใน
ราคาฉบับละ 22.50 บาท แล้วในเวลา 1 เดือน ร้านต้องขายหนังสืออย่างน้อยกี่เล่มจึงจะมีกำไร

| | | | |
|--------|-----------------------------------------|-------------------------|----------|
| วิธีทำ | ให้เวลา | 1 | เดือน |
| | ร้านขายหนังสือขายหนังสือรายเดือนฉบับนี้ | x | เล่ม |
| | หนังสือมีต้นทุนราคาฉบับละ | 6.50 | บาท ต้อง |
| | x เล่ม เท่ากับ | 6.50 x | บาท |
| | ขายหนังสือราคาฉบับละ | 22.50 | บาท ขาย |
| | x เล่ม จะได้เงิน | 22.50 x | บาท |
| | เนื่องจากต้องเสียค่าหนังสือเดือนละ | 1,000 | บาท |
| | ดังนั้นจะขายหนังสือได้กำไร เมื่อ | $22.50x - 6.50x > 1000$ | |

$$16x > 1000$$

$$x > \frac{1000}{16}$$

หรือ $x > 62.5$

เนื่องจาก x ต้องเป็นจำนวนนับ

ดังนั้น ร้านต้องขายหนังสืออย่างน้อย 63 เล่ม จึงจะมีกำไร

แบบฝึกหัด

1. ความหมายของแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดมีความจำเป็นต่อการเรียนการสอนวิชาที่เกี่ยวกับทักษะ การใช้แบบฝึกหัดมาพัฒนาการเรียนการสอนจะช่วยให้ครูและนักเรียนพบความผิดพลาดทางการเรียนการสอนและแก้ไขความผิดพลาดนั้นได้ทันท่วงที ซึ่งมีผู้กล่าวถึงความหมายของ “แบบฝึกหัด” ไว้แตกต่างกันออกไป ดังนี้

พจนานุกรม เวบสเตอร์ (Webster, 1981 : 64) ให้ความหมายแบบฝึกหัดว่า หมายถึง โจทย์ปัญหา หรือตัวอย่างที่ยกมาจากหนังสือ เพื่อนำมาใช้สอนหรือให้ผู้เรียนฝึกฝนทักษะต่าง ๆ ให้ดีขึ้น หลังจากที่เรียนบทเรียนไปแล้ว

ชัยงค์ พรหมวงศ์ (2535 : 16) ให้ความหมาย แบบฝึกหัดว่า หมายถึง สิ่งที่นักเรียนต้องใช้ควบคู่กับการเรียน ซึ่งมีลักษณะเป็นแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมกิจกรรมที่นักเรียนพึงกระทำ อาจกำหนดแยกเป็นแต่ละหน่วย หรืออาจรวมเล่มก็ได้

ศศิธร ธัญลักษณ์นันท์ (2542 : 375) ให้ความหมายแบบฝึกหัดว่า หมายถึง แบบฝึกหัดที่ใช้ฝึกความเข้าใจ ฝึกทักษะต่าง ๆ และทดสอบความสามารถของนักเรียนตามบทเรียนที่ครูสอนว่านักเรียนเข้าใจและสามารถนำไปใช้ได้มากน้อยเพียงใด

สำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ (2543 : 190) กล่าวว่า แบบฝึกหัด เป็นสื่อการเรียนประเภทหนึ่งสำหรับให้นักเรียนฝึกปฏิบัติเพื่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจ และทักษะเพิ่มขึ้น ส่วนใหญ่หนังสือเรียนจะมีแบบฝึกหัดอยู่ท้ายบทเรียนแบบฝึกหัดส่วนใหญ่จะจัดทำในรูปของแบบฝึกหัด หรือชุดฝึกซึ่งนักเรียนจะฝึกหัดเรียนด้วยตนเอง และจัดทำเป็นชุดเน้นพัฒนา หรือเสริมทักษะเรื่องใดเรื่องหนึ่ง

สุนันทา สุนทรประเสริฐ (2543 : 2) กล่าวว่า แบบฝึกหัด คือสื่อการเรียนการสอนชนิดหนึ่ง ที่ใช้ฝึกทักษะให้กับผู้เรียน หลังจากเรียนจบเนื้อหาในช่วงหนึ่ง ๆ เพื่อฝึกฝนให้เกิดความรู้ความเข้าใจ รวมทั้งเกิดความชำนาญในเรื่องนั้น ๆ อย่างกว้างขวางมากขึ้น

กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ (2545 : 48) ได้ให้ความหมายของแบบฝึกหัดไว้ว่าเป็นสื่อที่ใช้ฝึกทักษะการคิด การวิเคราะห์ การแก้ปัญหา และการปฏิบัติของนักเรียน นิยมใช้ใน กลุ่มสาระทางภาษา คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ การงาน/อาชีพ ลักษณะของแบบฝึกหัดอาจจะ ประกอบไปด้วยจุดประสงค์ ทบทวนกฎเกณฑ์ เสนอตัวอย่าง แบบฝึก และเฉลย/อธิบายเพิ่มเติม

ประโรม กุ่ยสาคร (2547 : 54) ได้ให้ความหมายของแบบฝึกหัดไว้ว่า แบบฝึกหัด หมายถึงสื่อการเรียนการสอนหรือสิ่งที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ฝึกทักษะการคิด การวิเคราะห์ การแก้ปัญหา และการปฏิบัติของนักเรียน มีลักษณะเป็นแบบฝึกหัดที่มีกิจกรรมให้นักเรียนทำ เช่น แบบตัวอย่าง การตั้งโจทย์ปัญหาให้นักเรียนตอบ หรือการยกข้อความเพื่อฝึกทักษะหลังจากที่ได้เรียนเนื้อหาไปแล้ว

ชวศร ดีชัยยา (2550 : 18) สรุปความหมาย แบบฝึกหัด คือ งานหรือกิจกรรมที่ครูสร้างขึ้น โดยมีรูปแบบกิจกรรมที่หลากหลาย มีจุดมุ่งหมายเพื่อฝึกให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ บทเรียน ได้ดียิ่งขึ้น และช่วยฝึกทักษะต่าง ๆ ให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างแท้จริง

นิตยา เมืองมิ่ง (2550 : 24 – 25) แบบฝึกหัด หมายถึง ชุดเสริมการเรียนรู้ ที่ครูสร้างขึ้นเพื่อฝึกให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ ทบทวนเนื้อหาที่เรียนเพื่อสร้างความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาบทเรียน ที่ได้เรียนรู้มาแล้ว ซึ่งเป็นการฝึกทักษะและเสริมความชำนาญและฝึกกระบวนการคิดมากขึ้น

สุภาวดี คำฝึกฝน (2550 : 9) กล่าวว่า แบบฝึกหัดเป็นสื่อประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ที่ช่วยให้นักเรียนได้ฝึกทักษะเพิ่มจนเกิดความชำนาญและส่งผลให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียน

จากความหมายดังกล่าวมาพอสรุปได้ว่า แบบฝึกหัด หมายถึง งานที่ครูผู้สอนมอบหมายให้นักเรียนทำเพื่อใช้ในการส่งเสริมการเรียนรู้และเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะด้านต่าง ๆ หลังจากที่นักเรียนได้เรียนเนื้อหาในเรื่องต่าง ๆ ไปแล้ว ซึ่งอาจจะเป็นทั้งแบบฝึกหัดท้ายบท หรือแบบฝึกหัดที่ผู้สอนสร้างขึ้นเอง ซึ่งการวิจัยในครั้งนี้แบบฝึกหัดของนักเรียน คือ แบบฝึกหัดที่ปรากฏตามหนังสือผู้สร้างคณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 (สำนักพิมพ์อักษรเจริญทัศน์, 2551: 29 – 39)

2. ความสำคัญของแบบฝึกหัด

กรีน แอน เพตตี้ (Green and Petty, 1971: 80) กล่าวถึงประโยชน์ของแบบฝึกหัดไว้ดังนี้

1. ใช้เสริมหนังสือแบบเรียนในการเรียนทักษะ
2. เป็นสื่อการสอนที่ช่วยแบ่งเบาภาระของครู
3. เป็นเครื่องมือที่ช่วยฝึกฝนและส่งเสริมทักษะการใช้ภาษาให้ดีขึ้น แต่

จะต้องได้รับการดูแลและเอาใจใส่จากครูด้วย

4. แบบฝึกหัดที่สร้างขึ้นโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลจะเป็นการช่วยให้เด็กประสบความสำเร็จ ตามระดับความสามารถของเด็ก

5. จะช่วยเสริมทักษะให้คงอยู่ได้นาน
6. เป็นเครื่องมือวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจบบทเรียนแต่ละครั้ง
7. แบบฝึกหัดที่จัดทำเป็นรูปเล่มจะอำนวยความสะดวกแก่นักเรียนในการเก็บรักษาไว้เพื่อทบทวนด้วยตนเองได้
8. ช่วยให้ครูมองเห็นปัญหาและความผิดพลาดในการสอน ตลอดจนทราบปัญหาและความผิดพลาดและจุดอ่อนของนักเรียน ช่วยให้ครูสามารถแก้ปัญหาได้ทันที่
9. ช่วยให้เด็กมีโอกาสฝึกทักษะ ได้อย่างเต็มที่
10. แบบฝึกหัดที่จัดพิมพ์ไว้เรียบร้อยแล้วจะช่วยครูประหยัดเวลา และแรงงานในการสอนการเตรียมการสอน

เชาวนี เกศเพทพงศ์ (2524 : 23) ได้กล่าวถึงความสำคัญของแบบฝึกหัดไว้ว่า แบบฝึกหัดเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้เกิดการเรียนรู้ ทำให้นักเรียนเกิดความสนใจ และช่วยให้ครูทราบผลการเรียนของนักเรียนอย่างใกล้ชิด

วีระ ไทยพานิช (2528 : 11) ได้กล่าวถึงความสำคัญของแบบฝึกหัดสรุปได้ว่า แบบฝึกหัดเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้เกิดการเรียนรู้ที่เกิดจากการกระทำจริง เป็นประสบการณ์ตรงที่ผู้เรียนมีจุดมุ่งหมายที่แน่นอน ทำให้นักเรียนเห็นคุณค่าของสิ่งที่เรียน สามารถเรียนรู้ และจดจำสิ่งที่เรียนได้ดีและนำไปใช้ในสถานการณ์เช่นเดียวกันได้

ลักษณา อินทะจักร (2538 : 163) กล่าวว่า แบบฝึกหัดเป็นหัวใจของการสอนวิชาทักษะ การฝึกอย่างถูกวิธีเท่านั้นจะทำให้เกิดความชำนาญ คล่องแคล่วองไวและทำได้โดยอัตโนมัติ

นิศยา เมืองมิ่ง (2550 : 24 – 25) กล่าวว่า แบบฝึกหัด มีประโยชน์ในการทบทวนบทเรียนที่นักเรียนได้เรียนรู้มาแล้วเพื่อความชำนาญและฝึกประสบการณ์ ทำให้ผู้เรียนได้ทราบความผิดพลาดพร้อมแก้ไขชิ้นงานได้

จากความสำคัญของแบบฝึกหัดดังกล่าว สรุปได้ว่า แบบฝึกหัดนอกจากจะช่วยให้ นักเรียนได้มีโอกาสฝึกฝนทักษะ และทบทวนได้ด้วยตนเองแล้ว ยังช่วยให้ครูมองเห็นปัญหาและความผิดพลาดในการสอน ทราบปัญหาและความผิดพลาด จุดอ่อนของนักเรียน เพื่อครูจะได้แก้ไขได้ทันที่

3. ลักษณะของแบบฝึกหัดที่ดี

การเลือกใช้แบบฝึกเพื่อใช้เป็นสื่อในการเรียนการสอนนั้นครูต้องคำนึงถึงลักษณะของแบบฝึกที่มีอยู่มากมาย เพื่อให้เหมาะสมกับผู้เรียนและเป็นการใช้สื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด ซึ่งได้มีนักวิชาการได้ให้ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับลักษณะของแบบฝึกที่ดีไว้หลายท่าน ดังนี้

กรณีการ พวงเกษม (2540 : 8-9) กล่าวว่าแบบฝึกหัดที่จะทำให้นักเรียนเกิดทักษะที่ดีและถูกต้อง ควรมีลักษณะดังนี้

1. ควรมีความชัดเจนทั้งคำสั่งและวิธีทำ คำสั่งหรือตัวอย่างไม่ควรยาวเกินไป เพราะจะทำให้เข้าใจยาก ควรปรับให้ง่ายเหมาะสมกับผู้ใช้ ทั้งนี้เพื่อให้นักเรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตนเองได้
2. ควรมีความหมายต่อผู้เรียนและตรงจุดมุ่งหมายของการฝึก ลงทุนน้อยใช้ได้ นาน และทันสมัยอยู่เสมอ
3. ภาษาและภาพที่ใช้มีความเหมาะสมกับวัยและพื้นฐานความรู้ของนักเรียน
4. ควรแยกฝึกเป็นเรื่อง ๆ แต่ละเรื่องไม่ควรยาวเกินไป ควรมีกิจกรรมหลายรูปแบบ เพื่อให้นักเรียนเกิดความสนใจและไม่น่าเบื่อในการทำ และเพื่อฝึกทักษะด้านใดด้านหนึ่งจนเกิดความชำนาญ
5. ควรมีทั้งกำหนดคำตอบให้และแบบให้ตอบโดยเสรี การเลือกใช้คำ ข้อความ หรือรูปภาพในแบบฝึก ควรเป็นสิ่งที่นักเรียนคุ้นเคย และตรงกับความสนใจ
6. ควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ศึกษาด้วยตนเอง ให้รู้จักค้นคว้ารวบรวมสิ่งที่พบเห็นบ่อย ๆ จะทำให้นักเรียนเข้าใจในเรื่องนั้น ๆ ได้ดี ใช้ได้อย่างถูกต้องมีหลักการ และมองสิ่งที่เขาได้รับการฝึกฝนนั้นมีความหมายต่อผู้ฝึกตลอดไป
7. มีผลตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล เนื่องจากผู้เรียนแต่ละคนมีความแตกต่างกันในหลาย ๆ ด้านเช่น ความต้องการ ความสนใจ ความพร้อม ระดับสติปัญญา และประสบการณ์ฉะนั้นการจัดทำแบบฝึกควรจัดทำให้มากพอ และควรมีทุกระดับตั้งแต่ง่าย ปานกลาง จนถึงระดับค่อนข้างยาก เพื่อที่ว่าเด็กทั้งปานกลางและอ่อนจะทำได้ทำตามความสามารถ เพื่อให้เด็กนักเรียนทุกคนได้ประสบความสำเร็จในการทำแบบฝึก
8. ความเร้าความสนใจตั้งแต่กิจกรรมแรกจนถึงกิจกรรมสุดท้าย
9. ควรได้รับการปรับปรุงควบคู่ไปกับหนังสือแบบเรียนอยู่เสมอ และควรใช้ได้ดีทั้งในห้องและนอกห้องเรียน
10. ควรเป็นแบบฝึกที่ครูสร้างให้นักเรียนได้ฝึกหัด แล้วสามารถประเมินและจำแนกความเจริญงอกงามของเด็กได้ด้วย

สมพร พูลพันธ์ (2541 : 41) กล่าวถึง ลักษณะของแบบฝึกที่ดีว่าควรมีลักษณะ ดังนี้

1. ต้องมีการฝึกนักเรียนมากพอควรในเรื่องหนึ่ง ๆ ก่อนที่จะมีการฝึกเรื่องอื่น ๆ
ต่อไปทั้งนี้ทำขึ้นเพื่อการสอนมิใช่ทำขึ้นเพื่อทดสอบ

2. แต่ละบทควรฝึก โดยใช้แถบประโยคเพียงหนึ่งแถบเท่านั้น

3. ฝึกโครงสร้างใหม่และสิ่งที่เรียนรู้แล้ว

4. ประโยคที่ฝึกควรเป็นประโยคสั้น

5. ประโยคและคำศัพท์ควรเป็นที่ใช้พู่กันในชีวิตประจำวันที่นักเรียนรู้จักดีแล้ว

6. เป็นแบบฝึกที่นักเรียนใช้ความคิดด้วย

7. แบบฝึกควรมีหลาย ๆ แบบ เพื่อไม่ให้นักเรียนเกิดความเบื่อหน่าย

8. ควรฝึกให้นักเรียนสามารถนำสิ่งที่เรียนแล้วไปใช้ในชีวิตประจำวันได้

วรสุตา บุญยไวโจน์ (2541 : 37) ได้เสนอแนะลักษณะของแบบฝึกที่ดีไว้ ดังนี้

1. ควรมีความชัดเจนทั้งคำสั่งและวิธีทำ ไม่ควรเป็นคำสั่งที่ยาวเกินไป

2. ควรมีความหมายต่อผู้เรียน ตรงตามจุดมุ่งหมายของการฝึก ลงทุนน้อย ใช้ได้

นาน

3. ภาษาและภาพที่ใช้ควรเหมาะสมกับวัยและพื้นฐานความรู้ของผู้เรียน

4. ควรแยกฝึกเป็นเรื่อง แต่ละเรื่องไม่ควรยาวเกินไป

5. ควรมีทั้งแบบกำหนดคำตอบให้และแบบให้ตอบโดยเสรี การเลือกใช้คำและ

รูปภาพควรเป็นสิ่งที่นักเรียนคุ้นเคย และสนใจ

6. ควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียน ได้ศึกษาด้วยตนเอง จะทำให้นักเรียนเข้าใจและรู้จักนำ
ความรู้ไปใช้ในชีวิตประจำวัน ได้มองเห็นความสำคัญของสิ่งที่ได้ฝึกฝน

7. ควรตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล การจัดแบบฝึกแต่ละเรื่องควรมีทุก
ระดับความยากง่ายและปานกลาง

8. ควรเร้าความสนใจตั้งแต่ปก ถึง หน้าสุดท้าย

9. ควรปรับปรุงควบคู่ไปกับหนังสือเรียนอยู่เสมอ

10. ควรประเมินและจำแนกความเจริญงอกงามของเด็กได้

จิรพา จันทะเวียง (2542 : 43) กล่าวถึงลักษณะของแบบฝึกที่ดี ดังนี้

1. เกี่ยวข้องกับบทเรียนที่เรียนมาแล้ว

2. เหมาะสมกับระดับวัย หรือความสามารถของเด็ก

3. มีคำชี้แจงสั้น ๆ ที่จะทำให้เด็กเข้าใจ คำชี้แจงหรือคำสั่งต้องกระชับรัด

4. ใช้เวลาเหมาะสม คือ ไม่ใช่เวลานานหรือเร็วเกินไป

5. เป็นสิ่งที่น่าสนใจและท้าทายให้แสดงความสามารถ
กฤษยา แสงเดช (2545 : 12) กล่าวว่าแบบฝึกหัดที่ดีควรมีลักษณะดังนี้
 1. เกี่ยวข้องกับเรื่องที่เรียนมาแล้ว
 2. เหมาะสมกับระดับชั้น หรือวัยของผู้เรียน
 3. มีคำชี้แจงสั้น ๆ เพื่อให้เข้าใจง่าย
 4. ใช้เวลาที่เหมาะสม
 5. มีสิ่งที่น่าสนใจและท้าทายให้แสดงความสามารถ
6. ควรมีข้อเสนอแนะการใช้
7. มีให้เลือกตอบอย่างจำกัดและตอบอย่างเสรี
8. ถ้าเป็นแบบฝึกหัดที่ต้องการให้ผู้เรียนศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองแบบฝึกหัดควรมีหลาย

รูปแบบ

9. ควรใช้สำนวนภาษาง่าย ๆ ฝึกให้คิดและสนุกสนาน

จากที่กล่าวมาข้างต้น แบบฝึกหัดที่ดีควรมีหลายแบบหลายชนิดให้นักเรียนได้ทำ เพื่อไม่ให้นักเรียนเกิดความเบื่อหน่ายในการเรียน การใช้ถ้อยคำควรเลือกให้เหมาะสมกับวัยของนักเรียน นอกจากนี้ควรสร้างให้มีลักษณะช่วย ทำทหายความรู้ความสามารถของนักเรียนเพื่อฝึกให้นักเรียนรู้จักแก้ปัญหาและก่อให้เกิดความคิดสร้างสรรค์อีกด้วย

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

1. ความหมาย

ได้มีผู้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้หลายท่านดังต่อไปนี้

โพลยา (Polya's Four-Stage Method. 1957 : 117) ได้ให้ความหมายว่า โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่มีเนื้อหาสาระกระบวนการ หรือความรู้ที่ผู้เรียนไม่คุ้นเคยมาก่อน และไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที การหาคำตอบจะต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่น ๆ ประกอบกับความสามารถด้านการวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการตัดสินใจ

อดัม และ บีสัน (Adams and Beeson. 1977 : 173) ได้ให้ความหมายของปัญหาว่า คือสถานการณ์ที่เป็นประโยคภาษา คำตอบจะเกี่ยวข้องกับปริมาณซึ่งปัญหานั้นไม่ได้รับวิธีการหรือการดำเนินการในการแก้ปัญหาไว้อย่างชัดเจน ผู้แก้ปัญหาต้องค้นหาวางจะต้องใช้วิธีการใดในการหาคำตอบ

ครูลิก และ รูดนิค (Krulik and Rudnick. 1987 : 2) ได้ให้ความหมายว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์ที่ประกอบด้วยจำนวนและตัวเลข ตลอดจนข้อห้อมล้อมที่ทำให้เกิดปัญหา ซึ่งนักเรียนจะต้องคิดและตัดสินใจว่า จะใช้วิธีการใดทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหานั้น

สมทรง สุวานิช (2542 : 9) ได้สรุปความหมายของโจทย์ปัญหาว่าเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ประเภทหนึ่ง ที่อยู่ในลักษณะของข้อความไม่ปรากฏเครื่องหมายของการกระทำ (Operation) ใด ๆ วิธีการแก้ปัญหาก็ต้องอาศัยความสามารถทางด้านภาษา ในการตีความ สรุปความ รวมทั้งความคิดรวบยอดที่เกี่ยวข้องกับการกระทำที่ได้เคยเรียนมา อันสัมพันธ์กับโจทย์เพื่อนำไปสู่การสรุปเป็นประโยคสัญลักษณ์เพื่อหาคำตอบ

สิทธิชัย ร่วมจิต (2545 : 10) ได้ให้ความหมายว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์ที่ประกอบไปด้วยภาษาและตัวเลขที่ต้องการหาคำตอบ แต่ไม่มีเครื่องหมายบวก ลบ คูณหาร ให้เห็น แต่เครื่องหมายเหล่านั้นเป็นข้อความบรรยายในที่อื่นจะนำไปสู่การหาคำตอบที่ผู้แก้ปัญหาก็ต้องเลือกใช้อย่างเหมาะสมจึงจะได้คำตอบที่ถูกต้อง

พิพัฒน์ สอนพลละ (2545 : 14) ได้ให้ความหมายว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์ที่สร้างขึ้นในลักษณะต่าง ๆ ประกอบไปด้วยข้อความหรือตัวเลข โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการคิด เพื่อคิดหาวิธีการทางคณิตศาสตร์รวมทั้งเทคนิคอื่น ๆ ประกอบกัน เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องตามที่โจทย์ต้องการ

จากความหมายของ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ดังที่นักการศึกษาได้กล่าวมาแล้วข้างต้นสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หมายถึง สถานการณ์ปัญหาที่ประกอบไปด้วยภาษาและตัวเลขที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน ซึ่งผู้แก้ปัญหาก็ต้องอาศัยความรู้ ทักษะ และประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องมาประกอบการตัดสินใจวางแผนแก้ปัญหาคด้วยตนเอง เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบในเชิงปริมาณหรือตัวเลข

2. ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ในการจัดแบ่งประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีนักการศึกษากล่าวไว้ดังนี้
 สุพัตรา ผาติวิสันต์ (2535 : 14) สรุปว่าปัญหาทางคณิตศาสตร์แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์และปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน ซึ่งการแก้ปัญหทั้งสองประเภทนี้ จำเป็นต้องเลือกกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมมาก เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์

ปรีชา เนาว่าเอ็นผล (2537 : 66-74) ได้กล่าวถึงการแบ่งประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์สรุปได้ดังนี้

1. การแบ่งประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจากจุดประสงค์ของปัญหาที่สามารถแบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้เป็น 2 ประเภท คือ

1.1 ปัญหาให้ค้นหาเป็นปัญหาให้ค้นหาคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณจำนวน หรือให้หาวิธีการ คำอธิบายให้เหตุผล

1.2 ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาให้แสดงการให้เหตุผลว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเท็จ

2. การแบ่งประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยพิจารณาจากตัวผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อนของปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้เป็น 2 ประเภท คือ

2.1 ปัญหาธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อนมากนัก ผู้แก้ปัญหา มีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีการแก้ปัญหา

2.2 ปัญหาไม่ธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน ผู้แก้ปัญหาคงต้องประมวลความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกัน เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา

โพลยา (Polya, 1957 : 18) ได้แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท สรุปได้ดังนี้

1. ปัญหาให้ค้นหา เป็นปัญหาที่ค้นหาสิ่งที่ต้องการ ซึ่งอาจเป็นปัญหาในเชิงทฤษฎีหรือปัญหาในเชิงปฏิบัติ อาจเป็นรูปธรรมหรือนามธรรม ส่วนสำคัญของปัญหานี้แบ่งเป็น 3 ส่วน คือ สิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดให้ และเงื่อนไข

2. ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาที่ให้แสดงความสมเหตุสมผลว่า ข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเท็จ ส่วนสำคัญของปัญหานี้ แบ่งเป็น 2 ส่วน คือ สมมติฐานหรือสิ่งที่กำหนดให้และผลสรุปหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์

รัสเซล (Russel, 1961 : 39) ได้แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท สรุปได้ดังนี้

1. ปัญหาที่มีรูปแบบ ได้แก่ ปัญหาที่ปรากฏอยู่ในแบบเรียนและหนังสือทั่วไป

2. ปัญหาที่ไม่มีรูปแบบ ได้แก่ ปัญหาที่พบทั่วไปในชีวิตประจำวัน แอชล็อก และ คณะ (Ashlock and others, 1983 : 239) แบ่งรูปแบบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. โจทย์ปัญหาในหนังสือ หรือ โจทย์ปัญหาที่แก้ด้วยการแปลงให้เป็นประโยคคณิตศาสตร์ (Standard textbook or Translation problem) เป็น โจทย์ปัญหาที่แก้ด้วยหลักการหรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ที่ตายตัว ไม่ค่อยยุ่งยากมากนัก

2. โจทย์ปัญหาที่แก้ด้วยกระบวนการ (Process Problem) เป็น โจทย์ปัญหาที่แก้ด้วยกลวิธีต่าง ๆ ซึ่งยุ่งยากมากกว่าประเภทที่ 1 โจทย์ปัญหาประเภทนี้ต้องแก้ด้วยกระบวนการ 3 ขั้นตอน คือ

2.1 ความเข้าใจปัญหา

2.2 การพัฒนาและการหากลวิธีในการแก้ปัญหา

2.3 การประเมินการแก้ปัญหา

3. ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

จากการที่นักการศึกษาหลายท่าน ได้จัดแบ่งปัญหาคณิตศาสตร์และโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็นประเภทต่าง ๆ ตามเกณฑ์ที่กำหนดขึ้นนั้น ทำให้ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มีความหลากหลายตามไปด้วย ดังแนวคิดของนักการศึกษาต่อไปนี้

เจริญ แก้วประดิษฐ์ (2533 : 25) ได้เสนอความคิดเห็นว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจนั้น ควรจะเป็นโจทย์ที่แตกต่างไปจากปัญหาที่พบเห็นบ่อย ๆ ในบทเรียนและควรมีลักษณะดังนี้

1. เป็นปัญหาที่สัมพันธ์กับผู้แก้ปัญหาและชีวิตประจำวัน
2. เป็นปัญหาที่ใช้ภาษาในลักษณะที่เข้าใจง่าย
3. เป็นปัญหาที่เหมาะสมกับระดับความรู้พื้นฐานของผู้แก้ปัญหา
4. เป็นปัญหาที่มีความยากง่ายเหมาะสมกับผู้แก้ปัญหา
5. เป็นปัญหาที่ให้โอกาสผู้แก้ปัญหาที่ใช้ทักษะเบื้องต้นทั้งสี่ คือ บวก ลบ คูณ

หาร

วาริ ศรีผึ้ง (2534 : 64) ได้สรุปว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจควรมีลักษณะ 4 ประการดังต่อไปนี้

1. เป็นสภาพการณ์ที่ใกล้เคียงกับชีวิตประจำวัน เหมาะสมกับวัยความสามารถตลอดจนความรู้สึคนักคิดของนักเรียน
2. ข้อมูลที่ใช้ทันสมัยและเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้จริง ซึ่งอาจเป็นปัญหาครูแต่งขึ้นหรือให้นักเรียนช่วยกันแต่งขึ้นยิ่งดี
3. ภาษาที่ใช้เข้าใจง่ายไม่สั้นหรือยาวเกินไป

4. ลักษณะโจทย์ที่จะใช้แก้ปัญหานั้นควรส่งเสริมให้นักเรียนได้ใช้ความรู้และประสบการณ์ที่เคยเรียนมาประกอบการคิดวิเคราะห์ห้อย่างมีเหตุผลมากกว่าใช้ความจำเพียงอย่างเดียว

โพลยา (Polya, 1957 : 78) ได้กล่าวถึงวิธีการสร้างคำถามซึ่งสรุปได้ว่า การกำหนดคำถามหรือข้อชวนคิดลงในตารางสำหรับใช้กับนักเรียนนั้น ครูควรมีจุดมุ่งหมาย 2 ประการ คือ ต้องช่วยนักเรียนในการแก้ปัญหาใกล้ตัวได้ และต้องพัฒนาความสามารถของนักเรียน เพื่อที่เราจะได้แก้ปัญหานั้นในอนาคตได้ด้วยตนเอง โดยเนื้อเรื่องที่เรานำมาใช้สร้างคำถามนั้น ต้องมีลักษณะสอดคล้องกับสามัญสำนึกและความจริงทั่ว ๆ ไป เมื่อครูให้นักเรียนได้แก้ปัญหาค่อยคลึงกันไปเรื่อย ๆ จะทำให้นักเรียนเป็นคนช่างสังเกต สามารถคิดแก้ปัญหาได้ด้วยตัวเองอย่างถูกต้อง

ไคลด์ (Clyde, 1967 : 46) ได้กล่าวว่า ลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจควรมีความใกล้เคียงกับชีวิตประจำวันและสถานการณ์ที่สร้างขึ้นเป็นปัญหาควรใช้ภาษาหรือบรรยายในลักษณะที่ผู้แก้ปัญหามีประสบการณ์มา ไม่ควรเป็นปัญหาธรรมดาทั่ว ๆ ไป

เฟอส์ และ คณะ (Fehr and other, 1972 : 57) ได้กล่าวว่า เทคนิคหนึ่ง ซึ่งจะช่วยในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ คือ การให้นักเรียนได้ช่วยกันสร้างปัญหาขึ้นมาเอง

4. ขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสภาพปัญหาที่ประกอบด้วยสถานการณ์ ถ้อยคำหรือข้อความและตัวเลข โดยต้องการคำตอบเป็นปริมาณหรือตัวเลข ดังนั้น การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์จึงต้องคำนึงการให้เหมาะสมกับสภาพปัญหาเหล่านี้ ดังนั้นนักวิชาการหลายท่านได้เสนอแนะวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้เป็นลำดับขั้นตอนดังนี้

โพลยา (Polya, 1957 : 6 – 7) ได้เสนอลำดับขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้นตอน สรุปได้ดังนี้

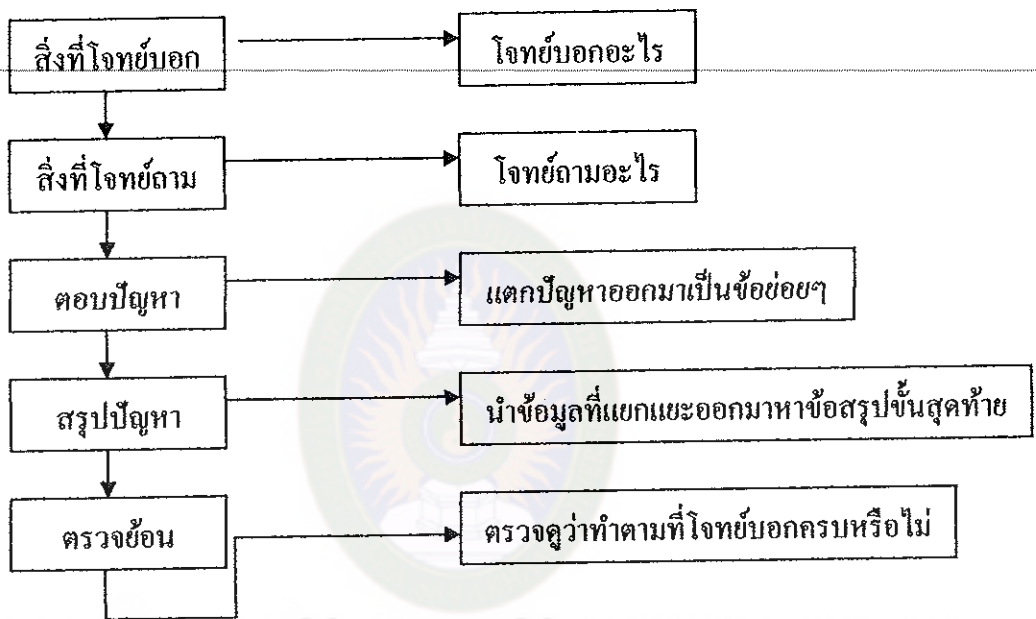
1. การทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ ทำความเข้าใจคำที่มีอยู่ในปัญหานั้นและสรุปปัญหานั้นออกมาเป็นภาษาของตนเองได้ บอกได้ว่าปัญหาถามอะไร สิ่งที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง นอกจากนั้นสามารถวาดภาพหรือเขียนแผนผังเพื่อช่วยให้เข้าใจปัญหานั้นได้

2. การวางแผนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ต้องพิจารณาหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้กับสิ่งที่โจทย์ถาม ซึ่งผู้แก้ปัญหาก็ต้องทบทวนความรู้ต่าง ๆ ที่จะต้องนำมาใช้ในการแก้ปัญหานั้น ๆ

3. การดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่นำวิธีที่เลือกไว้ไปใช้ในการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์ให้เป็นผลสำเร็จ โดยใช้ทักษะทางการคำนวณเข้ามาช่วยในการหาคำตอบ

4. การตรวจสอบวิธีการและคำตอบ เพื่อความมั่นใจว่าคำตอบที่ได้นั้นถูกต้อง ซึ่งอาจจะทำให้เกิดความคิดที่จะดัดแปลงวิธีการแก้ปัญหาให้ง่าย สั้น และชัดเจนยิ่งขึ้น รวมทั้ง อาจจะเกิดความคิดที่จะนำไปสู่การคิดแปลงสำหรับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ได้

ยูพิน พิพิธกุล (2530 : 45) ได้เสนอขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้



คูรูวิก (Krulik : 1987 : 87) ได้เสนอลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 5 ขั้นตอน สรุปได้ดังนี้

1. การอ่าน โจทย์ (Read) ประกอบด้วย การทวนปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วย ภาษของตนเอง การบอกว่าโจทย์ถามอะไร โจทย์กำหนดอะไรมาให้และการเขียนข้อมูลที่สำคัญที่โจทย์กำหนดมาให้
2. การสำรวจรายละเอียดของปัญหาคณิตศาสตร์ (Explore) ประกอบด้วย การจัดระบบข้อมูล การบอกว่าข้อมูลเพียงพอหรือไม่ การบอกว่าข้อมูลใดจำเป็นหรือข้อมูลใดไม่จำเป็นต้องใช้ การวาดรูปไปอะแกรมและการเขียนแผนภูมิหรือตาราง
3. การเลือกวิธี (Select a Strategy) ประกอบด้วย การพิจารณาปัญหาทางคณิตศาสตร์ในข้อนั้น ๆ ว่า คล้ายกับปัญหาที่เคยพบมาหรือไม่ การคาดคะเนว่าวิธีการใดจะนำมาใช้แก้ปัญหาได้ และการแบ่งปัญหาออกเป็นส่วนย่อย ๆ เพื่อเตรียมการแก้ปัญหาในกรณีที่เป็นปัญหาสลับซับซ้อน

4. การลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Solve) ประกอบด้วย การดำเนินการตามแผนและการใช้ทักษะทางการคำนวณ

5. การพิจารณาคำตอบและการขยายผล (Review and Extend) ประกอบด้วย การทบทวนคำตอบ การพิจารณาข้อความของปัญหาบางตอนที่น่าสนใจ และการอภิปรายการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ซุซแคม (Suydam, 1980 : 44) ได้กล่าวว่า ลักษณะของการแก้ปัญหาโดยทั่วไป ประกอบด้วยกระบวนการ 4 ขั้นตอน คือ

1. การทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่ทำให้ทราบสถานการณ์ของปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหาควรคิดแปลงปัญหานั้นใหม่ด้วยตัวเอง โดยการเขียน พุด หรือเพียงแต่คิดเท่านั้นก็ได้
2. วางแผนวิธีการแก้ปัญหา ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้ คือ
 - 2.1 แยกปัญหาออกเป็นข้อย่อย ๆ โดยระบุว่าข้อมูลใดที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งใดที่ไม่ทราบค่า
 - 2.2 ระลึกลึถึงสิ่งที่ได้เรียนรู้ไปแล้วว่า มีประเด็นใดที่เกี่ยวข้องกับการหาคำตอบจากโจทย์ใดบ้าง
 - 2.3 ตั้งสมมติฐานจากแนวความคิดที่จะนำไปสู่การหาคำตอบ
3. ดำเนินการแก้ปัญหตามขั้นตอนดังต่อไปนี้
 - 3.1 แปลงประโยคภาษาให้เป็นประโยคทางคณิตศาสตร์หรือสร้างสิ่งที่ใช้แทนสถานการณ์ในปัญหานั้น ๆ
 - 3.2 วิเคราะห์ประโยคให้เป็นปัญหาย่อย ๆ เพื่อจะนำไปสู่การหาคำตอบได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น
 - 3.3 ค้นหาคำตอบตามที่วางแผนไว้
4. ตรวจสอบปัญหาและคำตอบว่าสอดคล้องกันหรือไม่โดยปฏิบัติดังนี้
 - 4.1 ตรวจสอบคำตอบที่ได้เทียบกับปัญหา
 - 4.2 พิสูจน์ว่าคำตอบที่ได้นั้นถูกต้อง โดยคำตอบนี้ไม่ค้านกับสมมติฐานที่ตั้งไว้หรือคำตอบที่คิดไว้อย่างคร่าว ๆ
 - 4.3 ค้นหาวิธีการอื่นในการหาคำตอบที่สั้นและสะดวกที่สุด

จากขั้นตอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของนักการศึกษาหลายท่านที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น จะเห็นได้ว่ามีลักษณะของขั้นตอนที่แตกต่างกันออกไปแต่เมื่อพิจารณาอย่างวิเคราะห์จะพบว่า มีรายละเอียดที่คล้ายคลึงกับขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา ซึ่งสามารถสรุปได้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. การศึกษาโจทย์ปัญหา วิเคราะห์ข้อมูลที่โจทย์ให้มา
2. วางแผนและหาทางเลือกในการแก้โจทย์ปัญหา
3. ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหาตามแผนที่วางไว้เพื่อหาคำตอบ
4. การตรวจสอบวิธีการตามขั้นตอนและคำตอบที่ได้

จากการประมวลเอกสารดังกล่าวข้างต้นสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หมายถึงสถานการณ์โจทย์ปัญหาที่ประกอบไปด้วยภาษาและตัวเลขที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันซึ่งผู้แก้ปัญหาต้องอาศัยความรู้ ทักษะ ตลอดจนประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องมาประกอบการตัดสินใจวางแผนแก้ปัญหาด้วยตนเองเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบในเชิงปริมาณหรือตัวเลข มีขั้นตอนการแก้ปัญหาดังนี้ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผนและขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบที่ได้

ความผิดพลาดทางการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

1. ความหมาย

คำว่า “ความผิดพลาด” มีผู้ใช้คำนี้แตกต่างกันหลายคำด้วยกัน เช่น ข้อบกพร่อง ความคลาดเคลื่อน เป็นต้น โดยมีความหมายต่าง ๆ กันดังนี้

อรรถ ชูษุภระเคื่อง (2534 : 6) ได้ให้ความหมายว่า ความคลาดเคลื่อน คือ ความผิดพลาด ความเชื่อที่ผิด ความคิดเห็นที่ผิด การกระทำที่ผิด หรือทำไม่ถูก เกิดข้อผิดพลาด

วรรณรัตน์ วิบูลสุข (2539 : 7) ได้สรุปความหมายของข้อบกพร่องหรือความผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง ข้อผิดพลาดหรือสิ่งที่เป็นปัญหาและอุปสรรคต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ทำให้ผลการเรียนไม่บรรลุตามวัตถุประสงค์

พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน (2542 : 601) ได้ให้ความหมายของคำว่า ความผิดพลาด หรือข้อบกพร่อง ไว้ว่า ไม่ครบหรือไม่บริบูรณ์เท่าที่ควรเป็นหรือควรมี

ฮอว์นบี (Hornby ,Albert Sydney. 2548 : 401) ได้ให้ความหมายของข้อบกพร่องไว้ในพจนานุกรม Oxford ว่า ข้อบกพร่องหมายถึงลักษณะของสิ่งที่ไม่ดี หรือการขาดหายของสิ่งที่ยั่งยืน

โจนาธาน แอล โกลแมน (Jonathan L. Goldman, Project editor ; Andrew N. Sparks, senior editor. 1996 : 226) ได้ให้ความหมายของข้อบกพร่องไว้ในพจนานุกรมของ Webster' new world ว่าข้อบกพร่อง หมายถึง ส่วนประกอบหรือลักษณะของผลรวมมีน้อยกว่าสิ่งที่ต้องการ

กล่าวโดยสรุปแล้วความผิดพลาด หมายถึง สิ่งที่เป็นปัญหา หรือเป็นอุปสรรคในการเรียนคณิตศาสตร์และสรุปได้ว่าความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหา หมายถึง ปัญหาหรืออุปสรรคที่ทำให้นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหา หรือไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งแบ่งประเภทของความผิดพลาดเป็น 4 ด้าน อิงตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของ โพลยา ดังนี้

1. ความผิดพลาดด้านการอ่านแปลความจากโจทย์
2. ความผิดพลาดด้านการวางแผน
3. ความผิดพลาดด้านการคิดคำนวณ
4. ความผิดพลาดด้านการตรวจสอบ

2. ความผิดพลาดด้านการอ่านแปลความจากโจทย์

คำว่า ความผิดพลาดด้านการอ่านแปลความจากโจทย์รวมถึงขั้นตอนการอ่านแปลความจากโจทย์ มีผู้ใช้นี้แตกต่างกันหลายคำด้วยกัน ดังนี้

นิทสะ มอบโซวิทซ์ ฮาดะ และ คณะ (Nitsa Movshovitz-Hadar and other. 1987 ; อ้างถึงใน ปริญา บัววัง โปง. 2535 : 7) ได้ให้ความหมายว่า ข้อผิดพลาดด้านการตีความ (Misinterpreted language) หมายถึง ตีความจากประโยคภาษาเป็นประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง ไม่เข้าใจในความหมายของสัญลักษณ์ที่เขียน

อัมพร ม้าคนอง (2536 : 23-24) ได้ให้ความหมายของความผิดพลาดด้านการอ่านแปลความจากโจทย์ คือ การแปลความหมายจากประโยคภาษามาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง หรือการนำข้อมูลจากโจทย์มาใช้ผิด

สำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ (2536 : 11 – 12) ได้กล่าวว่า ข้อบกพร่องในการอ่านทำความเข้าใจโจทย์ คือ นักเรียนไม่เข้าใจความหมายของคำศัพท์ ไม่เข้าใจกฎเกณฑ์และหลักการทางคณิตศาสตร์ บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ผิดหรือบอกไม่ครบ ไม่สามารถแปลงข้อความจากโจทย์เป็นวิธีการได้ ไม่เข้าใจสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

พรนภา ไพโรจน์ภักดิ์ (2542 : 12) ได้สรุปความหมายของความผิดพลาดด้านทักษะการอ่านเพื่อวิเคราะห์โจทย์ปัญหาไว้ว่า เป็นความผิดพลาดในการอ่านโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์แล้วทำการวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนด สิ่งที่โจทย์ถาม

โพลยา (Polya. 1957 : 5 – 6) ได้กล่าวว่า การทำความเข้าใจโจทย์เป็นการวิเคราะห์ประเด็นของปัญหาว่า โจทย์ต้องการทราบอะไร โจทย์ให้ข้อมูลอะไรบ้าง เริ่มต้นให้นักเรียนอ่านพิจารณาโจทย์ปัญหา และบอกรายละเอียดทั้งหมด ตามความเข้าใจของนักเรียนเอง

กล่าวโดยสรุปแล้วความผิดพลาดด้านการอ่านแปลความจากโจทย์ หมายถึง ความผิดพลาดในการกำหนดความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการถามได้ไม่ถูกต้องหรือไม่ครบ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากลักษณะต่อไปนี้

1. บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ถูกต้อง
2. บอกสิ่งที่โจทย์ต้องการถามไม่ถูกต้อง
3. การกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้อง

3. ความผิดพลาดในด้านการวางแผน

การวางแผนเป็นขั้นตอนหนึ่งของการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งความผิดพลาดในด้านการวางแผนได้มีให้ความหมายถึงความผิดพลาดในการวางแผนรวมถึงความหมายของการวางแผนไว้ดังนี้

สำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ (2536: 8) ได้กล่าวว่า ข้อบกพร่องในการกำหนดวิธีหาคำตอบ คือ เขียนขั้นตอนการคิดไม่ครบ ไม่ใส่เครื่องหมายแสดงการคิด เขียนคำอธิบายไม่สอดคล้องกับตัวเลข เขียนข้อความโดยไม่สื่อความหมาย เขียนประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง เขียนไม่สมบูรณ์

พรนภา ไพโรจน์ภักดิ์ (2542: 34) ได้สรุปความหมายของความผิดพลาดด้านการวางแผนไว้ว่า เป็นความผิดพลาดในทักษะการแปลงภาษาโจทย์ให้เป็นภาษาคณิตศาสตร์ หมายถึง ไม่มีความสามารถในการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ได้อย่างถูกต้อง หรือความผิดพลาดในการนำหลักการหรือทฤษฎีที่เคยเรียนรู้มาแล้วมาประยุกต์ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

โพลยา (Polya, 1957: 5 – 6) ได้กล่าวว่า ขั้นตอนการวางแผน เป็นขั้นตอนที่เชื่อมโยงความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลกับสิ่งที่ต้องการทราบ ครูผู้สอนควรที่จะแสดงบทบาทไปพร้อม ๆ กับนักเรียนร่วมกันวางแผนแก้ปัญหา เป็นการฝึกให้นักเรียนเรียนรู้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาหลากหลายวิธี

กล่าวโดยสรุปแล้วความผิดพลาดด้านการวางแผน หมายถึง ความผิดพลาดในการกำหนดความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการออกมาในรูปแบบของประโยคสัญลักษณ์ สมการ อสมการ หรือข้อความทางคณิตไม่ถูกต้อง ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากลักษณะต่อไปนี้

1. กำหนดความสัมพันธ์ของตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้อง

2. การสร้างอสมการแทนประโยคภาษาไม่ถูกต้อง

4. ความผิดพลาดด้านการคิดคำนวณ

การคิดคำนวณเป็นขั้นตอนหนึ่งของการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิต ดังนั้นการศึกษาถึงความหมายของความผิดพลาดด้านการคิดคำนวณ รวมถึงการคิดคำนวณจึงเป็นสิ่งสำคัญยิ่ง ซึ่งก็มีผู้ให้ความหมายไว้ต่าง ๆ กัน ดังนี้

สำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ (2536 : 45 – 46) ได้กล่าวว่า ข้อบกพร่องในการคำนวณหาคำตอบ คือ การผิดพลาดในการบวก การลบ การคูณ และการหารผิด รวมถึงการใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง

ทัศนีย์ ชื่นยอง (2541 : 18 – 19) ได้กล่าวว่า ความบกพร่องในการคิดคำนวณ คือ ความผิดในการใช้สมบัติ กฎ สูตรและนิยาม และการหาคำตอบด้วยกระบวนการที่ผิด ซึ่งทำให้ได้คำตอบที่ไม่ถูกต้อง

พรนภา ไพโรจน์ภักดิ์ (2542 : 9 – 10) ได้ให้ความหมายของความผิดพลาดด้านการคิดคำนวณไว้ว่า เป็นความผิดพลาดในการคิดคำนวณเกี่ยวกับตัวเลขได้อย่างคล่องแคล่ว รวดเร็ว และถูกต้อง

โพลยา (Polya, 1957 : 5 – 6) ได้กล่าวว่า ขั้นการปฏิบัติตามแผนหรือการคิดคำนวณ เป็นการปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ นักเรียนจำเป็นต้องมีทักษะการคิดคำนวณ เช่น การบวก การลบ การคูณ การหาร การยกกำลัง การแก้สมการ เป็นต้น

กล่าวโดยสรุปแล้วความผิดพลาดด้านการคิดคำนวณ หมายถึง ความผิดพลาดในการคำนวณ กระบวนการในการหาคำตอบ ของโจทย์ปัญหาข้อนั้น ๆ ได้ไม่ถูกต้อง ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากลักษณะต่อไปนี้คือ ขาดความเข้าใจในหลักเลขคณิตเบื้องต้น ขาดทักษะในหลักพีชคณิตเบื้องต้นในการแก้สมการและอสมการ ทำผิดขั้นตอนที่ถูกต้องในการคำนวณ และการขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ

5. ความผิดพลาดด้านการตรวจสอบ

การตรวจเป็นขั้นตอนหนึ่งของการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิต ดังนั้นการศึกษาถึงความหมายของความผิดพลาดด้านการตรวจสอบ รวมถึงการตรวจสอบจึงเป็นสิ่งสำคัญยิ่ง ซึ่งก็มีผู้ให้ความหมายไว้ต่าง ๆ กัน ดังนี้

สำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ (2536 : 15) ได้กล่าวว่า ข้อบกพร่องในการสรุปคำตอบ หรือการตรวจสอบ คือ ข้อบกพร่องไม่เขียนหน่วยคำตอบ

เขียนหน่วยคำตอบผิด สะเพร่าในการเขียนคำตอบรวมทั้งการเขียนคำตอบผิด ทั้ง ๆ ที่ทำถูกต้องแล้ว

พรนภา ไพโรจน์ภักดิ์ (2542 : 13) ได้ให้ความหมายของความผิดพลาดด้านการตรวจสอบไว้ว่า เป็นความผิดพลาดในการตรวจสอบคำตอบกับโจทย์เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบ หรือการสรุปคำตอบที่ไม่ถูกต้อง

โพลยา (Polya. 1957 : 5 – 6) ได้กล่าวว่า การตรวจสอบ (Looking back) ขั้นนี้เป็นการตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหาว่าถูกต้องหรือไม่ โดยพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ และพิจารณาว่าน่าจะมีคำตอบอื่นหรือวิธีการคิดเป็นอย่างอื่นได้อีกหรือไม่

สรุปได้ว่า ความผิดพลาดด้านการตรวจสอบ หมายถึง ความผิดพลาดในการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ และพิจารณาว่าน่าจะมีคำตอบอื่นหรือวิธีการคิดเป็นอย่างอื่นได้อีกหรือไม่ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากลักษณะต่อไปนี้ คือ ไม่มีการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบไม่ถูกต้องตามกระบวนการตรวจสอบ สรุปคำตอบไม่ถูกต้องหรือสรุปคำตอบไม่ครบทุกกรณี

การวิเคราะห์ความผิดพลาดทางการแก้โจทย์ปัญหา

1. ความหมายของการวิเคราะห์

การวิเคราะห์เป็นกระบวนการหนึ่งที่มีความสำคัญในการวิเคราะห์ความผิดพลาด ดังนั้นการศึกษาถึงความหมายของการวิเคราะห์ จึงเป็นสิ่งสำคัญยิ่ง ซึ่งก็มีผู้ให้ความหมายไว้ต่าง ๆ กัน ดังนี้

เบนจามิน เอส บลูม (Benjamin S. Bloom ; อ้างถึงในอักษร สวัสดิ์. 2542 : <http://th.wikipedia.org/wiki>) กล่าวว่า การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถและทักษะที่สูงกว่าความเข้าใจ และการนำไปปรับใช้ โดยมีลักษณะเป็นการแยกแยะสิ่งที่จะพิจารณาออกเป็น ส่วนย่อย ที่มีความสัมพันธ์กัน รวมทั้งการสืบค้นความสัมพันธ์ของส่วนต่าง ๆ เพื่อดูว่า ส่วนประกอบปลีกย่อยนั้นสามารถเข้ากันได้หรือไม่ อันจะช่วยให้เกิดความเข้าใจต่อสิ่งหนึ่งสิ่งใดอย่างแท้จริง

ภาทิพ ศรีสุทธี (2550 : <http://www.panyathai.or.th/wiki>) ได้ให้ความหมายว่า การวิเคราะห์ หมายถึง การแยกแยะทางความคิด หรือทางวัตถุของสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือเรื่องใดเรื่องหนึ่ง เพื่อให้เห็น องค์ประกอบ เพื่อศึกษาแต่ละองค์ประกอบหรือว่าแยกแยะให้เห็นเพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ ขององค์ประกอบต่าง ๆ ที่ทำให้เกิดสิ่งนั้น หรือเรื่องนั้น

สุภาณี เสงศรี (2552 : http://www.analasis.ispace.in.th/WBI_aoi/webpage/2.html) กล่าวว่า การวิเคราะห์ หมายถึง การแยกแยะทางความคิด หรือทางวัตถุของสิ่งใดสิ่งหนึ่ง หรือเรื่องใดเรื่องหนึ่งเพื่อให้เห็นองค์ประกอบเพื่อศึกษาแต่ละองค์ประกอบหรือว่าแยกแยะเพื่อให้เห็นเพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ ขององค์ประกอบต่าง ๆ ที่ทำให้เกิดสิ่งนั้น หรือเรื่องนั้น

พีรศักดิ์ วัลย์รัตน์ (2552 : <http://www.pantown.com/group.php?display=content&id=36749&name=content31&area=3>) การคิดวิเคราะห์ (Analysis Thinking) หมายถึง ความสามารถในการจำแนก แยกแยะองค์ประกอบต่าง ๆ ของสิ่งหนึ่งสิ่งใดซึ่งอาจจะเป็นวัตถุ สิ่งของ เรื่องราวหรือเหตุการณ์และ หาความสัมพันธ์เชิงเหตุผล ระหว่างองค์ประกอบเหล่านั้น เพื่อ ค้นหาสภาพความเป็นจริง หรือสิ่งที่สำคัญ คำถามที่มักใช้กับการคิดวิเคราะห์ คือ SW 1H ประกอบด้วย

What (อะไร)

Where (ที่ไหน)

When (เมื่อใด)

Why (ทำไม)

Who (ใคร)

How (อย่างไร)

ดังนั้น การคิดวิเคราะห์เป็นการจัดการกับข้อมูลในสถานการณ์ แล้วนำไปสู่การคิดระดับสูง เช่น การคิดอย่างมีวิจารณญาณ (Critical Thinking) การคิดเพื่อตัดสินใจ (Decision Making) การคิดแก้ปัญหา (Problem Solving) และการคิดสร้างสรรค์ (Creative Thinking) ซึ่งได้มาจากพื้นฐานการคิดสังเคราะห์

กล่าวโดยสรุปแล้วการวิเคราะห์ หมายถึง การแยกแยะสิ่งที่ต้องการพิจารณาออกเป็น ส่วนย่อย เพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ขององค์ประกอบต่าง ๆ ซึ่งความสัมพันธ์นั้นจะเป็นแนวทาง ในการค้นหาคำตอบ และนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้อง

จากความหมายของการวิเคราะห์ซึ่งเป็นกระบวนการของการวิเคราะห์ความผิดพลาด สามารถสรุปได้ว่า การวิเคราะห์ความผิดพลาดทางการแก้ไข้ปัญหา หมายถึง การค้นหาความผิดพลาดทางการแก้ไข้ปัญหาในเรื่อง อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนเป็นรายบุคคล ที่เป็นปัญหาหรืออุปสรรคที่ทำให้นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ไข้ปัญหา ใน 4 ด้าน คือ

1. ความผิดพลาดด้านการอ่านแปลความจากโจทย์ หมายถึง ความผิดพลาดในการกำหนดความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการถามได้ไม่ ถูกต้องหรือไม่ครบ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากลักษณะต่อไปนี้

- 1.1 บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ถูกต้อง
- 1.3 บอกสิ่งที่โจทย์ต้องการถามไม่ถูกต้อง
- 1.3 การกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้อง
2. ความผิดพลาดด้านการวางแผน หมายถึง ความผิดพลาดในการกำหนดความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการออกมาในรูปแบบของประโยคสัญลักษณ์ สมการ อสมการ หรือข้อความทางคณิตไม่ถูกต้อง ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากลักษณะต่อไปนี้
 - 2.1 กำหนดความสัมพันธ์ของตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้อง
 - 2.2 การสร้างสมการแทนประโยคภาษาไม่ถูกต้อง
3. ความผิดพลาดด้านการคิดคำนวณ หมายถึง ความผิดพลาดในการคำนวณ กระบวนการในการหาคำตอบ ของโจทย์ปัญหาข้อนั้น ๆ ได้ไม่ถูกต้อง ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากลักษณะต่อไปนี้
 - 3.1 ขาดความเข้าใจในหลักเลขคณิตเบื้องต้น
 - 3.2 ขาดทักษะในหลักพีชคณิตเบื้องต้นในการแก้สมการและอสมการ
 - 3.3 ทำผิดขั้นตอนที่ถูกต้องในการคำนวณ
 - 3.4 ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ
4. ความผิดพลาดด้านการตรวจสอบ หมายถึง ความผิดพลาดในการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ และพิจารณาว่าน่าจะมีคำตอบอื่นหรือวิธีการคิดเป็นอย่างอื่นได้อีกหรือไม่ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากลักษณะต่อไปนี้
 - 4.1 ไม่มีการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ
 - 4.2 การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบไม่ถูกต้องตามกระบวนการตรวจสอบ
- 4.3 สรุปคำตอบไม่ถูกต้องหรือสรุปคำตอบไม่ครบทุกกรณี

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. งานวิจัยภายในประเทศ

สำหรับผลการศึกษาในประเทศไทยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนได้มีผู้นำกระบวนการวิเคราะห์ความผิดพลาดมาใช้ เพื่อหาความผิดพลาดของนักเรียนและทำการพัฒนานักเรียน ดังนี้

ประเสริฐ พิณทอง (2548 : 109 – 110) ได้ทำการสร้างแบบทดสอบเพื่อวินิจฉัยทักษะการแก้โจทย์ปัญหา เรื่องการคูณและการหาร สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 สังกัดสำนักงานการประถมศึกษาจังหวัดอุบลราชธานี เพื่อวินิจฉัยการเรียนคณิตศาสตร์ด้านทักษะการแก้โจทย์ปัญหา เรื่องการคูณและการหาร และเพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบเพื่อวินิจฉัยทักษะการแก้โจทย์ปัญหา เรื่องการคูณและการหาร ผลการวิจัยพบว่า ความบกพร่องที่พบมากที่สุดคือ สับสนในขั้นตอนการหาร คิดเป็นร้อยละ 43.33 รองลงมา คือ ใช้วิธีการในการหาคำตอบที่ผิด คิดเป็นร้อยละ 40 รองลงมาตามลำดับ คือ การบวกตัวคูณผิด คิดเป็นร้อยละ 30.30 คูณเลขไม่ครบทุกหลักและสับสนเกี่ยวกับประโยคสัญลักษณ์ คิดเป็นร้อยละ 26.67

สุรีย์ ฤทธิเทพ และคณะ (2548 : 69) ได้ทำการวิจัย เรื่องการศึกษาข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวตามตัวแบบการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 สังกัดโรงเรียนมัธยมศึกษา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาสระแก้ว เขต 1 เพื่อ 1) ศึกษาข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแบบการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 2) เปรียบเทียบข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวตามตัวแบบการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำแนกตามเพศ 3) เปรียบเทียบข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวตามตัวแบบการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนชายและนักเรียนหญิงมีข้อบกพร่องการดำเนินการแก้ปัญหามากที่สุด รองลงมาเป็นการตรวจสอบคำตอบ การวางแผนการแก้ปัญหา การทำความเข้าใจโจทย์ตามลำดับ ส่วนนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงปานกลาง และต่ำ มีข้อบกพร่องเรื่องดำเนินการแก้ปัญหามากที่สุด รองมาเป็นการตรวจสอบปัญหา การวางแผนแก้ปัญหา และการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา ตามลำดับ 2) นักเรียนชายและหญิง มีข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวตามแบบการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ .05 3) นักเรียนที่มี

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ มีข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้น ตัวแปรเดียวตามตัวแบบการแก้โจทย์ปัญหาของ โพลยาแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05

นพวรรณ ทับทอง (2548 : 83 – 85) ได้ทำการวิจัยเรื่องการพัฒนาแบบทดสอบวินิจฉัย ข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึง 3 เพื่อ 1) สร้างแบบทดสอบวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 2) เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบที่สร้างขึ้นในด้านความตรงตามเนื้อหา ตรงตามเกณฑ์ ความเที่ยง แบบสอดคล้องภายใน ความยากและอำนาจจำแนกของข้อสอบ ผลการวิจัยสรุปคุณภาพของแบบทดสอบที่สร้างขึ้นได้วัดมีความตรงตามเนื้อหา ตรงตามเกณฑ์เมื่อเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ ข้อบกพร่องของนักเรียนกับผลสัมฤทธิ์นักเรียนและผลการสอบถามครูผู้สอน ค่าความยากของข้อสอบมีค่า 0.41 – 0.96 ค่าอำนาจจำแนกไม่คิดลบ แบบทดสอบที่ค่าความเที่ยงแบบสอดคล้องภายในเป็น 0.92

จักริน บัณฑิตชน (2548 : 39) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการแก้ โจทย์ปัญหาสมการเอกซ์โพเนนเชียล ของนักเรียนช่วงชั้นที่ 4 จังหวัดสงขลา การวิจัยครั้งนี้มี จุดประสงค์เพื่อศึกษาข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเอกซ์โพเนนเชียลของนักเรียนช่วง ชั้นที่ 4 จังหวัดสงขลา ผลการวิจัยพบว่าจำนวนข้อบกพร่องที่พบในการแก้โจทย์ปัญหาสมการ เอกซ์โพเนนเชียล จำแนกตามประเภทของข้อบกพร่อง เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย คือ ข้อบกพร่องทางเทคนิคการทำ คิดเป็นร้อยละ 27.26 ข้อบกพร่องจากการใช้สมบัติเลขยกกำลัง คิดเป็นร้อยละ 14.85 ข้อบกพร่องที่ไม่มีรูปแบบแน่นอน คิดเป็นร้อยละ 14.63 ข้อบกพร่องของ การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 12.58 ข้อบกพร่องจากการอ้างอิงวิธีการหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ คิดเป็นร้อยละ 2.53 ข้อบกพร่องจากการ ใช้ข้อมูล คิดเป็นร้อยละ 2.27 และข้อบกพร่องจากการบิดเบือนทฤษฎีบท สูตร และนิยาม คิด เป็นร้อยละ 0.49

สมพร จันทวงศ์ (2548 : 113 – 114) ได้ทำการวิจัยเรื่องการศึกษาความสามารถในการ แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องการบวก ลบ คูณ หาร ทศนิยม ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 – 6 โดยการใช้ค่ายคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า ประสิทธิภาพค่ายคณิตศาสตร์ในการแก้โจทย์ ปัญหาที่มีประสิทธิภาพเท่ากับ 83.12/ 82.28 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงขึ้น อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์กลุ่มทดลอง สูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และเจตคติของกลุ่มทดลองหลังเรียนสูง กว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

วิรัตน์ บัวกิ่ง (2549 : 153 – 154) การสร้างแบบทดสอบวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและระบบสมการเชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในเขตพื้นที่การศึกษาอุบลราชธานี เขต 5 ผลการวิจัยพบว่า

1) ได้แบบทดสอบวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและระบบสมการเชิงเส้น 2) แบบทดสอบที่สร้างขึ้นมีค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหากับพฤติกรรมย่อยในการแก้โจทย์ปัญหาตั้งแต่ .80 ถึง 1.00 มีค่าดัชนีความสอดคล้อง ระหว่างพฤติกรรมย่อยกับข้อคำถามและน้ำหนักในการให้คะแนนเท่ากับ 1.00 มีค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างสถานการณ์ของ โจทย์ปัญหากับลักษณะของ โจทย์ปัญหาตามที่หลักสูตรกำหนดเท่ากับ 1.00 มีค่าความยากตั้งแต่ .49 ถึง .57 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .21 ถึง .36 มีความเป็นปรนัยในการตรวจให้คะแนนทั้งรายชื่อและทั้งฉบับ โดยมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ตั้งแต่ .97 ถึง 1.00 มีค่าความเชื่อถือได้เท่ากับ .97 และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ .22 3) ผลการศึกษาข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหา เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและระบบสมการเชิงเส้น พบว่านักเรียนมีข้อบกพร่องจำนวน 296 คน คิดเป็นร้อยละ 78.31 บกพร่องขั้นที่ 1 ขึ้นทำความเข้าใจปัญหา จำนวน 82 คน คิดเป็นร้อยละ 27.70 บกพร่องขั้นที่ 2 ขึ้นวางแผนแก้ปัญหา จำนวน 176 คน คิดเป็นร้อยละ 59.46 บกพร่องขั้นที่ 3 ขึ้นดำเนินการตามแผน จำนวน 271 คน คิดเป็นร้อยละ 91.55 และบกพร่องขั้นที่ 4 ขึ้นตรวจสอบคำตอบ จำนวน 289 คิดเป็นร้อยละ 97.63

อำพร จุลพล (2550 : 98 – 100) ได้ทำการวิจัยเรื่องการสร้างแบบทดสอบอัตนัยเพื่อวินิจฉัยการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า 1) ด้านการสร้างแบบทดสอบ ประเด็นสำคัญของการสร้างได้ศึกษาเกี่ยวกับขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาทั้งในและต่างประเทศ รวมทั้งได้ศึกษาสภาพจริงจากในพื้นที่ ได้ใช้แนวคิดของ สสวท. ในการกำหนดขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาและในการสร้างพฤติกรรมย่อย แบบทดสอบอัตนัยเพื่อวินิจฉัยการแก้โจทย์ปัญหา 2) ด้านคุณภาพของแบบทดสอบมีความตรงตามเนื้อหา มีค่าความยากง่าย .67 - .80 มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .64 - .98 ค่าความเที่ยงของแบบทดสอบมีค่าเท่ากับ .99 ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ .15 ค่าความเที่ยงของการตรวจให้คะแนนเท่ากับ .99 3) ด้านจุดบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาพบว่านักเรียนที่มีจุดบกพร่องจำนวน 129 คน ไม่มีจุดบกพร่อง 281 คน จุดบกพร่องที่ค้นพบจำแนกตามอัตราส่วนระหว่างความถี่ของจุดบกพร่องในแต่ละขั้นตอนกับความถี่ของจุดบกพร่องทั้งหมดที่เป็นไปได้ในแต่ละขั้นตอน ของการแก้โจทย์ปัญหาเรียงลำดับจากขั้นตอนที่มีอัตราส่วนของจุดบกพร่องมาก ไปหาขั้นตอนที่มีอัตราส่วนของจุดบกพร่องน้อย คือ ขั้นตอนตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นปฏิบัติตามขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหา ขั้นการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา จุดบกพร่องที่ค้นพบ จำแนกตามพฤติกรรมย่อยในการแก้โจทย์ปัญหาที่พบว่ามีจุดบกพร่องมาก 5 อันดับ เรียงจากมากไปหาน้อย คือ เขียนประโยคสัญลักษณ์หรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนประเด็นปัญหาที่ต้องการศึกษาซึ่งอาจอยู่ในรูปกราฟ สมการเชิงเส้นได้อย่างถูกต้อง นำสมบัติการเท่ากันของการบวก การคูณ เพื่อหาค่าของตัวแปรได้อย่างถูกต้อง ระบุประเด็นของปัญหาที่ต้องการศึกษาได้อย่างถูกต้อง ระบุตัวแปรของปัญหาที่ต้องการศึกษาได้อย่างถูกต้อง ระบุตัวแปรแทนประเด็นปัญหาได้อย่างถูกต้อง

อนุรักษ์ สุวรรณสนธิ (2550 : 63) ได้ทำการวิจัยเรื่องความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา โดยเน้นขั้นตอนการแก้ปัญหของโพลยา ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา 37.29 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 66.59 ของคะแนนสอบ จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด ซึ่งต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด แต่นักเรียนได้แสดงพัฒนาการในการแก้โจทย์ปัญหา เมื่อวิเคราะห์จากแบบฝึกหัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ และพฤติกรรมกรรมการแสดงออกในการทำกิจกรรมตามขั้นตอนการแก้ปัญหของโพลยา ตามแผนการจัดการเรียนรู้

วรนุช มาตระกูล (2551 : 85 - 86) การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุนวิทยาคม จังหวัดพะเยา การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ วินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ ทางด้านการตีความจากโจทย์ ด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม สมบัติ และการคิดคำนวณของนักเรียน ผลการวิจัยพบว่า ลักษณะของข้อบกพร่องที่พบ คือด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติ พบว่านักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานในด้านทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติมากที่สุด รองลงมาคือ จำทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติผิด ขาดทักษะในการเลือกทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติที่เหมาะสมมาใช้ และประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติ ไม่ถูกต้อง ข้อบกพร่องด้านการคิดคำนวณพบว่า นักเรียนขาดความเข้าใจในหลักเลขคณิตเบื้องต้นมากที่สุด รองลงมาคือ ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ การสรุปผลไม่ถูกต้องหรือสรุปผลไม่ครบทุกกรณี ทำผิดขั้นตอนที่ถูกต้องในการคิดคำนวณตามลำดับ ส่วนข้อบกพร่องด้านการตีความจากโจทย์พบว่านักเรียนนำข้อมูลในโจทย์มาใช้ผิด

ศศิณฑา กาละปลุก (2552 : 47 - 49) ได้ทำวิจัยการวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาสมการของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ โดยใช้กระบวนการวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิเวแมน เพื่อใช้กระบวนการวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิเวแมนวิเคราะห์ความผิดพลาดและสาเหตุของความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาสมการของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/2

จำนวน 10 คน ในโรงเรียนบ้านเมืองนะ อำเภอเชียงดาวจังหวัดเชียงใหม่ เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา ได้แก่ แบบทดสอบโจทย์ปัญหาสมการแบบเขียนตอบรายวันที่คัดมาจากรายการแบบทดสอบ แบบบันทึกการสัมภาษณ์ และแบบวิเคราะห์ความผิดพลาดรายคนผลการศึกษารูปได้ดังนี้ 1) ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาสมการของนักเรียนมีทั้งหมด 55 ความผิดพลาดซึ่งเป็นความผิดพลาดประเภทการเปลี่ยนรูป 21 ความผิดพลาด การทำความเข้าใจศัพท์เฉพาะ 20 ความผิดพลาด การสรุปตอบ 4 ความผิดพลาด และการใช้ทักษะกระบวนการ 4 ความผิดพลาด สำหรับความผิดพลาดจากการอ่านมี 3 ความผิดพลาด และความสะเพร่ามี 3 ความผิดพลาด 2) สาเหตุความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาสมการของนักเรียนแบ่งเป็น 4 ชั้น ดังนี้ ชั้นการอ่านและในชั้นการทำความเข้าใจศัพท์เฉพาะเกิดจากปัญหาด้าน การใช้ภาษาไทยในการสื่อสาร ชั้นการเปลี่ยนรูปเกิดจากนักเรียนกำหนดตัวแปรในสมการไม่ถูกต้อง และนักเรียนเผลอคำตอบผิดไว้ก่อนแล้วจึงสร้างสมการเพื่อให้ได้คำตอบตรงกับที่คาดคะเนเอาไว้ ชั้นการใช้ทักษะกระบวนการเกิดจากการคิดคำนวณเพียงเพื่อต้องการให้ได้คำตอบตรงกับที่คาดคะเนเอาไว้ การนำกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ผิด การตรวจสอบคำตอบผิด การคิดคำนวณที่ไม่ถูกต้อง และความสะเพร่า ชั้นการสรุปตอบเกิดจากความสะเพร่าในการสรุปตอบ ตามลำดับ

2. งานวิจัยต่างประเทศ

ในการวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหา ได้มีผู้ศึกษาและวิจัยหลายท่าน ดังนี้

บาบูกูรา (Babugura, 1986 : <http://www.lip.umi.com/dissertations/fullcit/8520498>) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์ข้อบกพร่องในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย จุดมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อจัดประเภทและวิเคราะห์รูปแบบข้อบกพร่องในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน 146 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบอัตนัยวิชาคณิตศาสตร์และเกณฑ์ข้อบกพร่องที่สร้างขึ้นตามเกณฑ์ของราล์ทซ์ ผลการวิจัยพบว่ามีความสัมพันธ์อย่างมาก ระหว่างรูปแบบของความบกพร่องที่แน่นอนกับผลสัมฤทธิ์ในวิชาคณิตศาสตร์ คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบทดสอบ จะเทียบได้กับรูปแบบของข้อบกพร่องในวิชาคณิตศาสตร์ และอายุอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ความถี่ของข้อบกพร่องในวิชาพีชคณิต กับเลขคณิตและเรขาคณิต มีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 แต่ข้อบกพร่องของแต่ละคนในวิชาเลขคณิต ไม่มีความสัมพันธ์กับวิชาเรขาคณิตที่ระดับ .01 และมีความแตกต่างกันของรูปแบบข้อบกพร่องที่เกิดจากกลุ่มที่ได้คะแนนสูงและกลุ่มที่ได้คะแนนต่ำ

มอบ โชวิทซ์ ฮาดะ และ คณะ (Movshovitz – Hadar and other. 1987 : 3 – 14) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์รูปแบบข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษาประเทศอิสราเอล กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 11 จำนวน 110 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย ผลการวิจัยพบว่าลักษณะข้อบกพร่องของนักเรียนในวิชาพีชคณิต สามารถจัดกลุ่มข้อผิดพลาดได้ 6 ด้านดังนี้ คือ 1) การใช้ข้อมูลผิด 2) ข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา 3) การอ้างอิงวิธีการหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ 4) การบิดเบือนทฤษฎีบทและบทนิยาม 5) ขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา และ 6) ความคลาดเคลื่อนในเทคนิคการทำ

แบรนโด และ คณะ (Blando and other. 1989 : 301 – 308) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์หารูปแบบและความคลาดเคลื่อนทางเลขคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 7 จำนวน 39 คน ของโรงเรียนขนาดกลางในรัฐซานฟรานซิสโก ได้สรุปข้อผิดพลาดทางการเรียนเลขคณิตไว้ 4 ด้าน คือ 1) ความผิดพลาดในการลำดับความสำคัญมากกว่า หรือการทำผิดลำดับขั้น เช่น บวกก่อนคูณ บวกก่อนหาร ลบก่อนหาร ละเลยความสำคัญของวงเล็บเป็นต้น 2) ความผิดพลาดในการทำผิดความหมาย เช่น หารแทนการบวก หรือคูณแทนการหารเป็นต้น 3) ความผิดพลาดอื่นๆ เช่น การปฏิเสธที่จะแก้ปัญหา และ 4) ความผิดพลาดที่ไม่มีรูปแบบแน่นอน เนื่องจากขาดความระมัดระวังในการคำนวณ

จากการศึกษาวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศดังกล่าวมาข้างต้น ซึ่งเป็นเรื่องเกี่ยวกับการค้นหาและการวิเคราะห์ รวมไปถึงการวินิจฉัยความผิดพลาด หรือข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ อันเนื่องจากสาเหตุหลายประการ เช่น นักเรียนไม่เข้าใจความหมายของคำศัพท์ ไม่เข้าใจกฎเกณฑ์และหลักการทางคณิตศาสตร์ บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ผิดหรือไม่ครบ ไม่สามารถแปลงข้อความจากโจทย์เป็นวิธีการได้ ไม่เข้าใจสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ เขียนขั้นตอนการคิดไม่ครบหรือไม่ใส่เครื่องหมายแสดงการคิด เขียนคำอธิบายไม่สอดคล้องกับตัวเลขหรือเขียนข้อความโดยไม่สื่อความหมาย เขียนประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้องหรือเขียนไม่สมบูรณ์ วิธีการคูณ การลบผิด ใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง ไม่เขียนหน่วยคำตอบหรือเขียนหน่วยคำตอบผิด สะเพร่าในการเขียนคำตอบคือการเขียนคำตอบผิด ทั้ง ๆ ที่ทำถูกต้องแล้ว ซึ่งผู้วิจัยเห็นว่าหากมีการวิเคราะห์ความผิดพลาดทางการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องอื่น ๆ ที่ยังเป็นปัญหาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน เช่น เรื่องโจทย์ปัญหาอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแล้ว น่าจะเป็นประโยชน์ในการนำไปเป็นแนวทางในการปรับปรุงการเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว รวมถึงการเรียนการสอนวิชา

คณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ ต่อไป ซึ่งจะส่งเสริมความเข้าใจในกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา นอกจากนี้ยังเป็นประโยชน์ต่อผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนอีกด้วย



มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY