บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่องวิธีการแก้สมการเชิงเส้นของนักเรียนช่วงชั้นที่ 4 อำเภอเมือง จังหวัดมหาสารคาม ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยได้นำเสนอตามลำดับ ดังนี้

1. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
    1.1 ความสำคัญ
    1.2 ธรรมชาติ / ลักษณะเฉพาะ
    1.3 วิสัยทัศน์การเรียนรู้
    1.4 คุณภาพของผู้เรียน
    1.5 สาระ
    1.6 มาตรฐานการเรียนรู้
    1.7 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ในสาระที่ 4 : พีชคณิต
    1.8 สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง ในสาระที่ 4 : พีชคณิต
2. พีชคณิต
    2.1 ความหมายของพีชคณิต
    2.2 ความสำคัญของพีชคณิต
    2.3 พัฒนาการของพีชคณิต
    2.4 โครงสร้างของพีชคณิต
3. สมการเชิงเส้น
    3.1 ความหมาย ประเภท ความสำคัญของสมการเชิงเส้น
    3.2 การแก้สมการเชิงเส้น
4. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้พีชคณิต
    4.1 การสร้างแรงจูงใจในการเรียนพีชคณิต
    4.2 การสร้างความเข้าใจในการแก้สมการ
    4.3 การใช้กราฟช่วยในการสร้างความเข้าใจในการเรียนพีชคณิต

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

4.4 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องลำดับและอนุกรม

4.5 รูปจำลองทางพีชคณิตที่สามารถนำมาทดลองได้

4.6 การจัดสื่ออุปกรณ์และกิจกรรมเสริม

4.6 การใช้เทคโนโลยีในการสนพีชคณิต

5. กระบวนการกลุ่ม

5.1 ความหมายของกระบวนการกลุ่ม

5.2 ความเป็นมาของกระบวนการกลุ่ม

5.3 ความเป็นมาของกระบวนการกลุ่มในประเทศไทย

5.4 ทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับกระบวนการกลุ่ม

5.5 หลักการของกระบวนการกลุ่ม

5.6 เทคนิคของกระบวนการกลุ่ม

5.7 การจัดกลุ่มในกระบวนการกลุ่ม

5.8 ขนาดของกระบวนการกลุ่ม

5.9 ประโยชน์ของกระบวนการกลุ่ม

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

6.1 งานวิจัยในประเทศ

6.2 งานวิจัยต่างประเทศ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

1. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มีประเด็นที่สำคัญ ดังเสนอตามลำดับต่อไปนี้

1.1 ความสำคัญ

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการ

ดำรงชีวิต และพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนามนุษย์ให้สมบูรณ์ มีความสมดุลทั้งร่างกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

1.2 ธรรมชาติ / ลักษณะเฉพาะ

คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม มีโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยคำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ที่เป็นข้อตกลงเบื้องต้น จากนั้นจึงใช้การให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลสร้างทฤษฎีบทต่างๆ ขึ้น และนำไปใช้อย่างเป็นระบบ คณิตศาสตร์มีความถูกต้อง เที่ยงตรง คงเส้นคงวา มีระเบียบแบบแผน เป็นเหตุเป็นผล และมีความสมบูรณ์ในตัวเอง คณิตศาสตร์เป็นทั้งศาสตร์และศิลป์ที่ศึกษาเกี่ยวกับแบบรูปและความสัมพันธ์ เพื่อให้ได้ข้อสรุปและนำไปใช้ประโยชน์ คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นภาษาสากลที่ทุกคนเข้าใจตรงกันในการสื่อสาร สื่อความหมาย และถ่ายทอดความรู้ระหว่างศาสตร์ต่าง ๆ

1.3 วิสัยทัศน์การเรียนรู้

การศึกษาคณิตศาสตร์สำหรับหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 เป็นการศึกษาเพื่อปวงชนที่เปิดโอกาสให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องและตลอดชีวิตตามศักยภาพ ทั้งนี้เพื่อให้ เยาวชนเป็นผู้ที่มีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่พอเพียง สามารถนำความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นนำไปพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดียิ่งขึ้น รวมทั้งสามารถนำไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาต่อ ดังนั้น จึงเป็นความรับผิดชอบของสถานศึกษาที่ต้องจัดสาระการเรียนรู้ที่เหมาะสมแก่ผู้เรียนแต่ละคน ทั้งนี้เพื่อให้บรรลุตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ สำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ และต้องการเรียนรู้คณิตศาสตร์มากขึ้น ให้ถือเป็นหน้าที่ของสถานศึกษาที่จะต้องจัดโปรแกรมการเรียนการสอนให้แก่ผู้เรียนเพื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมตามความถนัดและความสนใจ ทั้งนี้เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ที่ทัดเทียมกับนานาอารยประเทศ

1.4 คุณภาพของผู้เรียนเมื่อจบการศึกษา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เมื่อผู้เรียนจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน 12 ปีแล้ว ผู้เรียนจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาคุณภาพชีวิต ตลอดจนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

เป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้น การที่ผู้เรียนจะเกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีคุณภาพนั้น จะต้องมีความสมดุลระหว่างสาระทางด้านความรู้ ทักษะกระบวนการ ควบคู่ไปกับคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยม ดังนี้

1.4.1 มีความรู้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น พร้อมทั้งสามารถนำความรู้นั้นไปประยุกต์ได้

1.4.2 มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็น ได้แก่ความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย การให้เหตุผล การสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ

1.4.3 มีความสามารถในการทำงานอย่างเป็นระบบ มีระเบียบวินัย มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความเชื่อมั่นในตนเอง พร้อมทั้งตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อ

1.5 สาระ

สาระการเรียนรู้ที่กำหนดไว้นี้เป็นสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน ประกอบด้วยเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในการจัดการเรียนรู้ ผู้สอนควรบูรณาการสาระต่าง ๆ เข้าด้วยกันเท่าที่เป็นไปได้ สาระที่เป็นองค์ความรู้ของกลสุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ
สาระที่ 2 การวัด
สาระที่ 3 เรขาคณิต
สาระที่ 4 พีชคณิต
สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น
สาระที่ 6 ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

สำหรับผู้เรียนที่มีความสนใจและมีความสามารถสูงทางคณิตศาสตร์ สถานศึกษาอาจจัดให้ผู้เรียนเรียนรู้สาระที่เป็นเนื้อหาวิชาให้กว้างขึ้น เข้มข้นขึ้น หรือฝึกทักษะกระบวนการมากขึ้น โดยพิจารณาจากสาระหลักที่กำหนดไว้ หรือสถานศึกษาอาจจัดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์อื่น ๆ เพิ่มเติมก็ได้ เช่น แคลคูลัสเบื้องต้น หรือทฤษฎีกราฟเบื้องต้น โดยพิจารณาให้เหมาะสมกับความสามารถและความต้องการของผู้เรียน

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

1.6 มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐานการเรียนรู้ที่จำเป็นสำหรับผู้เรียน มีดังนี้

สาระที่ 1 : จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 : เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 : เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่าง ๆ และสามารถใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.3 : ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.4 : เข้าใจในระบบจำนวนและสามารถนำสมบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้ได้

สาระที่ 2 : การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 : เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด

มาตรฐาน ค 2.2 : วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัดได้

มาตรฐาน ค 2.3 : แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้

สาระที่ 3 : เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้การจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

สาระที่ 4 : พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระที่ 5 : การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 : เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูลได้

มาตรฐาน ค 5.2 : ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

มาตรฐาน ค 5.3 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยการตัดสินใจและแก้ปัญหาได้

สาระที่ 6 : ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2 : มีความสามารถในการให้เหตุผล

มาตรฐาน ค 6.3 : มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

มาตรฐาน ค 6.4 : มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

มาตรฐาน ค 6.5 : มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

1.7 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ในสาระที่ 4 : พีชคณิต

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้เน้นการจัดการศึกษาโดยกำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ ในการพัฒนาผู้เรียนตามระดับพัฒนาการของผู้เรียนเป็น 4 ช่วงชั้น คือ ช่วงชั้นที่ 1 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 – 3 ช่วงชั้นที่ 2 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 – 6 ช่วงชั้นที่ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 3 ช่วงชั้นที่ 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 และกำหนดสาระการเรียนรู้ที่เป็นสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน ประกอบด้วยเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในการจัดการเรียนรู้ผู้สอนควรบูรณาการสาระต่าง ๆ เข้าด้วยกันเท่าที่จะเป็นไปได้ ต่อไปนี้เป็นการนำเสนอสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ของแต่ละช่วงชั้น ดังนี้ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2545 : 10 – 15)

1.7.1 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ ช่วงชั้นที่ 1 (ป. 1 – 3)

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 1

1. บอกแบบรูปและความสมพันธ์ที่กำหนดให้ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 1

1. วิเคราะห์สถานการณ์ หรือปัญหาและสามารถเขียนให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ในช่วงชั้นที่ 1 ผู้เรียนจะต้องเรียนแบบรูปและความสัมพันธ์ และสถานการณ์หรือปัญหาและเขียนให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์

1.7.2 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ ช่วงชั้นที่ 2 (ป. 4 – 6)

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 2

1. อธิบายแบบรูปและความสัมพันธ์และนำความรู้ไปใช้ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 2

1. วิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหาที่ซับซ้อนและสามารถจำลองสถานการณ์นั้นให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าได้

2. แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่กำหนดให้ได้

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ในช่วงชั้นที่ 2 ผู้เรียนจะต้องเรียนแบบรูปความสัมพันธ์และการนำไปใช้ สถานการณ์หรือปัญหาที่ซับซ้อนและจำลองให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่า และการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1.7.3 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ ช่วงชั้นที่ 3 (ม. 1 – 3)

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 3

1. วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 3

1. แก้สมการและอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้

2. เขียนสมการหรืออสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแทนสถานการณ์หรือปัญหาที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหาพร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

3. เขียนกราฟแสดงความเกี่ยวข้องระหว่างปริมาณสองชุดหรือสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้ได้

4. อ่านและแปลความหมายกราฟที่กำหนดให้ได้

5. แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหา พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

6. อธิบายลักษณะของรูปที่เกิดขึ้นจากการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนบนระบบพิกัดฉากได้

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ในช่วงชั้นที่ 3 ผู้เรียนจะต้องเรียนความสัมพันธ์ของแบบรูป การแก้สมการและอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การเขียนสมการและอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแทนสถานการหรือปัญหาและนำไปใช้ การเขียนกราฟแสดงความเกี่ยวข้องระหว่างปริมาณสองชุดหรือสมการเชิงเส้น การอ่านและแปลความหมายกราฟ การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรและนำไปใช้ และรูปที่เกิดขึ้นจากการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนบนระบบพิกัดฉาก

1.7.4 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4 – 6)

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. มีความคิดรวบยอดในเรื่องเซตและการดำเนินการของเซต

2. เข้าใจและใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้

3. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน เขียนแทนความสัมพันธ์ และฟังก์ชันในรูปต่าง ๆ เช่น สมการ กราฟ และตารางได้

4. เข้าใจความหมายของลำดับ และหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดที่กำหนดให้ได้

5. เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต และหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. เขียนแผนภาพแทนเซต (Venn – Euler Diagram) และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาสมาชิกของเซตได้

2. บอกได้ว่าการอ้างเหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้แผนภาพแทนเซต (Venn – Euler Diagram)

3. แก้สมการและอสมการตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสองได้

4. สร้างความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันจากสถานการณ์หรือปัญหาที่กำหนดให้และนำไปใช้ได้

5. เข้าใจความหมายของผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้สูตร และนำไปใช้ได้

6. เขียนกราฟของสมการ อสมการ ฟังก์ชัน และนำไปใช้แก้ปัญหาได้

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ในช่วงชั้นที่ 4 ผู้เรียนจะต้องเรียนเซตและการดำเนินการของเซต การเขียนแผนภาพแทนเซต (Venn – Euler Diagram) และการนำไปใช้แก้ปัญหา การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย การอ้างเหตุผล ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน การสร้างความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันจากสถานการณ์หรือปัญหาและนำไปใช้ การแก้สมการและอสมการตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสอง การเขียนกราฟของสมการ อสมการ ฟังก์ชัน และการนำไปใช้แก้ปัญหา ลำดับและพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตและพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต และผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิตและการนำไปใช้

1.8 สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังในสาระที่ 4 : พีชคณิต

ต่อไปนี้เป็นการแสดงสาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ของแต่ละช่วงชั้น (กระทรวงศึกษาธิการ. 2545 : 16 – 37)

1.8.1 สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ของแต่ละช่วงชั้น

1) สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ช่วงชั้นที่ 1 (ป. 1 – 3) ดังแสดงในตารางที่ 1

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 1 สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ช่วงชั้นที่ 1 (ป. 1 – 3)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
ประถมศึกษาปีที่ 1	**แบบรูปและความสัมพันธ์** 1. แบบรูปและจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 1 และทีละ 2	1. เมื่อกำหนดแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ1 และเพิ่มขึ้นที่ละ 2 ให้ สามารถบอกจำนวนต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้ และบอกความสัมพันธ์ได้
	2. แบบรูปของจำนวนที่ลดทีละ 1	2. เมื่อกำหนดแบบรูปของจำนวนที่ลดลงทีละ 1 ให้ สามารถบอกจำนวนต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้ และบอกความสัมพันธ์ได้
	3. แบบรูปของรูปเรขาคณิตและรูปอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กันในลักษณะรูปร่าง หรือขนาด หรือสี เช่น △□△□ △□ ... ○○○○ ○○ ... ○●○● ○● ... ❀♠ ❀♠ ❀♠ ...	3. เมื่อกำหนดแบบรูปของสิ่งของหรือรูปภาพที่มีรูปร่าง ขนาด หรือสีสัมพันธ์กันอย่างใดอย่างหนึ่งให้ สามารถบอกสิ่งของหรือรูปภาพต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้และบอกความสัมพันธ์ได้

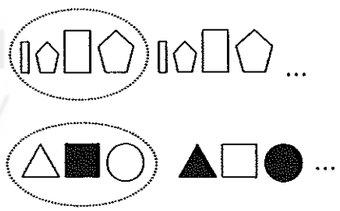
มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 1 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
ประถมศึกษาปีที่ 2	**แบบรูปและความสัมพันธ์** 1. แบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 5 ทีละ 10 และทีละ 100	1. เมื่อกำหนดแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 5 เพิ่มขึ้นทีละ 10 และเพิ่มขึ้นทีละ 100 ให้สามารถบอกจำนวนต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้ และบอกความสัมพันธ์ได้
	2. แบบรูปของจำนวนที่ลดลงทีละ 2 ทีละ 10 และทีละ 100	2. เมื่อกำหนดแบบรูปของจำนวนที่ลดลงทีละ 2 ลดลงทีละ 10 และลดลงทีละ 100 ให้ สามารถบอกจำนวนต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้ และบอกความสัมพันธ์ได้
	3. แบบรูปของรูปเรขาคณิตและรูปอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กันในลักษณะของรูปร่าง หรือขนาด หรือสี	3. เมื่อกำหนดแบบรูปของสิ่งของหรือรูปภาพที่มีรูปร่าง ขนาด หรือสีสัมพันธ์กันอย่างใดอย่างหนึ่งให้ สามารถบอกสิ่งของหรือรูปภาพต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้และบอกความสัมพันธ์ได้
ประถมศึกษาปีที่ 3	**แบบรูปและความสัมพันธ์** 1. แบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 3 ทีละ 4 ทีละ 25 และทีละ 50	1. เมื่อกำหนดแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 3 ลดลงทีละ 4 เพิ่มขึ้นทีละ 25 และเพิ่มขึ้นทีละ 50 ให้ สามารถบอกจำนวนต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้ และบอกความสัมพันธ์ได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 1 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
ประถมศึกษาปีที่ 3	2. แบบรูปของจำนวนที่ลดลงทีละ 3 ทีละ 4 ทีละ 25 และทีละ 50	2. เมื่อกำหนดแบบรูปของจำนวนที่ลดลงทีละ 3 ลดลงทีละ 4 ลดลงทีละ 25 และลดลงทีละ 50 ให้สามารถบอกจำนวนต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้ และบอกความสัมพันธ์ได้
		3. เมื่อกำหนดแบบรูปจำนวนที่เป็นแบบรูปซ้ำให้ สามารถจำนวนต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้ และบอกความสัมพันธ์ได้
	3. แบบรูปของรูปเรขาคณิตและรูปอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กันในลักษณะของรูปร่าง หรือขนาด หรือสี สองลักษณะ เช่น 	4. เมื่อกำหนดแบบรูปของสิ่งของหรือรูปภาพที่มีรูปร่าง ขนาด หรือสีสัมพันธ์กันสองลักษณะให้สามารถบอกสิ่งของหรือรูปภาพต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้ และบอกความสัมพันธ์ได้
		3. เมื่อกำหนดสถานการณ์หรือปัญหาให้ สามารถวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหา สามารถบอกความสัมพันธ์ หรือเขียนให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้

จากตารางที่ 1 สรุปได้ว่า ในการเรียนรู้พีชคณิตรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนช่วงชั้นที่ 1 (ป.1 – 3) หลักสูตรกำหนดให้เรียนแบบรูปและความสัมพันธ์ ทั้งชนิดที่เพิ่มขึ้นและลดลง ตลอดจนแบบรูปของรูปเรขาคณิตและรูปอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กันในลักษณะรูปร่าง หรือขนาด หรือสี โดยเริ่มจากแบบรูปและจำนวนที่เพิ่มขึ้น / ลดลง จากทีละ 1 และ 2 ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ทีละ 5 , 10 และ 100 ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 และทีละ 3 , 4 ,

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

สำนักวิทยบริการฯ มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

25 และ 50 ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ในส่วนของผลการเรียนรู้ที่คาดหวังนั้น ต้องการเพียงให้นักเรียนบอกได้ เช่น บอกจำนวนต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนด หรือบอกความสัมพันธ์เป็นต้น

2) สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ช่วงชั้นที่ 2 (ป. 4 – 6) ดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ช่วงชั้นที่ 2 (ป. 4 – 6)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
ประถมศึกษาปีที่ 4	**แบบรูปและความสัมพันธ์** 1. แบบรูปของจำนวนนับที่เพิ่มขึ้นทีละเท่า ๆ กัน 2. แบบรูปของจำนวนนับที่ลดทีละเท่า ๆ กัน 3. แบบรูปของรูปเรขาคณิตและแบบรูปอื่น ๆ	1. เมื่อกำหนดแบบรูปของจำนวนนับที่เพิ่มขึ้นทีละเท่า ๆ กัน หรือลดลงทีละเท่า ๆ กันให้ สามารถหาจำนวนต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้ และบอกความสัมพันธ์ได้ 2. เมื่อกำหนดแบบรูปของรูปเรขาคณิตและแบบรูปอื่น ๆ ให้สามารถรูปต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้และบอกความสัมพันธ์ได้
	สถานการณ์และปัญหา 1. การบอกความสัมพันธ์หรือการเขียนประโยคสัญลักษณ์แสดงความสัมพันธ์ของสถานการณ์ หรือปัญหา	1. เมื่อกำหนดสถานการณ์หรือปัญหาให้ สามารถวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหา และสามารถบอกความสัมพันธ์ หรือเขียนให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 2 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
ประถมศึกษาปีที่ 5	**แบบรูปและความสัมพันธ์** 1. แบบรูปของจำนวน **สถานการณ์หรือปัญหา** 1. การเขียนประโยคสัญลักษณ์แสดงความสัมพันธ์ของสถานการณ์หรือปัญหา	1. เมื่อกำหนดแบบรูปของจำนวนให้ สามารถบอกจำนวนต่อไปที่อยู่ในแบบรูปที่กำหนดให้ และบอกความสัมพันธ์ได้ 2. เมื่อกำหนดสถานการณ์หรือปัญหาให้ สามารถวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหา และเขียนให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้
ประถมศึกษาปีที่ 6	**แบบรูปและความสัมพันธ์** 1. โจทย์ปัญหา / สถานการณ์ แบบรูปและความสัมพันธ์ เช่น จากแบบรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ 1 3 5 7 9 ... จำนวนคี่ตัวที่ 50 คือจำนวนใด แนวคิด จำนวนที่หนึ่งคือ $2(1)-1=1$ จำนวนที่สองคือ $2(2)-1=3$ จำนวนคี่ตัวที่ห้าสิบคือ $2(50)-1=99$ **สมการและการแก้สมการ** 1. สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า 1 ตัว 2. สมการที่เป็นจริง สมการที่เป็นเท็จ 3. คำตอบของสมการ 4. การแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า 1 ตัว 5. โจทย์ปัญหาสมการ	1. เมื่อกำหนดสถานการณ์หรือปัญหาที่ซับซ้อนให้ สามารถวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหา และเขียนให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าได้ 1. เมื่อกำหนดประโยคแสดงการบวก การลบ การคูณ หรือการหารให้ สามารถบอกได้ว่าเป็นสมการหรือไม่เป็นสมการ 2. เมื่อกำหนดสมการให้ สามารถบอกได้ว่าเป็นสมการที่เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 2 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
ประถมศึกษาปีที่ 6		3. เมื่อกำหนดสมการที่เกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ หรือการหารที่มีตัวไม่ทราบค่าหนึ่งตัวให้ สามารถหาคำตอบและแสดงวิธีแก้สมการได้

จากตารางที่ 2 สรุปได้ว่า ในการเรียนรู้พีชคณิตรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนช่วงชั้นที่ 2 (ป.4 – 6) หลักสูตรกำหนดให้เรียนแบบรูปและความสัมพันธ์ ทั้งของจำนวน รูปเรขาคณิต และรูปอื่น ๆ เช่นเดียวกับช่วงชั้นที่ 1 แต่เพิ่มสถานการณ์หรือปัญหาในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ส่วนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 หลักสูตรกำหนดให้เรียนสมการและการแก้สมการเพิ่มเติม ในส่วนของผลการเรียนรู้ที่คาดหวังนั้น นอกจากต้องการให้นักเรียนบอกได้ แล้วยังต้องการให้นักเรียนวิเคราะห์เป็น รวมทั้งสามารถหาคำตอบและแสดงวิธีการแก้สมการได้

3) สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในสาระที่ 4 : พีชคณิตช่วงชั้นที่ 3 (ม. 1 – 3) ดังแสดงในตารางที่ 3

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 3 สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ช่วงชั้นที่ 3 (ม. 1 – 3)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 1	**1. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว** 1.1 แบบรูปและความสัมพันธ์ 1.2 คำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 1.3 การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน 1.4 โจทย์สมการเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	1. วิเคราะห์แบบรูปที่กำหนดให้และเขียนความสัมพันธ์จากแบบรูปที่กำหนดให้โดยใช้ตัวแปรได้ 2. ระบุจำนวนที่เป็นคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 1		3. แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่าย โดยใช้สมบัติของการเท่ากันได้ เขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแทนสถานการณ์หรือปัญหาอย่างง่ายได้ 4. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่ายได้ 5. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้
	2. คู่อันดับและกราฟ 2.1 คู่อันดับ 2.2 กราฟ 2.3 การนำไปใช้	1. อ่านและแปลความหมายกราฟบนระนาบพิกัดฉากที่กำหนดให้ได้ 2. เขียนกราฟแสดงความเกี่ยวข้องของปริมาณสองชุดที่กำหนดให้
มัธยมศึกษาปีที่ 2	**1. การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว** 1.1 การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 1.2 การแก้โจทย์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	1. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ 2. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ในสถานการณ์ต่าง ๆ
มัธยมศึกษาปีที่ 3	**1. อสมการ** 1.1 คำตอบและกราฟแสดงคำตอบของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 1.2 การแก้อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 1.3 การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	1. แก้อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ 2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหาคำตอบของโจทย์ปัญหาได้ 3. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 3	**2. กราฟ** 2.1 กราฟเส้นตรง 2.2 กราฟเส้นตรงกับการนำไปใช้ 2.3 กราฟอื่น ๆ	1. เขียนกราฟแสดงความเกี่ยวข้องระหว่างปริมาณสองชุดที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นได้ 2. เขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรได้ 3. อ่านและแปลความหมายของกราฟที่กำหนดได้
	3. ระบบสมการเชิงเส้น 3.1 สมการเชิงเส้นสองตัวแปร 3.2 กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 3.3 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 3.4 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 3.5 การแก้โจทย์ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร	1. อ่านและแปลความหมายของกราฟของระบบสมกรเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ 2. แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรได้ 3. นำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้แก้ปัญหาได้ 4. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

จากตารางที่ 3 สรุปได้ว่า ในการเรียนรู้พีชคณิตรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนช่วงชั้นที่ 3 (ม.1 – 3) หลักสูตรกำหนดให้เรียนสมการและการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คู่อันดับและกราฟ ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 อสมการ กราฟ และระบบสมการเชิงเส้น ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในส่วนของผลการเรียนรู้ที่คาดหวังนั้น ต้องการให้นักเรียนวิเคราะห์เป็น เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณได้ แก้สมการและอสมการได้ รวมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

4) สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในสาระที่ 4 : พีชคณิตช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4 – 6)

ตารางที่ 4 สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4 – 6)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 4 – มัธยมศึกษาปีที่ 6	**1. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน** 1.1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน 1.2 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์และฟังก์ชัน 1.3 ตัวอย่างของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก 1.4 กราฟของฟังก์ชันและการนำกราฟไปแก้ปัญหา	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนแทนความสัมพันธ์และฟังก์ชันในรูปต่าง ๆ เช่น ตาราง สมการ และกราฟได้ 2. เขียนกราฟของความสัมพันธ์และฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 3. สร้างความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันจากสถานการณ์หรือปัญหาที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหาได้ 4. ใช้กราฟของสมการ อสมการ ฟังก์ชันการแก้ปัญหาได้
	2. ลำดับและอนุกรม 2.1 ลำดับ 2.2 ลำดับเลขคณิต 2.3 ลำดับเรขาคณิต 2.4 อนุกรมเลขคณิต 2.5 อนุกรมเรขาคณิต 2.6 ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม	1. เข้าใจความหมายของลำดับ และหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดที่กำหนดให้ได้ 2. เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 4 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 4 – มัธยมศึกษาปีที่ 6		3. เข้าใจความหมายของผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต 4. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต โดยใช้สูตร และนำไปใช้ได้
	3. เซต 3.1 เซต 3.2 การดำเนินการของเซต 3.3 แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ และการแก้ปัญหา	1. สรุปความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเซต สามารถหายูเนียน อินเตอร์เซกชัน คอมพลีเมนต์ และผลต่างของเซตได้ 2. เขียนแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ (Venn – Euler Diagram) และนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาสมาชิกของเซตได้
	4. การให้เหตุผล 4.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย 4.2 การอ้างเหตุผล	1. เข้าใจและใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้ 2. บอกได้ว่าการอ้างเหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้แผนภาพแทนเซต

จากตารางที่ 4 สรุปได้ว่า ในการเรียนรู้พีชคณิตรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – 6) หลักสูตรกำหนดให้เรียนความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ลำดับทั้งลำดับเลขคณิตและเรขาคณิต อนุกรมทั้งอนุกรมเลขคณิตและเรขาคณิต เซต การดำเนินของเซต และการเขียนแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์และการแก้ปัญหา การให้เหตุผลทั้งแบบอุปนัยและนิรนัย และการอ้างเหตุผล ในส่วนของผลการเรียนรู้ที่คาดหวังนั้น ต้องการให้นักเรียนมี

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรมทั้งเลขคณิตและเรขาคณิต เซต การให้เหตุผล และสามารถนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า สาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในสาระที่ 4 : พีชคณิต หลักสูตรกำหนดให้เรียน แบบรูปและความสัมพันธ์ ในช่วงชั้นที่ 1 และช่วงชั้นที่ 2 สถานการณ์และปัญหา สมการและการแก้สมการ ในช่วงชั้นที่ 2 สมการเชิงเส้น ระบบสมการเชิงเส้น อสมการ และคู่อันดับและกราฟ ในช่วงชั้นที่ 3 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม เซต และการให้เหตุผล ในช่วงชั้นที่ 4

1.8.2 สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ของแต่ละช่วงชั้น

1) สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ช่วงชั้นที่ 3 (ม. 1 – 3) ดังแสดงในตารางที่ 5

ตารางที่ 5 สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ช่วงชั้นที่ 3 (ม. 1 – 3)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 1	**1. พหุนาม** 1.1 เอกนาม 1.2 การบวก การลบ การคูณ การหาร เอกนาม 1.3 พหุนาม 1.4 การบวก การลบ พหุนาม 1.5 การคูณและการหารพหุนามอย่างง่าย	1. หาผลบวกและผลลบของเอกนามและพหุนามได้ 2. หาผลคูณและผลหารของพหุนามอย่างง่ายได้
มัธยมศึกษาปีที่ 2	**1. พหุนาม และเศษส่วนพหุนามอย่างง่าย** 1.1 การบวก การลบ การคูณ และการหารพหุนาม 1.2 การบวก การลบ การคูณ และการหารเศษส่วนของพหุนามของ	1. บวก ลบ คูณ หาร พหุนามได้ 2. บวก ลบ คูณ หาร เศษส่วนของพหุนามของพหุนามที่มีดีกรีไม่เกินหนึ่งได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 5 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 2	พหุนามที่มีดีกรีไม่เกินหนึ่ง **2. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง** 2.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยใช้สมบัติการแจกแจง 2.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่รูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ 2.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ 2.4 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง **3. สมการกำลังสองตัวแปรเดียว** 3.1 การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้การแยกตัวประกอบ 3.2 การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้การแยกตัวประกอบ	1. แยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองได้ 1. แก้สมการกำลังสอตัวแปรเดียวโดยใช้การแยกตัวประกอบได้ 2. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้การแยกตัวประกอบได้ 3. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้
มัธยมศึกษาปีที่ 3	**1. การแยกตัวประกอบของพหุนาม** 1.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสอง	1. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปกำลังสอง

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 5 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 3	สมบูรณ์ 1.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยอาศัยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์หรือทฤษฎีเศษเหลือ	สมบูรณ์ได้ 2. แยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยอาศัยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์หรือทฤษฎีเศษเหลือได้
	2. สมการกำลังสอง 2.1 การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้สูตร $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 2.2 การแก้โจทย์สมการกำลังสองตัวแปรเดียว	1. แก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้สูตร $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ได้ 2. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียวได้ 3. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้
	3. พาราโบลา 3.1 สมการพาราโบลา 3.2 กราฟของพาราโบลาที่อยู่ในรูป $y=ax^2+bx+c$ เมื่อ $a\neq 0$	1. เขียนกราฟของพาราโบลาที่กำหนดให้ได้ 2. บอกลักษณะของกราฟพาราโบลาที่กำหนดให้ได้
	4. ระบบสมการ 4.1 การแก้ระบบสมการกำลังสองตัวแปรเดียวที่มีดีกรีไม่เกินสอง 4.2 การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองที่มีดีกรีไม่เกินสอง	1. แก้ระบบสมการสองตัวแปรที่มีดีกรีไม่เกินสองได้ 2. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการสองตัวแปรที่มดีกรีไม่เกินสองได้ 3. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 5 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 3	**5. เศษส่วนของพหุนาม** 5.1 การบวก การลบ การคูณ และการหารเศษส่วนของพหุนาม2) 5.2 การแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม 5.3 การแก้ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม	1. บวก ลบ คูณ และหารเศษส่วนของพหุนามได้ 2. แก้สมการเศษส่วนของพหุนามได้ 3. แก้ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนามได้ 4. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

จากตารางที่ 5 สรุปได้ว่า ในการเรียนรู้พีชคณิตรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมของนักเรียนช่วงชั้นที่ 3 (ม.1 – 3) หลักสูตรกำหนดให้เรียนพหุนามและเศษส่วนพหุนาม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 , 2 และ 3 สมการกำลังสอง ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3 พาราโบลาและระบบสมการ ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในส่วนของผลการเรียนรู้ที่คาดหวังนั้น ต้องการให้นักเรียนแยกตัวประกอบของพหุนามและแก้สมการเศษส่วนของพหุนามได้ แก้สมการกำลังสองได้ เขียนกราฟและบอกลักษณะของกราฟพาราโบลาได้ และแก้ระบบสมการสองตัวแปรที่มีดีกรีไม่เกินสองได้

2) สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4 – 6) ดังแสดงในตารางที่ 6

ตารางที่ 6 สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ในสาระที่ 4 : พีชคณิต ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4 – 6)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 4 – มัธยมศึกษาปีที่ 6	**1. ตรรกศาสตร์เบื้องต้น** 1.1 ประพจน์ 1.2 การเชื่อมประพจน์และการหาค่าความจริงของประพจน์ 1.3 การสร้างตารางค่าความจริง 1.4 รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน	1. หาค่าความจริงของประพจน์ได้ 2. หารูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันได้ 3. บอกได้ว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้สมเหตุสมผลหรือไม่

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 6 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 4 – มัธยมศึกษาปีที่ 6	1.5 ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ และค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ 1.6 สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ 1.7 การอ้างเหตุผล **2. ฟังก์ชัน** 2.1 ฟังก์ชันคอมโพสิท 2.2 ฟังก์ชันอินเวอร์ส 2.3 พีชคณิตของฟังก์ชัน	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชัน เขียนกราฟของฟังก์ชัน และสร้างฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันไปใช้แก้ปัญหาได้
	3. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอกการิทึม 3.1 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล 3.2 ฟังก์ชันลอกการิทึม	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอกการิทึม และเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพ – เนนเชียล และฟังก์ชันลอกการิทึมไปใช้แก้ปัญหาได้
	4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ 4.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 4.2 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 4.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 6 (ต่อ)

ชั้น	สาระการเรียนรู้	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
มัธยมศึกษาปีที่ 4 – มัธยมศึกษาปีที่ 6	4.4 อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 4.5 การแก้สมการตรีโกณมิติ 4.6 กฎของไซน์และโคไซน์ **5. เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์** 5.1 เมทริกซ์ และสมบัติของเมทริกซ์ 5.2 ดีเทอร์มินันต์ 5.3 การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น 5.3.1 โดยวิธีดีเทอร์มินันต์ 5.3.2 โดยวิธีการดำเนินการตามแถวเบื้องต้น **6. กำหนดการเชิงเส้น** 6.1 กราฟของอสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 6.2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบของปัญหา	และการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้ 1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเมทริกซ์และการดำเนินการของเมทริกซ์ 2. หาดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่เกินสี่ได้ 3. วิเคราะห์และหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้ 1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และใช้วิธีการของกำหนดการเชิงเส้นที่ใช้กราฟของสมการและอสมการที่มีสองตัวแปรในการแก้ปัญหาได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

จากตารางที่ 6 สรุปได้ว่า ในการเรียนรู้พีชคณิตรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมของนักเรียนช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – 6) หลักสูตรกำหนดให้เรียนตรรกศาสตร์เบื้องต้น ฟังก์ชันชนิด ๆ เช่น ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอกการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์ และกำหนดการเชิงเส้น ในส่วนของผลการเรียนรู้ที่คาดหวังนั้น ต้องการให้นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับตรรกศาสตร์เบื้องต้น ฟังก์ชันต่าง ๆ เช่น ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอกการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์ และกำหนดการเชิงเส้น และสามารถนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาได้

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า สาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมมีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เฉพาะช่วงชั้นที่ 3 และช่วงชั้นที่ 4 ซึ่งในสาระที่ 4 : พีชคณิต หลักสูตร

กำหนดให้เรียน พหุนาม เศษส่วนพหุนาม การแยกตัวประกอบของพหุนาม และสมการกำลังสองตัวแปรเดียว ในช่วงชั้นที่ 3 ตรรกศาสตร์เบื้องต้น ฟังก์ชัน ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์ และกำหนดการเชิงเส้น ในช่วงชั้นที่ 4

2. พีชคณิต

2.1 ความหมายของพีชคณิต

สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนฯ เล่ม 6 (2530 : 70) กล่าวถึงพีชคณิตว่า พีชคณิตเป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ กล่าวถึงจำนวนในลักษณะต่างไปจากเลขคณิต พีชคณิตใช้ตัวอักษร เช่น x และ y แทนจำนวนที่ยังไม่รู้ค่า เพื่อช่วยทำโจทย์เลขคณิตที่ยุ่งยากได้โดยง่าย พีชคณิตมีประโยชน์มากทั้งในด้านธุรกิจอุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์

ยุพร ริมชลการ. (2543 : 54 – 56) ได้ให้ความหมายของพีชคณิตไว้ ดังนี้

พีชคณิต (algebra) เป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่ง ซึ่งพัฒนาโดยตรงจาก เลขคณิตโดยใช้สัญลักษณ์แทนตัวแปร ต่อจากนั้นได้พัฒนาในแง่เป็นกรณีทั่วไปของเลขคณิต และในที่สุดได้พัฒนาในเชิงนามธรรม เนื่องจากพีชคณิตมีลักษณะของความเป็นนามธรรมสูง จึงต้องใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆ แทน ตัวแปร การจัดการเรียนการสอนจึงควรให้มีการบูรณาการกับคณิตศาสตร์สาขาอื่น เพื่อประโยชน์ในด้านการทำความเข้าใจสาระทางพีชคณิตและใช้พีชคณิตสำหรับเรียนรู้คณิตศาสตร์แขนงอื่น

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. (2548 : 6) ได้กล่าวถึงความหมายของพีชคณิตไว้ดังนี้

พีชคณิตเป็นวิชาหนึ่งของคณิตศาสตร์เช่นเดียวกับ เลขคณิต เรขาคณิต หรือตรีโกณมิติ แต่พีชคณิตเป็นวิชาที่ว่าด้วยการแก้โจทย์ปัญหาด้วยกระบวนการที่อาจสร้างขึ้นในรูปของนิพจน์ หรือฟังก์ชันที่มีตัวแปรหรือตัวที่ยังไม่กำหนดตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป ซึ่งเรียกว่าสัญลักษณ์ และเพราะเราอาจแทนสัญลักษณ์เหล่านี้เป็นอะไรก็ได้เช่น เป็นฟังก์ชันต่าง ๆ เป็นเวคเตอร์ เป็นจำนวนจริง หรือเป็นจำนวนเชิงซ้อน วิธีการทางคณิตศาสตร์จึงสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ครอบคลุมเกือบทุกแขนงวิชา ทำให้พีชคณิตเป็นวิชาที่จำเป็นต้องศึกษา โดยแทรกอยู่ในทุกแขนงวิชาที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่นกระบวนการหาคำตอบของระบบสมการของเกาส์ หรืออุปนัยวิธีทางคณิตศาสตร์ในวิชาตรรกศาสตร์ เหล่านี้ล้วนเป็นวิธีทางพีชคณิตทั้งสิ้น จึงมีคำกล่าวว่า “พีชคณิตเป็นศูนย์กลางทางคณิตศาสตร์ทั้งปวง”

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

จอห์น (Tobey John . 1991 : 125) กล่าวถึงพีชคณิตไว้ ดังนี้

พีชคณิต (algebra) เป็นสาขาหนึ่งในสามสาขาหลักในคณิตศาสตร์ ร่วมกับเรขาคณิต และการวิเคราะห์ (analysis) พีชคณิตเป็นการศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้าง ความสัมพันธ์ และจำนวน พีชคณิตพื้นฐานจะเริ่มมีสอนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา โดยศึกษาเกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ และหาร ยกกำลัง และการถอดราก พีชคณิตยังคงรวมไปถึงการศึกษาสัญลักษณ์ ตัวแปร และเซ็ต

ENCYCLOPAEDIA MATHEMATICS ; Volume 1 (1995 : 72) ได้กล่าวถึงพีชคณิตว่า พีชคณิตเป็นสาขาหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งทำการศึกษาเกี่ยวกับการดำเนินการทางพีชคณิต

จากความหมายของพีชคณิตที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า พีชคณิต (algebra) เป็นสาขาหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญและเป็นพื้นฐานของวิชาคณิตศาสตร์ทุกสาขา จึงทำให้พีชคณิตเป็นวิชาที่จำเป็นต้องศึกษา โดยแทรกอยู่ในทุกสาขาวิชาที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ เป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับจำนวน สัญลักษณ์ และตัวแปร เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน นิพจน์ สมการ และอสมการ

2.2 ความสำคัญของพีชคณิต

ยุพร ริมชลการ (2543 : 54 – 56) ได้กล่าวถึงความสำคัญของพีชคณิตไว้ ดังนี้

1. มีประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตจริง เพราะเป็นเครื่องมือในการสร้างแบบจำลองของปัญหา อธิบายและตอบปัญหาในโลกจริง
2. เป็นเครื่องมือที่สะดวกสำหรับการเขียนข้อสรุปของเรื่องราวต่าง ๆ
3. เป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูงและวิทยาการแขนงอื่น ๆ

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. (2548 : 6 – 8) ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับความสำคัญของพีชคณิต ดังนี้

วิชาพีชคณิตทำให้เราเห็นความสำคัญของการศึกษาในรูปสัญลักษณ์ซึ่งทำให้เกิดกฎหรือสูตรต่าง ๆ วิวัฒนาการของคณิตศาสตร์จึงกว้างขวางและไม่หยุดนิ่ง ทุกคนคุ้นเคยกับวิธีการทางพีชคณิตมาบ้างแล้ว เพราะในระดับมัธยมศึกษาโดยมากฝึกหัดให้นักเรียนแปลโจทย์ปัญหาออกมาในรูปแบบของสมการ พีชคณิตเป็นวิชาที่ว่าด้วยกระบวนการดังที่กล่าวมาจนอาจ ทำให้หลาย ๆ คนรู้สึกว่าวิชาพีชคณิตเต็มไปด้วยกระบวนการที่น่าเบื่อ เพราะเราทราบ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ดีว่าเมื่อทำตามขั้นตอนเสมือนเราเป็นหุ่นยนต์หรือเครื่องคอมพิวเตอร์แล้ว เราก็จะได้คำตอบเสมอ ทำให้หลายคนคิดว่าโจทย์ปัญหาทางพีชคณิตไม่เร้าใจดังวิชาอื่น ๆ แต่เพราะมนุษย์ไม่ใช่หุ่นยนต์หรือเครื่องคอมพิวเตอร์ มนุษย์มีปฏิภาณไหวพริบและความช่างสังเกต ดังนั้นถ้าเราสามารถสร้างกระบวนการที่ดีและเหมาะสมขึ้นใช้ในกระบวนการพีชคณิตด้วย ก็จะทำให้เราดำเนินการหาคำตอบด้วยวิธีการที่ง่ายขึ้น มีขั้นตอนไม่มากและมีโอกาสผิดพลาดน้อย

จากความสำคัญของพีชคณิตที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า พีชคณิตมีความสำคัญในหลาย ๆ ด้าน ทั้งมีประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตจริง เพราะเป็นเครื่องมือในการสร้างแบบจำลองของปัญหา สามารถอธิบายและตอบปัญหาในโลกจริง เป็นเครื่องมือที่สะดวกสำหรับการเขียนข้อสรุปของเรื่องราวต่าง ๆ เป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงและวิทยาการแขนงอื่น ๆ ดังนั้นหากเราสามารถสร้างกระบวนการที่ดีและเหมาะสมขึ้นใช้ในกระบวนการพีชคณิตด้วย ก็จะทำให้เราดำเนินการหาคำตอบด้วยวิธีการที่ง่ายขึ้น มีขั้นตอนไม่มากและมีโอกาสผิดพลาดน้อย

2.3 พัฒนาการของพีชคณิต

วิชาพีชคณิต เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งซึ่งได้มีวิวัฒนาการเป็นลำดับ นับตั้งแต่เริ่มมีพีชคณิตที่ใช้คำบรรยายแทนสัญลักษณ์ (Rhetorical algebra) ตั้งแต่ประมาณ 2,000 ปี ก่อนคริสตศักราช จนกลายมาเป็นพีชคณิตแบบที่ใช้คำย่อ (Syncopated algebra) เมื่อประมาณคริสตศตวรรษที่ 3 และนับตั้งแต่คริสตศตวรรษที่ 16 เป็นต้นมา ก็ได้รับการดัดแปลงแก้ไขให้เป็นพีชคณิตแบบที่ใช้สัญลักษณ์ (Symbolic algebra) ดังที่ปรากฏอยู่ในปัจจุบัน คำว่า “Algebra” พีชคณิต มาจากตำราเรื่อง อัล จาบา อัล-มูควาบาล่า (Al jabr al – mugabala) ของโมฮัมเหม็ด อัล-ควาริซมี (Mohammed al – Khwarizmi) ในศตวรรษที่ 9 แปลคร่าว ๆ ว่า “วิทยาศาสตร์ของสมการ” (science of equation) ซึ่งยุคแรก ๆ ของพีชคณิตได้ถูกนำมาใช้โดยชาวบาบิโลเนียนและอียิปต์ (Eves. 1964 : 39) ในเวลาต่อมาชนชาติเหล่านี้ได้มีการแก้สมการเชิงเส้น และสมการควอดราติกบางสมการที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน โดยใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์กับจำนวนเต็มบวกในการแก้สมการ ซึ่งสมการมีลักษณะเขียนเป็นคำพูดที่มีสัญลักษณ์เพียงเล็กน้อย และระบบจำนวนก็ประกอบด้วยจำนวนเต็มบวกและเศษส่วนเท่านั้น

ประมาณ 500 ปีก่อนคริสต์ศตวรรษ ประเทศกรีซได้เริ่มใช้พีชคณิตในเรื่องของการแก้สมการควอดราติกและสมการกำลังสามโดยใช้การสร้างรูปเรขาคณิต ชาวกรีกใช้ตัวอักษรแทนจำนวน แต่ระบบที่ใช้ยังไม่เหมาะกับการคำนวณ อย่างไรก็ตาม ชาวกรีกเป็น

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

นักคณิตศาสตร์ชาติแรกที่เข้าใจจำนวนอตรรกยะ และราว ๆ ค.ศ. 250 ชาวกรีกชื่อ Diophantus ก็เป็นนักคณิตศาสตร์คนแรกที่ใช้เครื่องหมายคณิตศาสตร์ง่าย ๆ ที่ประกอบด้วยสัญลักษณ์เฉพาะและตัวย่อ บางครั้งเขาก็ได้รับการยกย่องเป็น**บิดาของพีชคณิต** (Richard. 2008 : 336) ส่วนในประเทศจีนได้ใช้ระบบสมการเชิงเส้น ประมาณ 200 ปีก่อนคริสต์ศตวรรษ แต่ใช้กับจำนวนลบน้อยมาก

ในศตวรรษที่ 7 นักคณิตศาสตร์ชาวฮินดูแก้สมการควอดราติกได้ 2 คำตอบ รวมทั้งค่าที่เป็นลบด้วย และมีการกำหนดสูตรในการคำนวณหาคำตอบ แต่จำนวนลบก็ยังไม่เป็นที่เข้าใจหรือยอมรับกันนักในเวลานั้น (ฉวีวรรณ เศวตมาลย์, 2544 : 106 – 107) ระบบเลขฐานสิบที่ใช้ในปัจจุบันก็มาจากพื้นฐานระบบเลขฐานสิบของฮินดู ซึ่งอาจจะก่อกำเนิดมาจากเมืองจีน และตัวเลข 0 , 1 , 2 , ... , 9 ถูกนำมาใช้ในยุโรปตะวันตกโดยชาวอาหรับ จึงเรียกว่า ตัวเลขฮินดู – อารบิก (Hindu – Arabic numerals) จนกระทั่งถึงสิ้นศตวรรษที่ 15 ก็ได้มีการใช้ “+” และ “-” เป็นสัญลักษณ์แทนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ และต่อมามีการใช้สัญลักษณ์เลขยกกำลัง , ค่ารากที่สอง และวงเล็บตามมา ในช่วงสิ้นศตวรรษที่ 16 เอฟ เวียต้ เป็นบุคคลแรกที่ได้ใช้ตัวพยัญชนะเป็นตัวแทนค่าคงที่และตัวแปรในปัญหาทางคณิตศาสตร์ ช่วงศตวรรษที่ 17 และ 18 นั้น วิชาพีชคณิตเป็นสื่อกลางของ “วิทยาศาสตร์การคำนวณ” ที่ใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ และยังเป็นสื่อกลางของ “การวิเคราะห์สมการ” ดังที่ได้ตั้งข้อสังเกตไว้โดย เจ เซอร์เร็ต (J. Serret) ในหนังสือของเขาซึ่งเป็นหนังสือที่ว่าด้วยพีชคณิตขั้นสูง (ENCYCLOPAEDIA MATHEMATICS ; Volume 1, 1995 : 72 – 75) สัญลักษณ์ทางพีชคณิตส่วนใหญ่ที่ใช้ในปัจจุบันนี้ เป็นที่รู้จักกันมานับตั้งแต่ช่วงกลางศตวรรษที่ 17 ซึ่งถือว่าเป็นยุคสิ้นสุดของพีชคณิตยุคก่อนประวัติศาสตร์ นอกจากนี้ยังมีการพัฒนาทฤษฎีสมการขึ้นในยุคนี้ ทั้งทางด้านสัญลักษณ์ และการใช้ตัวอักษรแทนตัวแปร ซึ่งใกล้เคียงกับรูปแบบในปัจจุบัน พีชคณิตที่เป็นกฎเกณฑ์ สรุปลงได้ในบทพิสูจน์ของทฤษฎีหลัก 2 ทฤษฎี ทฤษฎีแรกพิสูจน์ในปี ค.ศ. 1799 กล่าวว่า ในระบบจำนวนเชิงซ้อน ทุก ๆ สมการดีกรี n มี n ราก ทฤษฎีที่สอง พิสูจน์เป็นขั้น ๆ จากประมาณ ค.ศ. 1824 ถึง ค.ศ. 1830 กล่าวว่า สมการพหุนามทั่วไปดีกรี 5 หรือสูงกว่า ไม่สามารถพิสูจน์ได้ด้วยทฤษฎีทางพีชคณิต ผลจาก 2 ข้อนี้ พีชคณิตก็ถึงกาลอวสานที่เป็นวิทยาศาสตร์ของสมการตัวแทนทางกราฟของจำนวนเชิงซ้อน และการปฏิบัติการในระนาบก็นำไปสู่การยอมรับทั่วไปด้วยเช่นกัน พัฒนาการของพีชคณิตได้ดำเนินมาอย่างต่อเนื่องตลอดช่วง 3 ศตวรรษต่อมาท่ามกลางช่วงระยะเวลาของการพัฒนาเนื้อหาสาระซึ่งก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเป็นอย่างมาก ในฐานะที่เป็นสาขาวิชาที่แยกจาก

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

คณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการคำนวณที่ดำเนินการกับจำนวนเต็ม อย่างไรก็ตามมีการตั้งข้อสันนิษฐานว่าสัญลักษณ์ตัวเลขนั้นเป็นตัวแทนของจำนวนที่แท้จริง ซึ่งอาจเป็นจำนวนเต็มหรือเศษส่วน และได้ก่อเกิดตำราทางคณิตศาสตร์เล่มหนึ่งที่ดีที่สุดในยุคนั้นเป็นของ แอล ยุคเลอร์ คือ หนังสือพีชคณิตเบื้องต้น ซึ่งรวมเอาไว้ทั้งจำนวนเต็ม , เศษส่วนแบบ ordinary และระบบเลขฐานสิบ, รากที่สอง, ฟังก์ชันลอกการิทึม, สมการเชิงพีชคณิตดีกรีหนึ่งถึงดีกรีสี่ , สมการแบบโพรเกสชั่น , การบวกเลข, ตัวเลขไบโนเมียลของนิวตัน และสมการแบบไอโอแฟนทีน (Kaput. 1998 : 25) ดังนั้น ในช่วงกลางศตวรรษที่ 18 พีชคณิตก็กลายเป็นตัวแทนของวิชาพีชคณิตเบื้องต้น และเป็นจุดเริ่มต้นพีชคณิตในปัจจุบัน

ความเปลี่ยนแปลงที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งในวิชาพีชคณิต คือ ในต้นศตวรรษที่ 19 นิยามคุณสมบัติของระบบจำนวนและจำนวนเชิงซ้อน ก็ได้ถูกนำมาพิจารณา ระบบพีชคณิตอื่น ๆ ก็มีการค้นหาต่อไป นักคณิตศาสตร์ถือว่า พีชคณิตเป็นเลขคณิตซึ่งได้สรุปให้เป็นกรณีทั่ว ๆ ไป (Generalized arithmetic) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าเป็นวิชาเลขคณิต ตัวเลขจะมีค่าเฉพาะลงไปตามที่ปรากฏอยู่ แต่วิชาพีชคณิต ตัวอักษรจะเป็นสัญลักษณ์แทนตัวเลขใด ๆ ก็ได้ตามเงื่อนไขที่ปรากฏให้ นอกจากนั้นนักคณิตศาสตร์บางคนได้เริ่มตระหนักถึงโครงสร้างของวิชาพีชคณิตว่า จะต้องมีทฤษฎีหรือกฎต่าง ๆ ควบคุมโครงสร้างอยู่ด้วย เช่น กฎการสลับที่ (Commutative Law) ของการบวกและการคูณ กฎการรวมหมู่ (Associative Law) ของการบวกและการคูณ และกฎการกระจายผลคูณของผลบวก (Distributive Law of Multiplication over Addition) เป็นต้น (Kieran. 1992 : 401) แต่หลังจากนั้นเล็กน้อย นักคณิตศาสตร์ก็สามารถคิดพีชคณิตแบบใหม่ที่มีโครงสร้างต่างไปจากที่กล่าวนี้ได้ ซึ่งได้ทำให้วิชาพีชคณิตก้าวไปสู่ลักษณะที่เป็นนามธรรมมากยิ่งขึ้น ซึ่งนักคณิตศาสตร์คนแรกที่ทำได้สำเร็จ คือ ดับลิว อาร์ แฮมิลตัน (W.R. Hamilton) ในปี ค.ศ. 1843 แฮมิลตันได้คิดพีชคณิตขึ้นมาแบบหนึ่งชื่อ "Quaternion algebra" ซึ่งในเรื่องของการคูณจะไม่เป็นไปตามกฎการสลับที่ และนอกจากแฮมิลตันแล้ว ยังมีนักคณิตศาสตร์คนอื่น ๆ คิดได้อีกด้วย เมื่อได้มีผู้เริ่มต้นไว้เช่นนี้ นักคณิตศาสตร์ในสมัยหลังจากนั้น จึงเริ่มคิดพีชคณิตแบบใหม่ๆ เพิ่มขึ้น โดยการตัดกติกาบางอย่างของพีชคณิตแบบธรรมดาหรือแบบเก่าออกไป หรือไม่เช่นนั้นก็คิดกติกาใหม่ เพื่อใช้แทนกติกาเก่าบางกติกา ซึ่งจากวิธีการเหล่านั้น ทำให้นักคณิตศาสตร์คิดวิธีการทางพีชคณิตที่มีโครงสร้างหรือระบบแตกต่างกันได้มากกว่า 200 แบบแล้ว ตัวอย่างเช่น Groupoids , Quasigroups , Loops , Semi – groups , Monoids , Groups , Rings , Integral Domains , lattices , Division Rings , Boolean Algebra , Fields , Vector Spaces , Jordan Algebras และ Lie

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

Algebras เป็นต้น (สุวรรณา มุ่งเกษม, 2513 : 13) ซึ่งสองแบบหลังเป็นตัวอย่างพีชคณิตแบบที่ไม่เป็นไปตามกฎการรวมหมู่

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า พีชคณิตแบบใหม่ ส่วนมากมีกำเนิดในคริสตศตวรรษที่ 20 ซึ่งนับว่าเป็นการสะท้อนให้เห็นลักษณะเด่นของคณิตศาสตร์ในสมัยปัจจุบันนี้ได้เป็นอย่างดีว่านักคณิตศาสตร์เน้นเรื่องการสร้างข้อสรุป (Generalization) และลักษณะที่เป็นนามธรรม (abstraction) ของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เป็นสำคัญ

2.4 โครงสร้างพีชคณิต

ในหนังสือ Algebra ของ lang Serge (1993 : 1 – 2) ได้กล่าวถึงโครงสร้างของพีชคณิตไว้ว่า วิชาพีชคณิตมีกำเนิดจากการที่มนุษย์หาทางแก้ปัญหาในโลกจริงด้วยการแปลปัญหาออกมาในรูปของสมการหรือระบบสมการ แล้วพยายามสร้างกระบวนการเพื่อหาคำตอบของสมการหรือระบบสมการออกมาเป็นตัวเลข ดังนั้นการศึกษาพีชคณิตในระดับมูลฐานจึงเป็นการศึกษาการใช้สัญลักษณ์เพื่อสื่อความคิด และศึกษาระเบียบวิธีของพีชคณิตซึ่งเป็นกระบวนการต่าง ๆ อย่างเป็นระบบ อย่างไรก็ตามพีชคณิตไม่ได้เป็นเพียงวิชาที่ศึกษาเฉพาะเทคนิควิธีเท่านั้น แต่พีชคณิตยังมีการพัฒนาในตัวเองจนกระทั่งเป็นศาสตร์แขนงหนึ่ง ดังเช่นวิชาเรขาคณิต ฟิสิกส์ หรือเคมี เป็นต้น พีชคณิตในระดับชั้นสูงถูกกล่าวถึงในชื่อของวิชาพีชคณิตนามธรรม (abstract algebra) แต่ปัจจุบันดังเป็นที่ทราบกันดีว่า ทฤษฎีบทของพีชคณิตนามธรรมหลายทฤษฎีบทได้ถูกประยุกต์ใช้ในหลาย ๆ สาขาวิชาทางวิทยาศาสตร์ จึงไม่เป็นนามธรรมต่อไป

พีชคณิตนามธรรมเป็นการศึกษาในรูปแบบของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ซึ่งเราเรียกว่า “โครงสร้างพีชคณิต (Algebraic Structures)” โครงสร้างนี้ประกอบไปด้วยเซตของสมาชิกซึ่งเราเรียกว่า เอกภพ (universe) กับเซตของการดำเนินการบนเอกภพซึ่งต้องสอดคล้องกับกลุ่มของสัจพจน์ตามที่กำหนด การศึกษาในลักษณะเช่นนี้มีกำเนิดจากความคิดที่จะพัฒนากระบวนการหาคำตอบของสมการในวิชาพีชคณิตระดับมูลฐานเพื่อให้ได้คำตอบของสมการทุกรูปแบบ ดังที่ทราบกันดีว่าตัวอย่างสำคัญซึ่งยืนยันความคิดนี้ได้แก่ทฤษฎีของกาลัวส์

โครงสร้างพีชคณิตประกอบด้วยการดำเนินการทวิภาค ซึ่งอาจจะมีเพียงอย่างเดียวหรือหลายอย่างก็ได้ นั่นคือ ประกอบด้วยการดำเนินการลักษณะต่าง ๆ 3 ลักษณะ ดังนี้

ลักษณะที่ 1 ประกอบด้วยการดำเนินการที่มีตัวดำเนินการ 1 ตัว ภายในเซตเซตเดียว การดำเนินการลักษณะนี้จะเป็นเรื่องที่เกี่ยวกับกรุ๊ป ซึ่งได้แก่ Monoids , Groups , Normal subgroups , Cyclic groups , Operation of a group on a set , Sylow subgroups , Direct

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

sums and free abelian groups , Finitely generated abelian groups , The dual group , Inverse limit and completion , Categories and functors , Free groups ลักษณะที่ 2 ประกอบด้วยการดำเนินการที่มีตัวดำเนินการ 2 ตัว ในเซตเซตเดียว การดำเนินการลักษณะนี้เกี่ยวข้องกับริง ได้แก่ Rings and homomorphisms , Commutative rings , Polynomials and group rings , Localization , Principal and factorial rings และลักษณะที่ 3 ประกอบด้วยการดำเนินการที่มีตัวดำเนินการ 2 ตัว ในเซต 2 เซต การดำเนินการลักษณะนี้เกี่ยวข้องกับโมดูล ได้แก่ Basic definitions , The group of homomorphisms , Direct products and sums of modules , Free modules , Vector spaces , The dual space and dual module , Modules over principal rings , Euler – Poincaré maps , The snake lemma , Direct and Inverse limits

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า โครงสร้างพีชคณิตเป็นโครงสร้างที่ประกอบไปด้วยเซต และมีการดำเนินการบนเซต ซึ่งการดำเนินการนั้นอาจจะประกอบไปด้วยตัวดำเนินการอย่างเดียวหรือหลายอย่างก็ได้ ตัวอย่างเช่น การดำเนินการในลักษณะที่มีตัวดำเนินการตัวเดียวมีการดำเนินการบนเซตเซตเดียว หรือการดำเนินการที่ประกอบไปด้วยตัวดำเนินการ 2 ตัวมีการดำเนินการบนเซตเซตเดียว หรืออาจเป็นการดำเนินการที่ประกอบด้วยตัวดำเนินการ 2 ตัว ดำเนินการบนเซต 2 เซตก็ได้ แล้วแต่คุณสมบัติของเซตแต่ละเซต

3. สมการเชิงเส้น

ในการศึกษาสมการเชิงเส้น ผู้วิจัยได้กำหนดขอบข่ายในการศึกษาโดยเริ่มตั้งแต่ความหมาย ความสำคัญ และประเภทของสมการเชิงเส้น และการแก้สมการเชิงเส้น ดังรายละเอียดต่อไปนี้

3.1 ความหมาย ประเภท และความสำคัญของสมการเชิงเส้น

3.1.1 ความหมายและประเภทของสมการเชิงเส้น

มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นไว้หลายท่าน ดังนี้

วัฒนา ภิญโญกุล (2539 : 75 – 76) ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นไว้ดังนี้

สมการเชิงเส้น (Linear equations) คือ สมการที่กำลังของตัวแปรเป็นศูนย์หรือหนึ่ง ตัวอย่างเช่น

1. $2x + 3 = 5$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

2. $x - 6 = 3(x + 5)$

อำนวย เลิศชยันตี (2541 : 252 – 253) กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นว่า

สมการเชิงเส้น ตามความหมายในวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง สมการใด ๆ ที่มีตัวแปร 1 ตัว หรือ 2 ตัว หรือ 3 ตัว แต่กำลังของตัวแปรนั้น ๆ ต้องเป็นหนึ่งเสมอ ดังเช่น

ก. $x = a$

$y = b$ หรือ

ข. $ax + by = c$

ค. $ax + by + cz = d$

ค่าคงที่ ใน ก. ข. ค. คือ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

x, y, z เป็นตัวแปรใด ๆ

สมการใน ก. ข. หรือ ค. ต่างก็เรียกว่าสมการเชิงเส้น มาจากคำว่า Linear equations ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น จะเน้นหนักในสมการ หนึ่งตัวแปร และสองตัวแปร ส่วนสมการที่มีตัวแปรสามตัวแปรใน ค. ต้องเรียนในระดับชั้นสูงขึ้นไปอีก

รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้น คือ $ax + by + c = 0$ ถ้านำมาเขียนเป็นกราฟในระบบแกนพิกัดฉาก จะได้กราฟเป็นเส้นตรงเสมอ ส่วนรูปร่างจะเป็นเช่นไรนั้น ขึ้นอยู่กับค่าของ a, b ใน $ax + by + c = 0$ เป็นต้น

สมพร สุขอุ้ม (2549 : 24 – 25) กล่าวถึงสมการเชิงเส้นไว้ดังนี้

สมการเชิงเส้น หมายถึง สมการที่ตัวแปรมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง มีรูปทั่วไปคือ $ax + by + c = 0$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

คำตอบของสมการเชิงเส้น คือ จำนวนที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริง

คำตอบของสมการเชิงเส้นมี 3 แบบตามลักษณะคำตอบ คือ

1. สมการที่มีคำตอบแบบเฉพาะเจาะจง หรือมีจำนวนบางจำนวนเป็นคำตอบ
2. สมการที่เป็นเอกลักษณ์ หรือมีจำนวนทุกจำนวนเป็นคำตอบ
3. สมการที่ขัดแย้ง หรือไม่มีจำนวนใดเป็นคำตอบ

แอลฟอนเซ่ (Gobran , Alfonse. 1982 : 86) กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นไว้ดังนี้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

สมการจะเรียกว่าสมการเชิงเส้น (Linear equations) ถ้าตัวแปรทุกตัวของสมการมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง และไม่มีพจน์ใดของสมการที่เป็นผลคูณของตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัว

พิจารณาตัวอย่างสมการต่อไปนี้

$x + y - z = 1$ เป็นสมการเชิงเส้นที่มี x, y และ z เป็นตัวแปร

$x^2 + x = 6$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้น เพราะว่า เลขชี้กำลังของตัวแปรมากกว่า 1

$2x + xy = 9$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้น เพราะว่า มีบางพจน์ของสมการที่เป็นผลคูณของตัวแปรมากกว่า 1 ตัว

ดาวิด (Gustason , R. David. 1983 : 133) ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นไว้ดังนี้

สมการที่เป็นสมการดีกรีหนึ่ง (first – degree equations) หรือมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง เรียกว่า สมการเชิงเส้น (Linear equations)

ตัวอย่างของสมการเชิงเส้น ได้แก่

1. $3x + 6 = 24$
2. $3(2x - 1) = 2x + 9$
3. $y + 2 = 4$

สำหรับสมการเชิงเส้นที่ค่าของตัวแปรและคำตอบหรือรากของสมการมีความเป็นไปได้ทุกค่าของจำนวนจริง จะเรียกสมการที่มีลักษณะแบบนี้ว่า สมการที่เป็นเอกลักษณ์ (identities equations)

ตัวอย่างเช่น $2x + 2 = 2(x + 1)$

สมการเชิงเส้นที่มีเซตของคำตอบเป็นเซตว่าง หรือไม่สามารถหาค่าของตัวแปรหรือคำตอบของสมการได้ เรียกว่า สมการที่ขัดแย้ง (impossible equations or contradiction equations)

ตัวอย่างเช่น $2x + 2 = 2x + 1$

สมการเชิงเส้นที่คำตอบของสมการเป็นจำนวนบางจำนวน หรือเป็นค่าที่เฉพาะเจาะจง มีคำตอบที่แน่นอนตายตัว เรียกว่า สมการที่มีคำตอบเฉพาะเจาะจง (conditional equation or unique solution)

ตัวอย่างเช่น $2x + 2 = 4$

คอลแมน (Bernard Kolman. 1984 : 50) กล่าวถึงความหมายของสมการ เชิงเส้นไว้ว่า

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

สมการที่เป็นสมการดีกรีหนึ่ง (first – degree equations) หรือสมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นหนึ่งหรือศูนย์ เรียกว่า สมการเชิงเส้น (Linear equations) รูปทั่วไป คือ $ax + by + c = 0$

พิจารณา $3x = 2x + x$

จะเห็นว่า สมการเป็นจริงสำหรับทุกค่าของตัวแปร และเรียกสมการนี้ว่า สมการที่เป็นเอกลักษณ์ (identities) สำหรับสมการที่เป็นจริงบางค่าของตัวแปร เรียกว่า สมการที่มีคำตอบเฉพาะเจาะจง (conditional equations) ทุก ๆ สมการเชิงเส้น สมการที่อยู่ในรูป $ax + b = 0$, $a \neq 0$ เป็นสมการที่มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว ส่วนสมการที่ไม่มีคำตอบหรือหาคำตอบไม่ได้ เช่น

$$3x = 3x + 1$$

บวกด้วย $-3x$ ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$3x - 3x = 3x + 1 - 3x$$

$$0 = 1$$

เรียกสมการลักษณะนี้ว่า สมการที่ขัดแย้ง (contradictions)

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า สมการเชิงเส้น (Linear equation) หมายถึง สมการที่แต่ละพจน์มีเพียงค่าคงที่ หรือผลคูณระหว่างค่าคงที่กับตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง ซึ่งจะมีดีกรีของพหุนามเท่ากับศูนย์หรือหนึ่ง รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นบนระบบจำนวนจริง คือ $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ (สมการเชิงเส้น n ตัวแปร) เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปร ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยศึกษาเฉพาะสมการเชิงเส้นที่มีรูปทั่วไปบนระบบจำนวนจริง คือ $ax + b = 0$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ แบ่งตามลักษณะของคำตอบได้ 3 ลักษณะ ดังนี้

1. สมการที่มีคำตอบเฉพาะ เป็นสมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว หรือมีคำตอบที่เฉพาะเจาะจง มีจำนวนจำกัด

2. สมการเชิงเส้นที่เป็นเอกลักษณ์ เป็นสมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเป็นจำนวนทุกจำนวน หรือมีคำตอบหลากหลาย ไม่ว่าตัวแปรจะเป็นค่าใด ๆ สมการก็ยังเป็นจริงอยู่เสมอ

3. สมการเชิงเส้นที่ขัดแย้ง เป็นสมการเชิงเส้นที่ตัวแปรไม่สามารถหาค่าได้ หรือไม่สามารถหาคำตอบได้ เกิดข้อขัดแย้งขึ้น ไม่ว่าค่าของตัวแปรจะเป็นค่าใด สมการก็ยังเป็นเท็จอยู่เสมอ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

3.1.2 ความสำคัญของสมการเชิงเส้น

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้กำหนดให้ผู้เรียน เรียนเรื่อง สมการและการแก้สมการ เริ่มตั้งแต่ช่วงชั้นที่ 2 (ป. 4 – 6) โดยให้เรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 สมการที่เรียนมีลักษณะเป็นสมการเชิงเส้น ประกอบด้วย สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าและมีคำตอบเดียว (สมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเฉพาะ) สมการที่เป็นจริง (สมการเชิงเส้นที่เป็นเอกลักษณ์) และสมการที่เป็นเท็จ (สมการเชิงเส้นที่ขัดแย้ง) และมีการแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า (สมการที่มีคำตอบเฉพาะ)โดยใช้สมบัติของการเท่ากัน (การแก้สมการโดยใช้สัญลักษณ์) ช่วงชั้นที่ 3 (ม. 1 – 3) เรียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งแบ่งเป็น สมการเชิงเส้นที่มีจำนวนบางจำนวนเป็นคำตอบ (สมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเฉพาะ) สมการเชิงเส้นที่มีจำนวนทุกจำนวนเป็นคำตอบ (สมการเชิงเส้นที่เป็นเอกลักษณ์) และสมการเชิงเส้นที่ไม่มีจำนวนใดเป็นคำตอบ (สมการเชิงเส้นที่ขัดแย้ง) นอกจากนี้ยังมีเนื้อหาเรื่อง สมการเชิงเส้นสองตัวแปร ระบบสมการเชิงเส้น รวมทั้งการแก้สมการเชิงเส้น และระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ สัญลักษณ์ ใช้กราฟ และใช้ตารางหรือการแทนค่าในการแก้สมการในช่วงชั้นนี้ ส่วนช่วงชั้นที่ 4 เป็นเนื้อหาที่เกี่ยวกับการประยุกต์ใช้การแก้สมการเชิงเส้นในการแก้ปัญหาและสถานการณ์ต่างๆ การนำสมการเชิงเส้นไปเป็นตัวแบบในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ก็คือ กำหนดการเชิงเส้น ซึ่งเป็นเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานของการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน การดำรงชีวิต การประกอบอาชีพ รวมทั้งมีส่วนช่วยพัฒนาเกี่ยวการค้าขาย ทำธุรกิจ ระบบเศรษฐกิจเพื่อการพัฒนาประเทศให้เจริญรุ่งเรืองยิ่งขึ้น (กระทรวงศึกษาธิการ. 2545 : 10 – 36)

การแก้ปัญหาบางอย่างเกี่ยวกับชีวิตประจำวัน หรือในแขนงวิชาต่าง ๆ เช่น คณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา ฯลฯ หรือแม้แต่ทางด้านเศรษฐศาสตร์นั้น ล้วนใช้การหาผลเฉลยหรือคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นมาอธิบาย ในชีวิตแต่ละวันเมื่อตื่นขึ้นมาแต่ละวันเราต้องเผชิญกับปัญหาต่าง ๆ มากมาย ปัญหาหลายอย่างสามารถใช้สมการเข้าช่วยได้มาก และสมการที่เป็นพื้นฐานของทุก ๆ สมการก็คือ สมการเชิงเส้น (สมเกียรติ ชัยพรเจริญศรี. 2547 : 45) ซึ่งถ้าแบ่งสมการเชิงเส้นตามลักษณะของคำตอบของสมการแล้วก็จะได้ สมการเชิงเส้น 3 ลักษณะ คือ

1. สมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเฉพาะ เป็นสมการที่ใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนพีชคณิตและสมการระดับสูงขึ้นไป เช่น สมการดีกรีสองหรือดีกรีสูงกว่าสอง พาราโบลา ไฮเพอร์โบลา เป็นต้น นอกจากนี้ยังช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ เช่น

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

วินัยมีเงินอยู่ 3,500 บาท ต้องการซื้อโทรทัศน์ที่มีราคา 5,500 บาท เขาต้องหาเงินเพิ่มอีกเท่าไรจึงจะสามารถซื้อโทรทัศน์เครื่องนี้ได้

วิธีทำ ให้ x แทน จำนวนเงินที่วีระต้องหาเพิ่ม

จากโจทย์ เขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ว่า

$$3{,}500 + x = 5{,}500$$

เพราะว่า $3{,}500 + 2{,}000 = 5{,}500$

จะได้ว่า $x = 2{,}000$

ดังนั้น วีระจะต้องหาเงินเพิ่มอีก 2,000 บาท จึงจะสามารถซื้อโทรทัศน์เครื่องนี้ได้

2. สมการเชิงเส้นที่เป็นเอกลักษณ์ เป็นสมการที่ใช้เป็นเครื่องมือในการคิดวิเคราะห์แก้ปัญหาต่าง ๆ ใช้ในการพิสูจน์ และใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา เช่น สมบัติของการเท่ากัน สมบัติถ่ายทอด การสมมูลกัน เป็นต้น และยังช่วยในการตัดสินใจแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้ เช่น

พลอยมีเงินอยู่ 3 บาท พ่อให้อีกจำนวนหนึ่ง เพชรมีเงินอยู่เท่ากับจำนวนเงินที่พ่อให้พลอย และพ่อให้เงินเพชรอีก 3 บาท อยากทราบว่า เงินที่พ่อให้พลอยเป็นจำนวนเท่าใดจึงจะทำให้ทั้งสองคนมีเงินเท่ากัน

วิธีทำ ให้ y แทน จำนวนเงินที่พ่อให้พลอย

นั่นคือ พลอยมีเงินทั้งหมด $3 + y$ บาท และ

เพชรมีเงินทั้งหมด $y + 3$ บาท

แต่ทั้งสองคนมีเงินเท่ากัน

จะได้สมการเป็น $3 + y = y + 3$

จากสมการจะเห็นว่า ไม่ว่า y จะมีค่าเท่าใด ทั้งสองข้างของสมการก็ก็จะมีค่าเท่ากันเสมอ

ดังนั้น ไม่ว่าพ่อจะให้เงินพลอยเท่าไดทั้งสองคนก็จะมีเงินเท่ากันเสมอ

3. สมการเชิงเส้นที่ขัดแย้ง เป็นสมการเชิงเส้นที่ทำให้ทราบข้อผิดพลาดของสมมติฐานที่ตั้งไว้ และเนื่องจากเป็นสมการที่มีรูปแบบชัดเจนว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับไม่เท่ากัน ขัดแย้งกัน จึงทำให้ง่ายต่อการตอบข้อสงสัยของปัญหา และทราบว่าสมการไม่มีคำตอบ นอกจากนั้นยังเป็นพื้นฐานของการเรียนคณิตศาสตร์ระดับสูงโดยเฉพาะการ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และยังมีประโยชน์ในการตัดสินใจ ทำให้เลือกตัดสินใจในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง เช่น

สุดาต้องการจะทำไข่เจียวจึงไปซื้อไข่ไก่ที่ตลาด พบว่า แม่ค้าขายไข่ไก่ราคา 3 ฟอง 10 บาท ถ้าซื้อฟองเดียว ขายราคา ฟองละ 4 บาท อยากทราบว่าสุดาจะตัดสินใจเลือกซื้อไข่ไก่อย่างไร

วิธีทำ ให้ z แทน ราคาไข่ไก่ 1 ฟอง

จะได้สมการ $z = 4$ และ $3z = 10$

$$\frac{3}{3}z = \frac{10}{3}$$

$$z = 3.33$$

จาก $z = 4$ และ $z = 3.33$

จะได้ว่า $4 = 3.33$

แต่ $4 \neq 3.33$ และ $4 > 3$

ดังนั้น สุดาตัดสินใจเลือกซื้อไข่ไก่ 3 ฟอง ในราคา 10 บาท

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า สมการเชิงเส้นที่แบ่งตามลักษณะของคำตอบ 3 ลักษณะ มีความสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์อย่างยิ่ง เพราะช่วยในการคิดวิเคราะห์ปัญหา ตัดสินใจแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันได้ นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานในการเรียนพีชคณิตและคณิตศาสตร์ รวมทั้งวิชาอื่น ๆ เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา หรือแม้แต่เศรษฐศาสตร์ก็ใช้สมการเชิงเส้นเป็นพื้นฐานเช่นกัน หากผู้เรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นเป็นอย่างดีแล้ว การเรียนรู้ในระดับที่สูงขึ้นก็จะเป็นการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพเป็นอย่างยิ่ง

3.2 การแก้สมการเชิงเส้น

ใน ENCYCLOPAEDIA MATHEMATICS ; Volume 1 (1995 : 77) ได้กล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานทางพีชคณิต ซึ่งเกี่ยวข้องกับการแก้สมการไว้ว่า ทฤษฎีพื้นฐานทางพีชคณิต คือ พหุนามใด ๆ ที่มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงนั้นสามารถที่จะแยกตัวประกอบของพหุนามออกเป็นตัวประกอบย่อยเชิงเส้น หรือตัวประกอบแบบสมการสองชั้นที่มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง สมการพหุนามที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่และค่าสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงจะมีค่ารากที่สองเป็นจำนวนจริงเสมอ

และได้มีนักการศึกษากล่าวถึง การแก้สมการเชิงเส้นไว้หลายท่าน ดังนี้

วัฒนา ภิญโญกุล (2539 : 75 – 76) ได้กล่าวถึงเนื้อหาในการแก้สมการเชิงเส้นไว้ดังนี้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ขั้นตอนในการแก้สมการเชิงเส้น

1. ถ้าสมการประกอบด้วยเศษส่วนหลายจำนวนบวกหรือลบกันอยู่ ขจัดให้ส่วนหมดไป โดยการใช้ ค.ร.น. ของส่วนคูณตลอด

2. จัดสมการใหม่โดยให้ตัวแปรอยู่ข้างเดียวกัน และค่าคงที่อยู่อีกข้างของสมการ

3. จัดรูปของสมการให้ด้านซ้ายมือและขวามือมีข้างละพจน์เดียว

4. ให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรหารตลอดจะได้ค่าของตัวแปรเป็นคำตอบของสมการ

อำนวย เลิศชยันตี (2541 : 255 – 257) ได้กล่าวถึงการแก้สมการเชิงเส้นไว้ ดังนี้

การแก้สมการเชิงเส้น คือ ขบวนการที่พยายามจะหาค่าตัวแปรที่แทนในสมการที่กำหนดให้มาเป็นจริง ขบวนการแก้สมการจำเป็นต้องใช้คุณสมบัติของความเท่ากันเพื่อสร้างสมการใหม่ที่มีค่าเท่ากันหรือสมมูล (Equivalent) กับสมการเดิม คำว่า สมมูล นี้เป็นคำศัพท์ที่หมายถึงว่า สมการสองสมการจะสมมูลกันก็ต่อเมื่อ ทุกค่าของตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการหนึ่งเป็นจริงย่อมจะเป็นจริงในอีกสมการหนึ่งด้วย เช่นนี้ แสดงว่า สมการสองสมการสมมูลกัน การเท่ากัน กับคำว่าสมมูล ทำให้นักเรียนอาจนึกว่าสมการสองสมการที่มีค่าเท่ากันก็ได้ ตัวอย่างเช่น

$x + 1 = 2$ ----------(1) $x - 2 = -1$ ----------(2)

สมการ (1), (2) เป็นสมการที่สมมูลกัน

พิจารณาการแก้สมการต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $2x + 3 = 5$

วิธีทำ

$2x + 3$	$=$	5	(จากโจทย์)
$2x + 3 - 3$	$=$	$5 - 3$	(นำ 3 ลบทั้งสองข้าง)
$2x$	$=$	2	($3 - 3 = 0$, $5 - 3 = 2$)
x	$=$	$\frac{2}{2}$	(นำ 2 หารทั้งสองข้าง)
x	$=$	1	

ตอบ 1

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2547 : 150) กล่าวถึงการแก้สมการเชิงเส้นไว้ ดังนี้

การแก้สมการเชิงเส้นเป็นการหาคำตอบของสมการเชิงเส้น มีวิธีการที่หลากหลาย อีกวิธีหนึ่งที่ง่าย และนิยมใช้ คือ การแทนค่า เป็นการนำค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้มาแทนค่าตัวแปรในสมการ ถ้าสอดคล้องกับสมการ หรือสมการเป็นจริง แสดงว่า จำนวนนั้นเป็นคำตอบของสมการ ดังตัวอย่าง

จงหาคำตอบของสมการ $x-2=-5$

วิธีทำ เนื่องจาก $-3-2=-5$

นั่นคือ เมื่อแทน x ด้วย -3 ใน $x-2=-5$

แล้วจะได้สมการเป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการ $x-2=-5$ คือ -3

ตอบ -3

จงหาคำตอบของสมการ $2y+1=4y-3$

วิธีทำ เนื่องจาก $2(2)+1=4(2)-3$

นั่นคือ เมื่อแทน y ด้วย 2 ใน $2y+1=4y-3$

แล้วจะได้สมการเป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการ $2y+1=4y-3$ คือ 2

ตอบ 2

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550 : 57 – 75) กล่าวถึงการแก้สมการเชิงเส้นไว้ ดังนี้

การแก้สมการเชิงเส้นยังมีวิธีการแก้สมการอีกวิธีหนึ่ง คือ การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยสมการเชิงเส้นที่ใช้เมทริกซ์เป็นเครื่องมือในการแก้สมการต้องเป็นสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัวขึ้นไป มีขั้นตอนในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ดังนี้

1. เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่รูปสมการเมทริกซ์
2. หา ดีเทอร์มินันต์ และตัวผกผันของเมทริกซ์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น
3. นำตัวผกผันที่ได้มาคูณด้านซ้ายของสมการ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

4. หาค่าของตัวแปร จะได้คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่ต้องการ

นอกจากขั้นตอนดังกล่าวมาข้างต้นแล้ว การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นยังสามารถหาคำตอบโดยใช้กฎของคราเมอร์ หรือโดยการสร้างเมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวที่ปรากฏระบบสมการเชิงเส้น แล้วดำเนินการกับเมทริกซ์นี้เพื่อหาคำตอบที่ต้องการ ซึ่งอาจใช้เมทริกซ์แต่งเติมและการดำเนินการตามแถวเข้าช่วยในการหาคำตอบของระบบสมการ โดยจะได้เมทริกซ์สุดท้ายเป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่สามารถบอกคำตอบของระบบสมการได้ทันที และคำตอบนี้ก็เป็นคำตอบของระบบสมการที่กำหนดด้วย

สมพร สุขอุ้ม (2549 : 25) กล่าวถึงการแก้สมการเชิงเส้นไว้ดังนี้

การแก้สมการเชิงเส้น คือ การหาคำตอบของสมการ โดยวิธีการลองแทนค่าตัวแปรเพื่อให้สมการเป็นจริง หรือวิธีใช้สมบัติของการเท่ากัน ได้แก่

1. สมบัติสมมาตร ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนใด ๆ

2. สมบัติถ่ายทอด ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนใด ๆ

3. สมบัติการบวก ถ้ามีจำนวนสองจำนวนที่เท่ากัน เมื่อนำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งมาบวกแต่ละจำนวนที่เท่ากันนั้น แล้วผลลัพธ์จะเท่ากัน ซึ่งกล่าวได้ว่า ถ้า $a = b$ แล้ว $a+c = b+c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนใด ๆ

จำนวนที่นำมาบวกกับจำนวนที่เท่ากันนั้น อาจจะเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบก็ได้ ในกรณีที่บวกด้วยจำนวนลบ มีความหมายเหมือนกับนำจำนวนบวกมาลบออกจากจำนวนทั้งสองข้างของสมการ คือ ถ้า $a = b$ แล้ว $a+(-c) = b+(-c)$ หรือ $a-c = b-c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนใด ๆ หรือ ถ้า $a = b$ แล้ว $a-c = b-c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนใด ๆ

4. สมบัติการคูณ ถ้ามีสองจำนวนที่เท่ากัน เมื่อนำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งมาคูณกับแต่ละจำนวนที่เท่ากันนั้น แล้วผลลัพธ์จะเท่ากัน ซึ่งกล่าวว่า ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนใด ๆ

จำนวนที่นำมาคูณกับจำนวนสองจำนวนที่เท่ากันนั้น อาจจะเป็นจำนวนเต็มหรือเศษส่วนก็ได้ ถ้า $a = b$ แล้ว $\frac{1}{c} \times a = \frac{1}{c} \times b$ หรือ $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนใด ๆ ที่ $c \neq 0$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ฮันเลย์ (Huntley. 2006 : 47 – 50) ได้กล่าวถึงการแก้สมการเชิงเส้นไว้ว่า

การแก้สมการเชิงเส้นมีหลายวิธีทั้งการใช้สัญลักษณ์ หรือสมบัติของจำนวนจริง การใช้กราฟ และการใช้ตารางหรือการแทนค่าในการแก้สมการเชิงเส้น โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. การใช้สัญลักษณ์ในการแก้สมการเชิงเส้น เป็นการใช้สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริงหาคำตอบของสมการเชิงเส้น ซึ่งสมบัติที่ใช้ ได้แก่ สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติการบวก และสมบัติการคูณ ดังตัวอย่าง

จงแก้สมการ $3(x-2) = 2x+1$

วิธีทำ จากสมการ $3(x-2) = 2x+1$

จะได้ $3x-6 = 2x+1$

$3x-2x = 1+6$

ดังนั้น $x = 7$

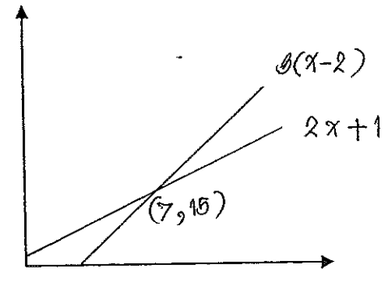
ตอบ 7

2. การใช้กราฟในการแก้สมการเชิงเส้น เป็นการแก้สมการที่นำทั้งสองข้างของสมการมาเขียนกราฟเพื่อหาคำตอบของสมการ ซึ่งคำตอบของสมการขึ้นอยู่กับลักษณะของกราฟที่ได้ หากกราฟของสมการตัดกัน จุดตัดที่ได้คือคำตอบของสมการ หากกราฟไม่ตัดกัน (ขนานกัน) จะได้ว่า สมการเชิงเส้นนั้น ๆ ไม่มีคำตอบบนระบบจำนวนจริง หรือหาคำตอบไม่ได้บนระบบจำนวนจริง ดังตัวอย่าง

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

จงแก้สมการ $3(x-2) = 2x+1$

วิธีทำ นำ $3(x-2)$ หรือ $3x-6$ และ $2x+1$ มาเขียนกราฟ จะได้กราฟ ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า กราฟของสมการตัดกัน

และตัดกันที่จุด $x = 7$

ตอบ 7

3. การใช้ตารางหรือการแทนค่าในการแก้สมการเชิงเส้น เป็นการแก้สมการเชิงเส้นที่นำค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรแทนค่าตัวแปร จนได้ค่าที่สอดคล้องกับสมการ หรือทำให้สมการเป็นจริง ค่าของตัวแปรที่ได้นั้นคือคำตอบของสมการ ดังตัวอย่าง

จงแก้สมการ $3(x-2) = 2x+1$

วิธีทำ จากสมการ $3(x-2) = 2x+1$

จะได้ $3x-6 = 2x+1$

เพราะว่า $3(7)-6 = 2(7)+1$

$15 = 15$

จะเห็นว่า สมการเป็นจริง

ดังนั้น $x = 7$

ตอบ 7

จากที่กล่าวถึงการแก้สมการเชิงเส้นมาข้างต้น สรุปได้ว่า การแก้สมการเชิงเส้นเป็นกระบวนการหาคำตอบของสมการเชิงเส้น หรือการหาค่าของตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการและทำให้สมการเป็นจริง โดยมีวิธีการในการแก้สมการเชิงเส้นหลายวิธี ในการแก้สมการเชิงเส้นแต่ละครั้ง จะต้องพิจารณาลักษณะของสมการว่าวิธีการใดที่เหมาะสมในการใช้เป็นเครื่องมือในแก้สมการเชิงเส้นนั้น ๆ เพื่อให้ได้คำตอบของสมการตามที่ต้องการ

4. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้สาระพีชคณิต

พีชคณิต เป็นอีกสาระหนึ่งที่ผู้เรียนต้องมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง เนื่องจากพีชคณิตมีความเป็นนามธรรมอย่างแท้จริง ดังนั้นครูต้องใช้ความพยายามในการจัดกิจกรรมให้เป็นรูปธรรมมากที่สุด เพื่อให้นักเรียนมีความเชื่อมโยงสิ่งที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรมให้ได้ และเมื่อนักเรียนได้เห็นสิ่งที่เป็นรูปธรรมแล้ว ความเข้าใจ ความจำได้จะยั่งยืน (สุวัฒนา เอี่ยมอรพรรณ. 2549 : 75) ลักษณะของพีชคณิตมีความเป็นนามธรรมสูง ดังนั้นหากได้มีการทดลองลงมือปฏิบัติ จัดกิจกรรมที่ใช้มโนภาพและการนำเสนอ การทบทวน ตลอดจนการ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

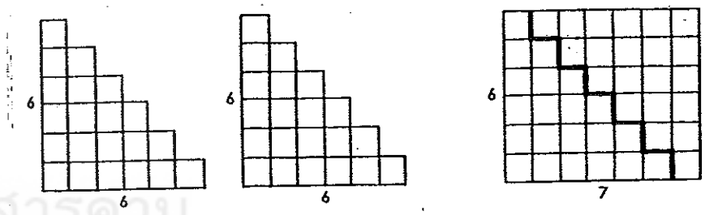
ขยายความที่เร้าใจ จะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจ และเห็นคุณค่าของพีชคณิตมากขึ้น ต่อไปนี้จะนำเสนอหลักการจัดกิจกรรมการเรียนรู้พีชคณิต และตัวอย่าง เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น ดังรายละเอียดต่อไปนี้

4.1 การสร้างแรงจูงใจในการเรียนพีชคณิต

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้พีชคณิตสามารถกระทำได้หลายรูปแบบ เนื่องจากเนื้อหาของพีชคณิตหลากหลายในองค์ประกอบ ดังนั้นการสร้างแรงจูงใจให้นักเรียนอยากเรียนจึงสามารถทำได้โดยการใช้สื่อหรือกิจกรรมในรูปแบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ (ฉวีวรรณ เศวตมาลย์. 2543 : 166)

4.1.1 การใช้สื่อรูปเรขาคณิต รูปเรขาคณิตมักจะให้จุดเริ่มต้นที่เป็นรูปธรรม เพื่อนำไปสู่กรณีทั่วไปทางพีชคณิต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ชุดของขั้นบันไดแต่ละจุดดังภาพสามารถนำไปใช้แทนผลบวกของจำนวน 1 ถึง 6 เมื่อนำมาต่อกัน จะได้ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 6×7



รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีขนาด 6×7 หรือประกอบด้วยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 42 รูป แต่จำนวนสี่เหลี่ยมดังกล่าวก็คือ ผลบวกของจำนวน 1 ถึง 6 สองชุด นั่นคือ

$$1+2+3+4+5+6 = \frac{42}{2}$$

$$= 21$$

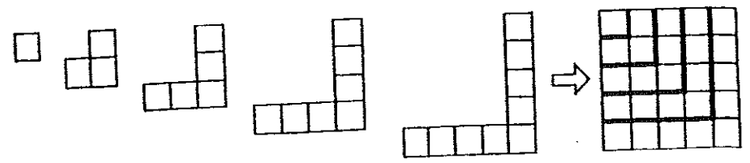
ต่อไปลองวาดภาพเซตของบันไดแต่ละเซตที่มี n ขั้น นำ 2 เซตนั้นมาเชื่อมต่อกัน ด้วยวิธีนี้ทำให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่วัดได้ขนาด $n \times (n+1)$ หรือเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $n(n+1)$ รูป ซึ่งจะได้ว่า

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

นั่นคือ รูปเรขาคณิตในตอนแรกได้ส่งผลทำให้เกิดกรณีทั่วไป (กรณีที่ n) ได้

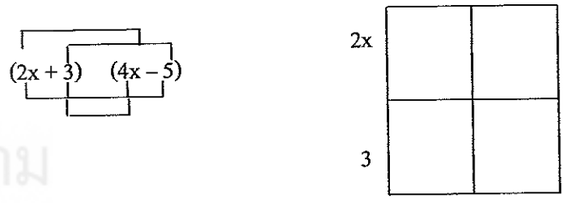
มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

4.1.2 การใช้การพิสูจน์โดยปราศจากถ้อยคำ การพิสูจน์พีชคณิตโดยปราศจากถ้อยคำ สามารถทำให้สนุกสนานได้ในชั้นเรียน จากรูปที่ได้ดังต่อไปนี้



รูปเหล่านี้แสดงตัวอย่างของกรณีทั่วไปว่า ผลบวกของจำนวนคี่ n จำนวนแรก คือ n^2

4.1.3 การใช้รูปแบบต่าง ๆ เพื่อสร้างความเข้าใจทางพีชคณิต เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการหาค่าผลคูณนิพจน์ทางพีชคณิต จำเป็นต้องมีการอธิบายมากกว่าหนึ่งวิธี วิธีทั่ว ๆ ไป ของการคูณนิพจน์อาจแสดงไว้ทางด้านซ้าย แต่อีกวิธีให้ไว้ทางด้านขวา ซึ่งอาจจะเข้าใจได้ง่ายกว่าสำหรับบางคน



จะได้รูปแบบที่แตกต่างกัน 2 รูปแบบ สำหรับกระบวนการเดียวกัน ทั้งสองรูปแบบได้ผลลัพธ์ออกมา 3 พจน์เหมือนกัน คือ $8x^2 + 2x - 15$ ซึ่งก็คือ ผลคูณของพจน์ย่อย 4 พจน์นั่นเอง

4.1.4 การวิเคราะห์ทางพีชคณิต ปริศนาและสิ่งแปลก ๆ เกี่ยวกับตัวเลขที่คุ้นเคยจำนวนมากที่ถูกออกแบบเพื่อสร้างสรรค์ จูงใจ และคงไว้ซึ่งความน่าสนใจ ได้มีการวิเคราะห์ทางพีชคณิตเพื่อช่วยในการแสดงให้นักเรียนเห็นว่าเครื่องมือทางพีชคณิตมีประโยชน์อย่างไร พิจารณากลเม็ดทางคณิตศาสตร์เพียงเล็กน้อยนี้เกี่ยวข้องกับจำนวน 1089

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ขั้นตอน	ตัวอย่าง
จงเขียนจำนวนเลข 3 หลัก ที่หลักร้อยมีค่า	เลือก 783
มากกว่าหลักหน่วยอย่างน้อยที่สุด 2	783
กลับเลขหลักร้อยกับหลักหน่วยแล้วลบกัน	387
	396
กลับเลขหลักร้อยกับหลักหน่วยอีกครั้ง	396
แล้วบวกกัน	639
	1089

จะได้ผลลัพธ์เป็น 1089 เสมอ

ตัวอย่างต่อไป คือ

จงเขียนวันเกิดของนักเรียนในรูปจำนวน 4 หลัก ใช้สองหลักแรกเป็นเดือน และสองหลักหลังเป็นวันบวกเข้ากับจำนวนที่ได้ในขั้นตอนสุดท้ายข้างต้น (1089) ในการเดาวันเกิด ครูเพียงแต่ลบออกด้วย 1089 ผลลัพธ์สุดท้ายทุกค่ามีวันเกิดเฉพาะอยู่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ผลลัพธ์ที่ได้	1206	1800	2106	2196
	1089	1089	1089	1089
	0117	0711	1017	1107
วันเกิด	17 มกราคม	11 กรกฎาคม	17 ตุลาคม	7 พฤศจิกายน

สำหรับครู จำนวน 1089 เป็นจำนวนพิเศษ เมื่อทำตามกระบวนการต่อไปนี้ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ทางพีชคณิตก็จะทำให้ได้คำตอบออกมา กระบวนการวิเคราะห์เป็นดังนี้

ให้ a เป็นเลขหลักร้อย

b เป็นเลขหลักสิบ

และ c เป็นเลขหลักหน่วย โดยที่ $a > c + 1$

จำนวนเริ่มแรก	$100a + 10b + c$
เมื่อกลับหลัก	$100c + 10b + a$
ลบกัน	$100(a - c) + (c - a)$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

กลับหลัก → $= 100(a-c-1) + 90 + (10+c-a)$

$\underline{100(10+c-a) + 90 + (a-c-1)}$

บวกกัน $100(9) + 180 + 9$

$= 1089$

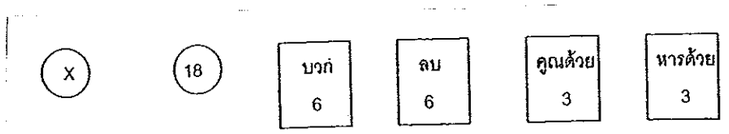
การโยงพีชคณิตเข้ากับสิ่งแปลก ๆ ทางจำนวนทำให้หัวข้อเรื่องมีคุณค่าสำหรับการอภิปรายในชั้นเรียน

4.2 การสร้างความเข้าใจในการแก้สมการ

เนื้อหาส่วนใหญ่ของพีชคณิตจะวนเวียนอยู่ที่การแก้สมการในรูปแบบต่าง ๆ ความเข้าใจในการแก้สมการย่อมหมายถึง ผู้นั้นมีความเข้าใจในพีชคณิต การวิธีแก้สมการเชิงเส้นที่มีความซับซ้อนอาจทำความยุ่งยากให้กับนักเรียน ผู้ที่ไม่สามารถสร้างรูปจำลองแทนกระบวนการขั้นตอนต่าง ๆ ในการแก้สมการ ดังนั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การแก้สมการควรฝึกหัดให้รูปแบบผังงาน สร้างกฎการแทนค่าที่ไม่ถูกต้อง ((The rule of false position)) หรือ กฎการแทนค่าที่ไม่ถูกต้องแบบทวีคูณ จึงมีข้อเสนอแนะบางประการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เกี่ยวกับการแก้สมการ ดังรายละเอียดต่อไปนี้ (Yerushalmy & Chazan, 2002 : 735)

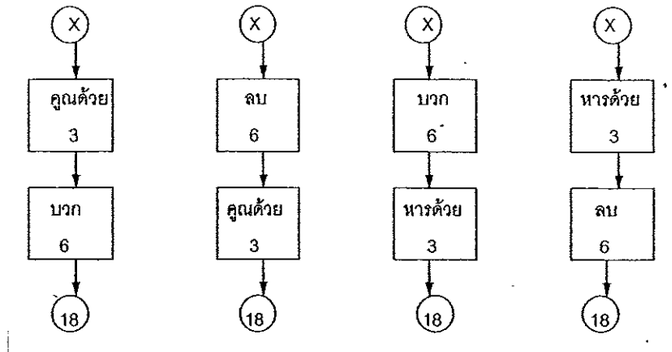
4.2.1 รูปแบบผังงาน นักเรียนหลายคนมีปัญหาการแก้สมการสมการในพีชคณิต เพราะไม่เข้าใจว่าสมการกล่าวถึงอะไร หรือไม่ทราบวิธีที่จะหาขั้นตอนที่จำเป็นในการแก้สมการ เทคนิคง่าย ๆ ที่มีประสิทธิภาพอีกเทคนิคหนึ่งก็คือ การใช้ผังงานให้เป็นประโยชน์ ลำดับแต่ละขั้นในผังงานนำมาใช้วิเคราะห์หาลำดับขั้นตอนที่ถูกต้องในการแก้สมการที่มีลักษณะเช่นเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัดกระดาษเป็นรูปวงกลม และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหลาย ๆ ชิ้น สำหรับข้อมูล / ผลลัพธ์ และเครื่องหมายคำนวณ ติดกระดาษเหล่านี้บนกระดานเพื่อสร้างผังงาน สำหรับทางเลือกเขียนบนแผ่นใส และจัดเรียงบนเครื่องฉายข้ามศีรษะ สิ่งที่เกิดขึ้นจะถูกนำไปใช้ในการอธิบายสิ่งที่เป็นคำถาม ซึ่งสามารถเปลี่ยนแปลงและขยายเพิ่มเติมได้สำหรับเครื่องหมายการคำนวณที่กำหนดให้ ซึ่งเครื่องหมายในการคำนวณเป็นสิ่งที่สำคัญในการสร้างผังงาน



มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

สร้างผังงานโดยใช้แผ่นเครื่องหมายคำนวณที่มีอยู่ ให้นักเรียนเขียนสมการให้สอดคล้อง



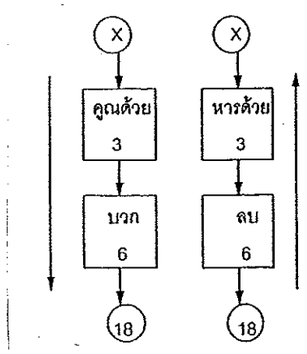
จะได้สมการที่ซับซ้อนที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้มี 12 สมการจากการคำนวณตามที่แสดง โดยใช้ × เป็นข้อมูล สมการคู่ใดบ้างที่มีคำตอบเดียวกัน ทำไม

ต่อไปเขียนสมการที่เป็นไปได้ออกมา ดังเช่นสมการเหล่านี้ ให้นักเรียนเลือกและจัดชิ้นส่วนออกมาเป็นผังงานให้ถูกต้อง

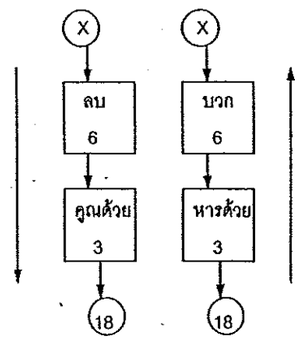
$3(x+6) = 18$ $\qquad$ $\frac{x-6}{3} = 18$

กิจกรรมนี้ให้รูปแบบที่เป็นกายภาพแก่นักเรียนซึ่งสัมพันธ์กับสมการที่เป็นนามธรรม การฝึกอย่างจริงจังจะทำให้นักเรียนสามารถเขียนความสัมพันธ์และเข้าใจสมการและโจทย์ปัญหา ซึ่งเป็นแนวคิดพื้นฐานที่จะนำไปสู่รูปจำลองที่เป็นรูปธรรมสำหรับการแก้สมการ

เริ่มต้นด้วยผังงานและสมการที่สอดคล้อง แล้วเริ่มด้วยผลลัพธ์ กลับลำดับขั้นตอนทำการคำนวณย้อนกลับในขณะทำตามลำดับขั้นตอนของผังงาน



$3x + 6 = 18$



$3(x-6) = 18$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ชิ้นส่วนผังงานอาจตัดจากแผ่นใสแล้วเรียงบนเครื่องฉายข้ามศีรษะ ในทำนองเดียวกันรูปแบบผังงานแบบสองขั้นตอนอาจตัดจากกระดาษอย่างหนาแล้วแสดงบนกระดานดำ ข้อมูล / ผลลัพธ์ และเครื่องหมายคำนวณอาจเขียนขึ้นและลบออกตามที่ต้องการในขณะที่ผังงานแสดงอยู่

สำหรับชั้นเรียนที่สูงขึ้น แก้โจทย์และเปรียบเทียบสมการแบบ 3 ชั้น ต้องใช้ชิ้นส่วนผังงานเพิ่มอีกสองแผ่น คือ คูณด้วย 4 และหารด้วย 4

$$\frac{3x+6}{4}=18 \qquad \frac{4x+6}{3}=18$$

$$\frac{4x}{3}+6=18 \qquad \frac{3x}{4}+6=18$$

4.2.2 กฎการแทนค่าที่ไม่ถูกต้อง (The rule of false position) ก่อนที่จะมีการรู้จักพีชคณิต ชาวอียิปต์โบราณได้แก้สมการโดยใช้กระบวนการ “เดา ทดสอบ ดัดแปลง” ซึ่งเรียกว่า กฎของการแทนค่าที่ไม่ถูกต้อง ดังตัวอย่าง

จงพิจารณาการแก้สมการต่อไปนี้

$$x+\frac{x}{7}=24$$

ขั้นแรก เลือกการเดาที่สะดวก เช่น 7

ต่อไป ใช้ 7 แทนที่ x ทางด้านซ้าย

$$7+\frac{7}{7}=8$$

การเดาของเราให้ค่า 8 แต่เราต้องการ 24 คือ 3 คูณ 8 ดังนั้นคำตอบต้องเป็น 3 เท่าของจำนวนที่เดา คือ 7 นั่นคือ 21 เป็นคำตอบ

จากโจทย์ 2 ข้อ ของ Rhind Papyrus ม้วนกระดาษของอียิปต์โบราณเมื่อย้อนหลังไปปี 1650 ก่อนคริสตศักราช จงใช้วิธีการแทนค่าที่ไม่ถูกต้องเพื่อแก้โจทย์แต่ละข้อ

จำนวนจำนวนหนึ่ง รวมกับ 1/7 ของจำนวนนั้นมีค่า 19 จำนวนนั้นคืออะไร

จำนวนจำนวนหนึ่ง รวมกับ 1/2 ของจำนวนนั้นมีค่า 16 จำนวนนั้นคืออะไร

4.2.3 กฎการแทนค่าที่ไม่ถูกต้องแบบทวีคูณ (The rule of double false position) เป็นวิธีการที่ซับซ้อนกว่ากฎการแทนค่าที่ไม่ถูกต้อง แต่สามารถใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพมาก เพื่อแนะนำหรือสร้างแรงจูงใจในบทเรียน เรื่อง การแก้สมการเชิงเส้นเป็น

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

คู่ ๆ เริ่มต้นด้วยการเดา 2 ครั้ง เป็น x_1 และ x_2 แล้วเอาค่าที่เดาไปแทนในสมการที่กำหนด และผลลัพธ์ที่ได้แทนด้วย r_1 และ r_2 คำตอบที่ถูกจะพบได้โดยการแทนค่าในสูตร

$$x = \frac{r_1x_2 - r_2x_1}{r_1 - r_2}$$

จงพิจาณาสมการ $3x - 12 = 0$ ด้วยการเดา $x_1 = 2$ และ $x_2 = 5$

สำหรับ $x_1 = 2 : r_1 = 3(2) - 12 = -6$

สำหรับ $x_2 = 5 : r_2 = 3(5) - 12 = 3$

โดยการแทนค่าในสูตร จะได้

$$x = \frac{(-6)(5) - (3)(2)}{-6 - 3}$$

$$= \frac{-36}{-9}$$

หลังจากใช้สูตรกับโจทย์หลาย ๆ ข้อ เพื่อให้แน่ใจว่าใช้ได้ ให้นักเรียนพิสูจน์สูตรนี้ซึ่งครูอาจนำโดยให้พิจารณาสมการเชิงเส้นที่มีรูปทั่วไปเป็น $ax + b = 0$

สำหรับ $x = x_1 : ax_1 + b = r_1$

สำหรับ $x = x_2 : ax^2 + b = r_2$

เป็นที่ทราบกันแล้วว่า คำตอบของสมการทั่วไป $ax + b = 0$ คือ $x = -b/a$ เพราะฉะนั้นสิ่งสำคัญในการพิสูจน์สูตรดังกล่าวนี้คือ การใช้สมการเชิงเส้นที่กำหนดและหา $-b/a$ ในรูปของ x_1, x_2, r_1 และ r_2

4.2.4 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การแก้สมการ ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เกี่ยวกับการแก้สมการถ้าจะให้มีประสิทธิภาพ นักเรียนจะต้องมีพื้นความรู้ที่ดีในเรื่องที่จะนำมาใช้ในการแก้สมการ การเรียนรู้เรื่องการแก้สมการนั้นนักเรียนต้องมีพื้นความรู้ ใน 4 ประเด็น ได้แก่ ตัวแปร การดำเนินการ ความหมายของสัญลักษณ์ “เท่ากับ (=)” และการเพิ่มขึ้น หรือลดลงของจำนวนที่อยู่ด้านซ้ายและด้านขวาของสัญลักษณ์ท่ากับ (สุวัฒนา เอี่ยมอรพรรณ, 2545 : 31) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ประเด็นที่ 1 ตัวแปร

การแก้สมการเป็นการหาค่าของตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปร ซึ่งมักจะใช้อักษร x แทนตัวไม่ทราบค่านั้น คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นสากล การสอนพีชคณิตจึงเป็นการสอนเนื้อหาที่เป็นสากล ดังนั้น จึงควรใช้ตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปรที่เป็นสากลนิยมนำมาใช้แทนตัวไม่ทราบค่าหรือตัวแปรนั้น นั่นคือ ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก เช่น x, y และ z เป็น

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

พยัญชนะ 3 ตัวท้ายของพยัญชนะในภาษาอังกฤษ สำหรับพยัญชนะ 3 ตัวต้น ใน ภาษาอังกฤษ คือ a ,b และ และ c นิยมใช้แทนค่าคงตัว การเขียนแทนตัวแปรด้วย x อาจมีหลายความหมาย ดังนี้

1. $+1x$ (บวก 1x)
2. $x/1$ (x หารด้วย 1)
3. x^1 (x ยกกำลัง 1)

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า จะไม่นิยมเขียน $+1x$, $x/1$ หรือ x^1 แต่จะเขียนด้วย x แต่จะเขียนแทนด้วย x เท่านั้น

ประเด็นที่ 2 : การดำเนินการ

การดำเนินการที่ใช้ในการแก้สมการ มีดังนี้

1. การคูณจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็ม เช่น

1.1 $(-1)\times(-1) = (+1)$

1.2 $(-1)\times(+1) = (-1)$

1.3 $(+1)\times(-1) = (-1)$

1.4 $(+1)\times(+1) = (+1)$

2. การบวก และการลบตัวแปร เช่น

2.1 $4x + x = 5x$

2.2 $4x - x = 3x$

2.3 $-4x + x = -3x$

2.4 $-4x - x = -5x$

3. การคูณจำนวนเต็มด้วยตัวแปร เช่น

3.1 $2\times x = 2x$

3.2 $(-2)\times x = -2x$

3.3 $2\times(-x) = -2x$

3.4 $(-2)\times(-x) = 2x$

4. การคูณตัวแปรด้วยจำนวนเต็ม เช่น

4.1 $x\times 2 = 2x$

4.2 $x\times(-2) = -2x$

4.3 $(-x)\times 2 = -2x$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

4.4 $(-x) \times (-2) = 2x$

นักเรียนต้องเข้าใจการดำเนินการในการบวก การลบ การคูณ การหาร และมีความแม่นยำจนอาจกล่าวได้ว่าต้องจำได้ขึ้นใจและคล่องเหมือนท่องสูตรคูณก็ว่าได้ จึงจะสามารถแก้สมการได้ถูกต้อง

ประเด็นที่ 3 : ความหมายของสัญลักษณ์เท่ากับ (=)

ความหมายของสัญลักษณ์เท่ากับนั้นเป็นเรื่องง่าย ๆ แต่ถ้าไม่ได้เน้นย้ำให้เกิดความเข้าใจแล้ว มักจะเกิดปัญหากับนักเรียนในการแก้สมการเป็นอย่างมาก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 นักเรียนทราบหรือไม่ว่า ถ้า $x = 5$ จะมีความหมายเดียวกันกับ $5 = x$ สำหรับตัวอย่างที่ 1 นี้ คงจะไม่มีปัญหามากนัก เพราะเป็นตัวอย่างที่ทำความเข้าใจได้ง่าย

ตัวอย่างที่ 2 นักเรียนทราบหรือไม่ว่า ถ้า $5 = x$ จะมีความหมายเดียวกันกับ $x = 5$ สำหรับตัวอย่างที่ 1 และ 2 ถ้าครูไม่เน้นย้ำแล้ว นักเรียนอาจจะไม่เข้าใจตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 นักเรียนทราบหรือไม่ว่า ถ้า $x = -5$ จะมีความหมายเดียวกันกับ $-5 = x$

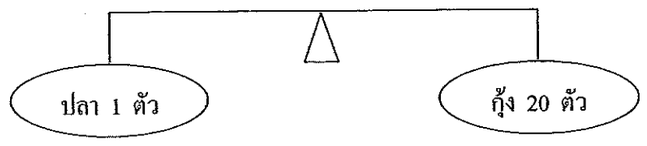
ตัวอย่างที่ 4 นักเรียนทราบหรือไม่ว่า ถ้า $-4 = x$ จะมีความหมายเดียวกันกับ $x = -4$

ตัวอย่างที่ 5 นักเรียนทราบหรือไม่ว่า ถ้า $5 = x + 1$ จะมีความหมายเดียวกันกับ $x + 1 = 5$

ตัวอย่างที่ 6 นักเรียนทราบหรือไม่ว่า ถ้า $4 = -x - 1$ จะมีความหมายเดียวกันกับ $-x - 1 = 4$

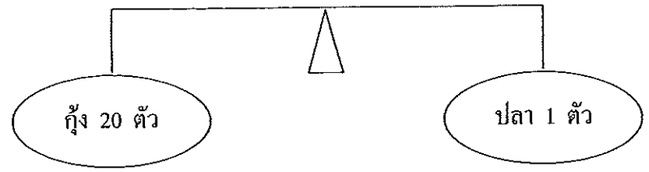
ตัวอย่างทั้ง 6 ข้อนี้ อาจแสดงให้นักเรียนเข้าใจได้ โดยการยกตัวอย่างในชีวิตประจำวันประกอบ เช่น แม่ค้าขายผลไม้มีผลไม้อยู่ 2 กระจาด กระจาดหนึ่งเป็นทุเรียน 10 ผล อีกกระจาดหนึ่งเป็นมังคุด 50 ผล ซึ่งผลไม้ทั้งสองชนิดมีน้ำหนักเท่ากันพอดี ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าน้ำหนักของทุเรียน 10 ผล เท่ากับน้ำหนักของมังคุด 50 ผล หรือน้ำหนักของมังคุด 50 ผล เท่ากับน้ำหนักของทุเรียน 10 ผล

อีกตัวอย่างหนึ่ง คือ มีตาชั่งแบบสองทาง ดังภาพ



มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

จากภาพสามารถบอกน้ำหนักได้ว่า น้ำหนักของปลา 1 ตัว เท่ากับน้ำหนักของกุ้ง 20 ตัว เมื่อสลับข้างอาจเห็นว่าน้ำหนักของกุ้ง 20 ตัว เท่ากับน้ำหนักของปลา 1 ตัว



ประเด็นที่ 4 : การเพิ่มหรือลดลงของจำนวนที่อยู่ด้านซ้าย และด้านขวาของสัญลักษณ์เท่ากับ

เมื่อนักเรียนเข้าใจตัวแปร การดำเนินการและความหมายของสัญลักษณ์เท่ากับ โดยรู้ซึ้งถึงความเท่ากันของจำนวนที่อยู่ทางด้านซ้ายและจำนวนที่อยู่ทางด้านขวาแล้ว ประเด็นที่ 4 นักเรียนต้องเข้าใจว่า จำนวนที่อยู่ด้านซ้ายและด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับนั้น มีความเท่ากัน ดังนั้นถ้าต้องการจะให้จำนวนใดจำนวนหนึ่งหายไปจะลบออกเฉย ๆ ไม่ได้ ถ้าต้องการลดลงต้องลดทั้งสองข้างด้วยจำนวนที่เท่า ๆ กัน หรือถ้าต้องการเพิ่มก็ต้องเพิ่มเข้าทั้งสองข้างด้วยจำนวนที่เท่า ๆ กัน

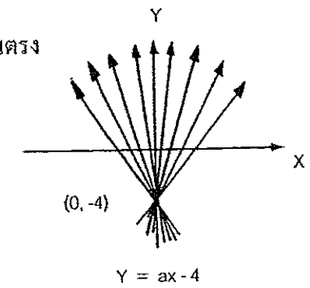
4.3 การใช้กราฟช่วยในการสร้างความเข้าใจในการเรียนพีชคณิต

René Descartes นักคณิตศาสตร์ที่สร้างคุณประโยชน์อย่างมหาศาลให้กับวงการคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในเรื่องการวางรากฐานของเรขาคณิตวิเคราะห์ โดยเขาได้นำพีชคณิตและเรขาคณิตเข้ามาใช้ร่วมกัน นิพจน์ทางพีชคณิตที่เป็นนามธรรมได้ถูกแปลงออกมาเป็นภาพเรขาคณิตที่มองเห็นได้คู่กัน เช่น สมการ $y = 3x - 4$ ปรากฏเป็นเส้นตรงในระนาบแกนมุมฉาก มีนักเรียนบางคนเท่านั้นที่สามารถเขียนกราฟของสมการนี้ได้ บางส่วนก็ไม่สามารถจะมองเห็นเป็นรูปสมการเชิงเส้นทั่วไปในรูป $ax + by + c = 0$ ได้อย่างชัดเจน นักเรียนสามารถทำความเข้าใจหัวข้อนี้ได้มากยิ่งขึ้นโดยมีสิ่งที่เป็นกิจกรรมเสริม ดังนี้ (Leinhardt and the others. 1990 : 19)

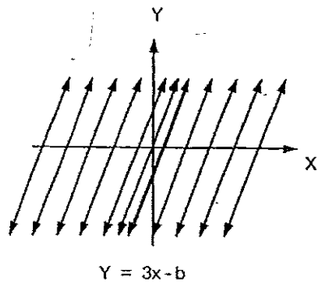
4.3.1 การเขียนกราฟในชุดของเส้นตรง (Families of lines) การศึกษาชุดของเส้นตรงช่วยเน้นสองความคิดที่ว่า บางคนมองว่าเส้นตรงเป็นเส้นซึ่งมีลักษณะปรากฏอยู่ - อย่างไรก็ยังคงเป็นอยู่อย่างนั้นไม่เปลี่ยนแปลง แต่บางคนมองว่าเส้นตรงเป็นเส้นเดียวเหมือนกับการวางดินสอแท่งหนึ่งบนกระดาษซึ่งสามารถเคลื่อนไปมาได้ตามตำแหน่งที่กำหนดในสมการเชิงเส้น $ax + by + c = 0$ ซึ่งแสดงถึงวิธีที่เส้นตรงเส้นหนึ่งเคลื่อนที่ไปรอบ ๆ ระนาบโดยการหมุนและการแปลง

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ให้นักเรียนเขียนกราฟ $y = 3x - 4$ แล้ววางดินสอบนเส้นตรง
ให้ค่า $y-$intercept คงที่ เคลื่อนดินสอ
ให้ผ่านชุดของเส้นตรงซึ่งประกอบด้วย
จุด $(0, -4)$ นักเรียนจะสามารถมองเห็น
สิ่งนี้ว่าเป็นการหมุนเส้นตรงแรกเริ่ม
ผ่านจุดคงที่



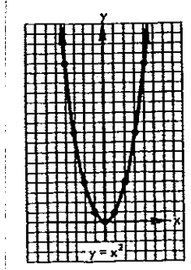
ให้ค่าความชันคงที่ เคลื่อนดินสอ
ในแนวขนานให้ผ่านชุดของ
เส้นตรงที่มีความชันเป็น 3
นักเรียนสามารถมองเห็นสิ่งนี้ว่า
เป็นการเปลี่ยนแปลงเส้นตรง
เริ่มแรก



เมื่อมีการหมุนรอบ $y-$intercept แล้ว กลุ่มของเส้นตรงก็สามารถเคลื่อนไปตำแหน่งต่าง ๆ ได้ ซึ่งก็คือ วิธีหนึ่งของการหาคำตอบของสมการเชิงเส้น โดยเส้นตรงใด ๆ จะสามารถเคลื่อนที่ไปตัดกับเส้นตรงที่ไม่ขนานกันอื่น ๆ ได้ในการหมุนบนระนาบเดียวกัน เนื่องจากเส้นตรงสองเส้นไม่ขนานกัน จึงต้องมีจุดตัดก็คือจุดหมุน ซึ่งจุดนั้นคือคำตอบของสมการ

4.3.2 การแทนสมการด้วยกราฟพาราโบลา (Parabolas) มีวิธีการมากมายที่จะเขียนกราฟพาราโบลา $y = x^2$ กิจกรรมนี้จะเชื่อมโยงกราฟไปสู่สมบัติของจำนวนที่สัมพันธ์กับกำลังสองได้อย่างน่าสนใจ

เริ่มต้นที่จุดกำเนิด เลื่อนแต่ละครั้งไปทางขวา
เลื่อนขึ้นข้างบน 1 แล้วขึ้นไป 3 เลื่อนขึ้นไป 5 และขึ้นไป 7
ทำไปเรื่อย ๆ ทำเครื่องหมายแต่ละจุด ทำกระบวนการนี้ซ้ำ
โดยเลื่อนไปทางซ้ายครั้งละหนึ่งหน่วย
เขียนเส้นโค้งเรียบ ผ่านจุดสำหรับกราฟ $y = x^2$
วิธีนี้ใช้ประโยชน์จากความสัมพันธ์ระหว่างกำลังสองของจำนวน
เรียงตามลำดับกับผลบวกของจำนวนคี่ตามลำดับ คือ



$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

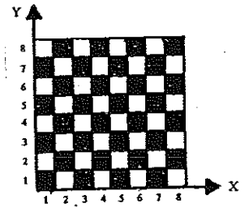
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^5$$

การเปลี่ยนแปลงง่าย ๆ ในกระบวนการนี้จะให้ชุดของพาราโบลาทั้งหมดผ่านจุดกำเนิด

4.3.3 การแนะนำหรือทบทวนเรขาคณิตวิเคราะห์โดยตาหมากรุกและกระดานหมากรุก (Checkers and Chess) การใช้ประโยชน์ตาหมากรุกและกระดานหมากรุกที่แปลกใหม่อย่างหลากหลายสามารถดึงดูดความสนใจในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ การแนะนำหรือทบทวนเรขาคณิตวิเคราะห์ อาจเปลี่ยนแบบใหม่ เมื่อนำเสนอผ่านเกมของหมากรุก

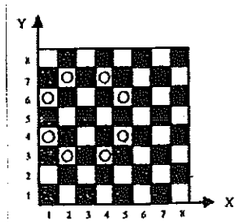
ตัวอย่างเช่น

จะทำลำดับการกระโดดต่อสู้ฝ่ายดำในตำแหน่งนี้บนกระดานหมากรุกได้อย่างไร เคลื่อนจาก (2,4) ไป (4,6) ไป (2,8)เพื่อขับคนที่ 3 (3,5) และ (3,7)



ควรจะเคลื่อนอะไรถ้าฝ่ายดำเคลื่อนต่อไป

ในหมากรุก squares ถูกป้องกันโดยชิ้นส่วนต่าง ๆ ซึ่งเขียนได้ในรูปค่าพิกัด squares อะไรบ้างที่ถูกป้องกันโดยอัศวินที่ (3,5) อัศวินป้องกัน squares (1,4) , (1,6) , (2,3) , (2,7) , (4,3) , (4,7) , (5,4) และ (5,6)

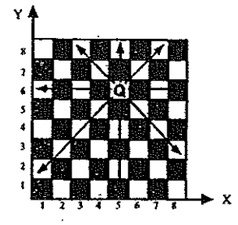


ตำแหน่งอะไรที่ไม่ถูกขวางกั้นที่พระ (bishop) ที่ (7,4) จะป้องกันได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ความคิดรวบยอดของสมการว่าเป็นเซตของคู่จำนวนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสามารถเสริมได้ด้วยแสดงการครอบคลุมชิ้นส่วนหมากรุกต่าง ๆ ราชินี (queen) ที่ (5,6) ป้องกันตำแหน่งที่ไม่ถูกขวางกั้นบนเส้นตรงสี่เส้นเหล่านี้

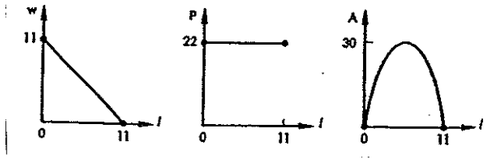
$x = 5$ $y = 6$ $y = x + 1$ $y = 11 - x$



เส้นอะไรที่เรือ (rook) ที่ (2,4) จะป้องกัน

4.3.4 การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร นักเรียนมักจะขาดตัวอย่างรูปธรรมที่สามารถนำไปเชื่อมโยงกับเส้นโค้งพีชคณิตที่รู้จัก และอาจมองไม่เห็นเส้นโค้งเหล่านี้ว่าเป็นตัวแทนทางเรขาคณิตของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร

ผูกปลายทั้งสองของเชือกเส้นหนึ่งเข้าด้วยกันเพื่อให้เกิดวงยาว 22 นิ้ว จงแสดงวิธีที่จะสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากเส้นเชือกโดยมีความยาวตั้งแต่ 0 ถึง 11 นิ้ว และอภิปรายว่าความกว้าง เส้นรอบรูป และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเปลี่ยนแปลงตามความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและความกว้าง เส้นรอบรูป และพื้นที่



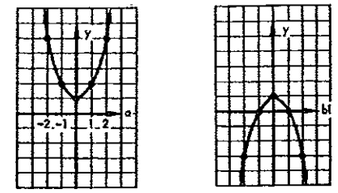
4.3.5 การแสดงรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน รากของสมการกำลังสองอยู่ที่ไหนเมื่อ discriminant มีค่าเป็นลบ รากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูป $x = a + bi$ มี a เป็นส่วนจริง และ b เป็นส่วนจินตภาพ ตัวอย่างที่แสดงต่อไปนี้แสดงถึงส่วนประกอบทั้งสอง

ทำตาราง 2 แผ่น จากกระดาษกราฟที่แยกจากกัน บนตารางหนึ่งเขียนกราฟในระนาบจริง เมื่อ $b = 0$ บนตารางอีกอันหนึ่งเขียนกราฟในระนาบจินตภาพ เมื่อ $a = 0$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

$Y = X^2 + 1$

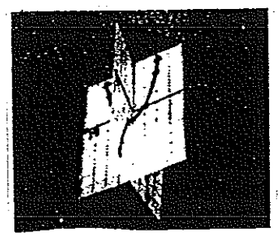
	X	Y
บน ระนาบจริง (b = 0)	± 2	5
	$\pm \sqrt{3}$	4
	$\pm \sqrt{2}$	3
	± 1	2
	0	1
บน ระนาบ จินตภาพ (a = 0)	$\pm 1i$	0
	$\pm \sqrt{2}i$	-1
	$\pm \sqrt{3}i$	-2
	$\pm 2i$	-3
	$\pm \sqrt{5}i$	-4
	$\pm \sqrt{6}i$	-5



ระนาบจริง
(b = 0)

ระนาบจินตภาพ
(a = 0)

ตัดตาราง 2 อันออกไปตามแกน y ซีกที่อยู่ตรงข้ามกัน สอดตารางทั้งสองเข้าด้วยกันให้ทำเป็นมุมฉาก จะทำให้ได้รูปจำลองที่มีประสิทธิภาพแสดงรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน



รูปจำลองรูปนี้สร้างขึ้นบนกระดาษขนาดครึ่งนิ้ว ซึ่งนักเรียนสามารถทำเองได้ ถ้าท่านเขียนตารางลงบนแผ่นใส จะได้รูปจำลองที่มองเห็นเป็นพิเศษและน่าประทับใจ

สำหรับนักเรียนพีชคณิตระดับสูง จงพิจารณา

$$x^2 + y^2 = 25$$

เส้นโค้งจะมีลักษณะเป็นอย่างไร เมื่อ y มีค่ามากกว่า 5 และน้อยกว่า -5 จุดอยู่ที่นั่นแต่อยู่ระนาบจินตภาพ

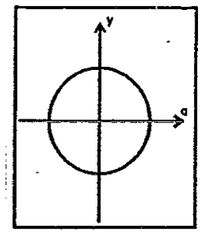
ถ้า $x = a + bi$ แล้ว $(a + bi)^2 + y^2 = 25$

$$y^2 = 25 - (a + bi)^2$$

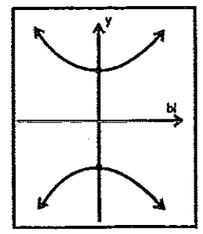
$$y^2 = 25 - a^2 - 2abi$$

เนื่องจาก y เป็นส่วนจริง $2ab = 0$ ดังนั้น $b = 0$ หรือ $a = 1$ เราจะใช้ไฮเพอร์โบลาในระนาบเชิงซ้อน

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY



ระนาบจริง



ระนาบจินตภาพ

วาดรูปภาพ 2 รูปแล้วประกอบเข้าด้วยกันดังข้างต้นเพื่อสร้างรูปแบบจำลองที่สะดุดตาของจุดเชิงซ้อนทั้งหมด ส่วนจริงและส่วนจินตภาพ สำหรับสมการ $x^2 + y^2 = 25$

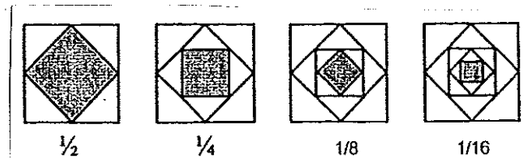
4.4 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องลำดับและอนุกรม

ในการเรียนพีชคณิตจะเน้นการคำนวณหาคำตอบมากเกินไป ทำให้นักเรียนมักจะขาดโอกาสในการค้นพบ แต่ความงามของคณิตศาสตร์ที่มีอยู่มากมายจะรวมอยู่ที่พลังของการทำให้เป็นกรณีทั่วไป เนื่องจากการทำให้เป็นกรณีทั่วไปเป็นทักษะการแก้ปัญหาที่สำคัญทักษะหนึ่ง จึงสมควรที่จะได้รับความสนใจตลอดเวลาในการศึกษาคณิตศาสตร์ แต่บางทีทักษะนี้จะสร้างได้ดีที่สุดในรายวิชาพีชคณิต ดังรายละเอียดกิจกรรมตามหัวข้อต่อไปนี้ (Gamoran & Hannigan. 2000 : 246)

4.4.1 การพับกระดาษให้เป็นลำดับ เป็นกิจกรรมการพับกระดาษง่าย ๆ ที่สามารถสร้างความสนใจให้เกิดขึ้น และนำไปสู่การอภิปรายเรื่องลำดับอนันต์และลำดับอนุกรม

เริ่มจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วยตัดมาจากกระดาษ 1 แผ่น

พับมุมทั้งสี่เข้าหาจุดศูนย์กลาง	พื้นที่คือ ½
พับมุมทั้งสี่เข้าไปอีก	พื้นที่คือ ¼
ทำกระบวนการนี้ซ้ำอีก	พื้นที่คือ 1/8
ทำซ้ำอีก	พื้นที่คือ 1/16



ใช้กิจกรรมนี้แนะนำอนุกรมเรขาคณิต

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ถามถึงพจน์ที่ 10 $\frac{1}{1024}$

ถามถึงผลบวกของ 10 พจน์แรก $\frac{1023}{1024}$

ต่อไปทำให้อยู่ในรูปทั่วไป

ถามถึงพจน์ที่ n $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ถามถึงผลบวกของ n พจน์แรก $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

พิจารณาลำดับอนันต์

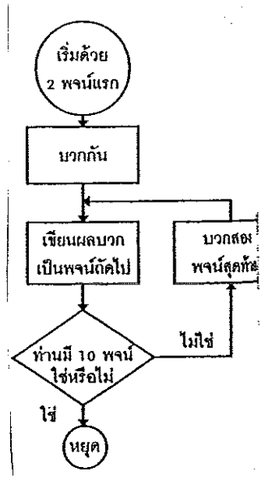
ถามถึงพจน์สุดท้าย ไม่มี

ถามถึงผลบวกของพจน์ทั้งหมด 1

4.4.2 ลำดับ (Fibonacci) ในลำดับ Fibonacci แต่ละพจน์หลังพจน์ที่สองไปคือผลบวกของสองพจน์ที่อยู่หน้า

1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 , ...

ผังงานจะให้รูปแบบที่เคลื่อนไหวและมองเห็นได้เมื่อนำเสนอกฎที่สร้างลำดับแบบนี้ขึ้นมา ตัดชิ้นส่วนออกแล้วติดไว้บนกระดานดำหรือป้ายประกาศ หรือใช้แผ่นใสเพื่อแสดงบนเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ ลำดับ Fibonacci อาจสร้างขึ้นโดยเริ่มต้นด้วยจำนวน 2 จำนวน ๆ เป็น 2 จำนวนแรกกับที่เขียนไว้ในข้อมูลป้อนเข้า ต่อจากนั้นพจน์ที่ตามมาจะเกิดขึ้นด้วยวิธีเดียวกันดังที่บอกไว้ในข้อความ การคำนวณในผังงานนี้ ช่องตัดสินใจใช้เพื่อควบคุมจำนวนพจน์ที่จะสร้างขึ้นซึ่งปรากฏเห็นได้ชัดว่า แต่ละอันดับมีพจน์ต่อไปได้เรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด



คุณค่าข้อหนึ่งของช่องตัดสินใจสำหรับครู คือ มันสามารถเปลี่ยนไปตามธรรมชาติของปัญหาและส่งเสริมประสบการณ์แก้ปัญหา

เริ่มด้วยพจน์ 1 และ 1

ด้วยช่องตัดสินใจดังแสดงข้างต้น พจน์สุดท้ายที่สร้างขึ้นจะเป็น 55

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ถ้าใช้ช่องตัดสินใจต่อไปนี้แทน พจน์สุดท้ายจะเป็นอะไร

พจน์สุดท้ายคือ 144

พจน์สุดท้ายคือ 377

ไม่มีพจน์สุดท้าย

พจน์ 10 พจน์แรกจะมีค่าเท่าใด ถ้าพจน์เริ่มต้นมีค่าดังนี้

1,3,4,7,11,18,29,47,76,123

2,5,7,12,19,31,50,81,131,212

ผลบวกของพจน์ 10 พจน์แรกในลำดับ Fibonacci ใด ๆ สามารถนำไปใช้อธิบายสมบัติที่น่าสนใจ เริ่มด้วยการสนับสนุนให้นักเรียนพยายามค้นพบความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ที่ 7 กับผลบวกของ 10 พจน์แรก ให้นักเรียนทดสอบการเดาของตนเองด้วยลำดับ Fibonacci เพิ่มเติม แล้วให้พยายามพิสูจน์โดยวิธีพีชคณิตว่าสมบัตินั้นเป็นจริง พยายามทำกระบวนการนี้ด้วยตนเอง

ในตัวอย่างต่อไปเป็นกิจกรรมที่สามารถใช้ในการสาธิตในชั้นเรียนที่น่าสนใจและเป็นบทเรียนที่มีคุณค่าในการค้นพบและตั้งกรณีสรุปทั่วไปขึ้นมา ซึ่งเป็นเครื่องมือของพีชคณิตในการพิสูจน์

ให้นักเรียนเขียนจำนวน 2 จำนวนใด ๆ บนกระดาน สมมติว่าเป็น 4 กับ 9 ให้นักเรียนในชั้นบอก 10 พจน์แรกของลำดับ Fibonacci ที่เริ่มต้นด้วย 2 จำนวนนี้ เมื่อบอกได้ถึงพจน์ที่ 7 คือ 92 ครูก็คูณใจด้วย 11 แล้วเขียน 1012 บนด้านหนึ่งของกระดาน นักเรียนบอกต่อไปจนถึงพจน์ที่ 10 แล้วครูให้นักเรียนหาผลบวก นักเรียนจะพบว่า จำนวนที่ครูเขียนไว้บนกระดานแล้วก่อนหน้าที่จะเขียนลำดับทั้งหมด

พจน์แรก	4
พจน์ที่สอง	9
พจน์ที่สาม	13
พจน์ที่สี่	22
พจน์ที่ห้า	35

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

พจน์ที่หก	57	
พจน์ที่เจ็ด	92	$92 \times 11 = 1012$
พจน์ที่แปด	149	
พจน์ที่เก้า	241	
พจน์ที่สิบ	390	
	1012	ผลบวก 10 พจน์แรก

สังเกตว่าผลบวก 10 พจน์แรก คือ 1012 เหมือนกับ 11 คูณพจน์ที่เจ็ด

สุดท้ายให้นักเรียนพยายามค้นพบวิธีการของครู โดยครูอาจให้คำแนะนำว่าผลบวกเป็นฟังก์ชันของพจน์ที่เจ็ด หรืออาจแนะนำว่าให้แทน 10 พจน์แรกของลำดับ Fibonacci ในรูปทั่วไป แต่ควรให้คำชี้แนะตามความจำเป็นเท่านั้น

พจน์แรก	a	
พจน์ที่สอง	b	
พจน์ที่สาม	a + b	
พจน์ที่สี่	a + 2b	
พจน์ที่ห้า	2a + 3b	
พจน์ที่หก	3a + 5b	
พจน์ที่เจ็ด	5a + 8b	
พจน์ที่แปด	8a + 13b	
พจน์ที่เก้า	13a + 21b	
พจน์ที่สิบ	21a + 34b	
	55a + 88b	ผลบวก 10 พจน์แรก

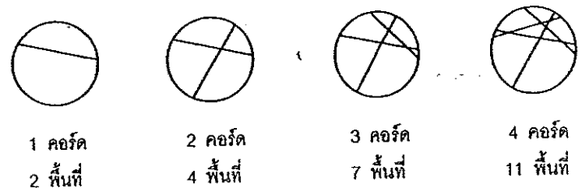
สังเกตว่าผลบวกของ 10 พจน์แรก คือ 55a + 88b โดยการแยกตัวประกอบ จะมีค่าเท่ากับ 11(5a + 8b) ซึ่งพิสูจน์ได้ว่าเป็น 11 เท่าของพจน์ที่เจ็ด

4.4.3 การหาผลสรุปผลต่างจำกัด (Finite Difference) กิจกรรมในชั้นเรียนที่ดีที่สุดบางกิจกรรมคือกิจกรรมที่เริ่มด้วยสิ่งที่เป็นรูปธรรมหรือเป็นเรขาคณิตแล้วนำไปสู่แบบของจำนวน การเดา และการสรุปเป็นกรณีทั่วไปที่สร้างขึ้นโดยวิธีทางพีชคณิต ซึ่งกิจกรรมต่อไปนี้เป็นสิ่งที่เป็นแนวทางให้เกิดคณิตศาสตร์แนวใหม่ที่มีสำคัญ และมีความหมายเนื่องจากเป็นกิจกรรมที่แสดงให้เห็นจุดประสงค์ซึ่งเสนอไว้ท้ายการอภิปรายเรื่องการหา

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ผลสรุปผลต่างจำกัด และกระบวนการสำหรับการหาพหุนามดีกรี n จากข้อมูลจำนวน n + 1 หรือมากกว่า

จำนวนที่มากที่สุดของพื้นที่ที่เกิดจากคอร์ด × คอร์ดตัดกันในวงกลมมีค่าเท่ากัน เริ่มต้นด้วยการทดลองกรณีง่าย ๆ บางกรณี



การตรวจอย่างใกล้ชิดแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกับพื้นที่

2,4,7,11,16,...

และผลบวกตามลำดับของจำนวนนับ

1,3,6,10,15,...

จะสรุปกรณีทั่วไปตามมาอย่างรวดเร็ว

พิจารณาอีกวิธีหนึ่ง รวบรวมข้อมูลเหล่านี้ลงในตารางแล้วหาผลต่างครั้งแรกกับครั้งที่สอง

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

จำนวนคอร์ด , x	จำนวนพื้นที่ , y	ผลต่างครั้งแรก	ผลต่างครั้งที่สอง
1	2		
		2	
2	4		1
		3	
3	7		1
		4	
4	11		

ด้วยเหตุที่ผลต่างที่สองเป็นค่าคงที่ จึงสมมติว่าสูตรที่เกี่ยวข้องกับจำนวนของพื้นที่ (y) เป็นฟังก์ชันของจำนวนคอร์ด (x) ถูกกำหนดโดยฟังก์ชันดีกรีสอง $Y = ax^2 + bx + c$ ในการ

แก้สมการหาค่าคงที่ a , b และ c ใช้การแทนค่าค่าที่กำหนดในตารางและแก้สมการ 3 สมการ จะได้

สำหรับ $x = 1 : ax^2 + bx + c = a + b + c = 2$

สำหรับ $x = 2 : ax^2 + bx + c = 4a + 2b + c = 4$

สำหรับ $x = 3 : ax^2 + bx + c = 9a + 3b + c = 7$

โดยการลบสมการแรกออกจากสมการที่สอง และสมการที่สองจากสมการที่สามจะได้

$3a + b = 2$ และ $5a + b = 3$

นำทั้งสองสมการที่ได้มาลบกับ จะได้

$2a = 1$ หรือ $a = \frac{1}{2}$ โดยการแทนค่า จะได้ $b = \frac{1}{2}$ และ $c = 1$

จำนวนพื้นที่ (y) ถูกำหนดให้ในรูปของจำนวนของคอร์ด (x) ด้วยสมการ

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

ตรวจคำตอบสำหรับ $x = 4$ แล้วแทนค่า $x = 5$ และ $x = 6$

ตัวอย่างอีกข้อหนึ่งที่จะนำวิธีการของผลต่างจำกัดไปใช้มีดังนี้

จำนวนที่มากที่สุดของชิ้นส่วนที่ได้จากการตัดเค้กอย่างต่อเนื่อง โดยเริ่มจากตัด 1 ครั้ง คือ

2,4,8,15,26,42,64,...

พจน์ทั่วไปสำหรับการตัด x ครั้งทีค่าเท่าใด

ผลต่างครั้งที่สามในลำดับนี้มีค่าคงที่ นั่นคือ ค่ากำลังสาม

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ จึงจำเป็นมากในการหาจำนวนที่มากที่สุดของชิ้นเค้ก (y) สัมพันธ์กับจำนวนการตัด (x) การแก้สมการ 4 สมการพร้อมกัน สำหรับ f(1) , f(2) , f(3) และ f(4) จะได้การสรุปเป็นกรณีทั่วไปคือ

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1$$

4.5 รูปจำลองทางพีชคณิตที่สามารถนำมาทดลองได้

สาระสำคัญและความงามของพีชคณิตอยู่ที่โครงสร้างและความเป็นสัญลักษณ์ของพีชคณิต แต่นักเรียนจำนวนมากก็ยังไม่เข้าใจโดยสมบูรณ์ในความคิดรวบยอดที่เป็นนามธรรมและทักษะขั้นตอนวิธีการของพีชคณิต เพราะไม่สามารถจะมองเห็นพีชคณิตในความหมายที่เป็นจริงทางกายภาพ ลักษณะของพีชคณิตสามารถแสดงให้ดูได้ด้วยสื่อการสอนที่เป็นรูปจำลองแบบเรขาคณิตที่มองเห็นได้ และเป็นรูปธรรม จึงเหมาะสำหรับการสร้าง

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

แนวความคิดพีชคณิตที่เป็นนามธรรม เพราะการทดลองเป็นสิ่งที่สัมผัสได้ เคลื่อนไหวได้ และสามารถจัดเรียงเพื่อให้เป็นทรรศนะใหม่ ๆ และวิธีการเหมือนมีชีวิตจริง ดังตัวอย่างการทดลองต่อไปนี้ (Bruner. 1966 : 56)

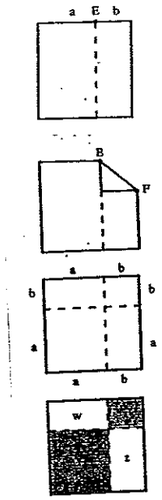
การทดลองที่ 1 การพับกระดาษสำหรับ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

อุปกรณ์

กระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 1 แผ่น ต่อนักเรียน 1 คน

คำชี้แจง

1. พับของด้านหนึ่งที่จุด E เพื่อให้เกิดรอยพับแนวตั้ง ขนานกับขอบกำหนดความยาวที่ยาวกว่าและสั้นกว่า เป็น a และ b
2. พับมุมบนขวามือที่รอยพับเพื่อกำหนดจุด F การพับวิธีนี้ทำให้จุด F ทีระยะห่างจากมุมเท่ากับจุด E
3. ต่อไปพับให้เกิดรอยพับผ่านจุด F ในแนวนอน แล้วเขียนความยาวทั้งหมดจากด้านนอก
4. หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2 รูปที่เกิดขึ้น หาพื้นที่ที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเกิดขึ้น และจงแสดงว่าพื้นที่ทั้งสี่รูปรวมกันต้องเท่ากัน $(a+b)^2$



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส y : a^2

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส x : b^2

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส w : ab

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส z : ab

กระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเดิมวัดความยาวไว้ด้านละ $a+b$ เพราะฉะนั้นพื้นที่จะมีค่าเท่ากับ $(a+b)^2$ ส่วนเล็ก ๆ ทั้งสี่รวมกันจะได้พื้นที่เป็น $a^2 + 2ab + b^2$ แต่พื้นที่ที่รวมกันต้องเท่ากับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเดิม เพราะฉะนั้น

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

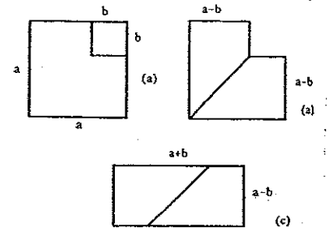
การทดลองที่ 2 การตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

อุปกรณ์

กระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และกรรไกร

คำชี้แจง

1. ตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็ก ๆ ให้มีความยาว b จากสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่ที่มีความยาว a
2. ตัดครึ่งส่วนที่เหลือ ดังภาพ
3. จัดชิ้นส่วนทั้งสองมาเรียงใหม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จะได้สมบัติทางพีชคณิตอะไร



การวิเคราะห์

การตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็ก ๆ จากรูปใหญ่จะเหลือพื้นที่ $a^2 - b^2$ การตัดชิ้นส่วนนี้ออกเป็นสองส่วนแล้วจัดเรียงใหม่จะได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่ $(a+b)(a-b)$ เพราะชิ้นส่วนนี้เพียงแต่จัดเรียงใหม่ แต่พื้นที่ยังคงมีค่าเท่าเดิม ดังนั้น

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

4.6 การจัดสื่ออุปกรณ์และกิจกรรมเสริม

เป็นที่ทราบกันแล้วว่า แรงจูงใจเป็นหัวใจสำคัญของการเรียนรู้ ครูที่กระตือรือร้นสามารถทำสิ่งต่าง ๆ ได้มาก เพื่อกระตุ้นรักษาไว้ และเพิ่มพูนความสนใจในวิชาโดยเปลี่ยนแปลงสิ่งต่าง ๆ ที่ทำในชั้นเรียน ซึ่งต่อไปนี้จะนำเสนอแนวคิดที่ช่วยเสริมแรงจูงใจในการเรียนพีชคณิตมากขึ้น ดังนี้ (Balacheff. 1990 :291)

4.6.1 มนต์คณิต (Mathemagic) กลเม็ดเล็ก ๆ สามารถดึงดูดความสนใจจริง ๆ บางอย่างได้ โดยต้องให้นักเรียนทุกคนมีส่วนร่วม มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอน	ตัวอย่าง
1. เริ่มด้วยการเขียนจำนวนเลข 3 หลักที่มีเลขโดดแตกต่างกัน	257
2. สร้างจำนวนเลข 2 หลัก ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากจำนวนนี้	25
	27
	52

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

3. หาผลบวกของจำนวนเลข 2 หลักเหล่านี้ 57

72

75

308

4. หารผลลัพธ์ที่ได้ด้วยผลบวกของเลขโดด 3 ตัวเดิม $2+5+7=14$

คำตอบจะเป็น 22 เสมอ

$$14\overline{)308}\quad 22$$

$$\underline{28}$$

$$28$$

$$\underline{28}$$

ต่อไปนี้เป็นสาเหตุที่ได้มาซึ่งคำตอบ (22)

ให้จำนวนนั้นคือ abc ซึ่งมีค่าเท่ากับ $100a+10b+c$

มีจำนวนเลข 2 หลักที่เป็นไปได้ทั้งหมด 6 จำนวน คือ $10a+b$, $10a+c$, $10b+a$, $10b+c$, $10c+a$ และ $10c+b$

นำ 6 จำนวนข้างต้นมาบวกกัน จะได้

$$20(a+b+c)+2(a+b+c) = 22(a+b+c)$$

นั่นคือผลบวกของทั้ง 6 จำนวนสามารถทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย ได้เป็น 22 คูณกับ $a+b+c$

เพราะฉะนั้นการหารด้วย ผลบวกของเลขโดดจะได้ 22

นั่นคือ $$\frac{22(a+b+c)}{a+b+c} = 22$$

กลเม็ดนี้สามารถนำไปอภิปรายเมื่อทำการสอนเรื่องการแยกตัวประกอบหรือการบวกพหุนามได้

4.6.2 รูปจำลองเส้นจำนวน นักเรียนจะมีปัญหาเล็กน้อยในการยอมรับว่าจำนวนเต็มบวกกับศูนย์เป็นเซตอนันต์ที่มีต่อไปเรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด ทำนองเดียวกันกับเส้นจำนวนก็ขยายต่อไปอย่างไม่มีขอบเขต แต่มันยากยิ่งกว่าที่จะยอมรับข้อเท็จจริงว่ามีจำนวนจริงมากมายอยู่ภายใต้ช่วงจำกัด เช่น จาก 0 ถึง 1 แต่ทุกครั้งที่นักเรียนลากเส้นกราฟอย่างต่อเนื่องผ่านจุด

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ที่เลือกไว้ ซึ่งต่อไปนี้เป็นการใช้สมบัติความบริบูรณ์ของจำนวนจริงและความคิดรวบยอดของความต่อเนื่องของจุดบนเส้นจำนวน

ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนรหัสชื่อย่อของตัวเอง โดนแทนตัวอักษรแต่ละตัวด้วยเลขโดดที่เหมาะสม

A	0	J	9	S	18
B	1	K	10	T	19
C	2	L	11	U	20
D	3	M	12	V	21
E	4	N	13	W	22
F	5	O	14	X	23
G	6	P	15	Y	24
H	7	Q	16	Z	25
I	8	R	17		

จำนวนที่ได้จะมีตั้งแต่เลขโดด 6 ตัว ถึง แสนตัว โดยการเขียนจุดทศนิยมข้างหน้าทุกตัวจะมีค่าน้อยกว่า 1 เช่น

L.P.M	111512	0.111512
G.R.N	61713	0.61713
C.A.F	205	0.205
I.K.H	8107	0.8107

ต่อไปถามคำถามบางข้อต่อไปนี้

1. ชื่อย่อสามตัวใดที่จะได้รหัสเป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ ZZZ
2. ชื่อย่อสามตัวใดที่จะได้รหัสเป็นทศนิยมที่มีค่ามากที่สุดเมื่อตามด้วยจุดทศนิยม JJJ
3. ชื่อย่อสามตัวใดที่จะได้รหัสเป็นทศนิยมที่มีค่าน้อยที่สุดที่มีค่ามากกว่า 1/10 KAS
   เป็นทศนิยมที่มีค่ามากที่สุดที่มีค่าน้อยกว่า 1/10 AJJ
4. มีการจับคู่ 1 – 1 ระหว่าง ชื่อย่อกับจำนวนเต็มบวกและศูนย์ที่เป็นรหัสหรือไม่ ไม่มี
   จำนวนเต็มบวกกับศูนย์ที่เป็นรหัสกับทศนิยมของรหัสหรือไม่ มี

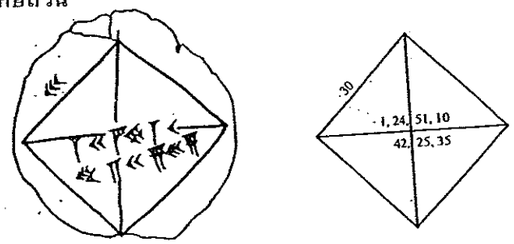
ต่อไปถือเชือกเส้นหนึ่งในแนวนอนหน้าชั้นเรียนให้เป็นรูปจำลองของเส้นจำนวนโดยใช้นิ้วกำหนดจุด 0 และ 1 ให้นักเรียนออกมาบอกตำแหน่งทศนิยมที่เป็นรหัสของคำที่คุ้นเคยบางคำ เช่น algebra geometry mathematics

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

แล้วพยายามใช้ชื่อจังหวัดหรือหมู่บ้านของนักเรียน หรือคำปฏิญาณแสดงความจงรักภักดี แต่ในที่นี้ผลทั้งหมดจะอยู่ในช่วงสั้น ๆ จาก 0 ถึง 1

4.6.3 คณิตศาสตร์สมัยบาบิโลเนียน คลังของเรื่องราวพีชคณิตที่น่าสนใจสามารถค้นหาได้ในบันทึกของคณิตศาสตร์ ซึ่งมีเรื่องของคณิตศาสตร์ในสมัยบาบิโลเนียนซึ่งสามารถนำไปใช้ได้ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีปีทาโกรัส ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ส่งสำเนาป้ายดินเหนียวบาบิโลน (1650 BC) ให้นักเรียน ครั้งแรกให้พยายามเดาว่าประกอบด้วยข้อความอะไรบ้างโดยศึกษาจากรูป แล้วให้ข้อชี้แนะเท่าที่จำเป็นเพื่อถอดตัวอักษรโบราณจากการเขียนแบบ cuneiform ซึ่งแทนจำนวนที่เขียนขึ้นบนฐาน 60 ท้ายที่สุดใช้เครื่องคิดเลขหาค่าเศษส่วน



ตีความหมายลำดับทั้งสองโดยใช้เศษส่วนเหล่านี้ จะมองเห็นทั้งวิธีและความถูกต้องของการคำนวณแบบบาบิโลเนียนโบราณ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวแต่ละด้านเป็น 30 จะมีค่า 30..... หรือ 42.426405... ผลลัพธ์ที่ได้พบว่าใกล้เคียงกัน

$$1,2,4,51,10 = 1 +$$
$$= 1 + 0.4 + 0.141666 + 0.0000462$$
$$= 1.4142128$$
$$42,25,35 = 42 +$$
$$= 42 + 0.4166666 + 0.0097222$$
$$= 42.4263888$$

4.6.4 การเดากำลังสอง เป็นกลเม็ดมนต์คณิตเล็ก ๆ กับการวิเคราะห์เชิงพีชคณิตที่น่าสนใจบนพื้นฐานของค่าของสมการกำลังสอง

ตัวอย่าง

คิดถึงฟังก์ชันกำลังสองประเภท $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

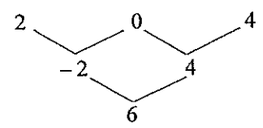
$f(x) = ax^2 + bx + c$

แทนค่า 0 , 1 และ 2 ที่ x ในลำดับนั้น สำหรับ $x = 0 , f(0) = 2$

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

และให้ค่าที่สอดคล้องสำหรับ f(x) $x = 1, f(1) = 0$

เพื่อหานิพจน์เดิม หาผลต่างครั้งแรกและครั้งที่สอง $x = 2, f(2) = 4$



f(0), f(1), f(2)
ผลต่างครั้งแรก
ผลต่างครั้งที่สอง

สัมประสิทธิ์ของพจน์ x^2 เป็นครึ่งหนึ่งของจำนวนที่อยู่ล่าง ; ½ ของ 6 = 3
สัมประสิทธิ์ของพจน์ x คือ จำนวนแรกของแถวกลางลบด้วยครึ่งหนึ่งของจำนวนที่อยู่ล่าง ;
$-2-3=-5$ จำนวนแรกของแถวบนสุดคือ ค่าคงที่ , 2 เพราะฉะนั้นนิพจน์เดิมคือ
$3x^2-5x+2$

คำอธิบายสำหรับกฎเหล่านี้พบได้โดยพิจารณากรณีทั่วไป , $f(x)=ax^2+bx+c$
สำหรับค่า x เป็น 0 , 1 , 2 จะได้

$f(0) = c$

$f(1) = a+b+c$

$f(2) = 4a+2b+c$

หาผลต่างครั้งแรกและครั้งที่สองจะได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

จากแถวนี้จะเห็นชัดว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนล่าง คือ a ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ x^2 จำนวนแรกของแถวกลางลบด้วยครึ่งหนึ่งของจำนวนล่าง จะได้ $a+b-a=b$ ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ x จำนวนแรกของแถวบน คือ c ซึ่งเป็นค่าคงที่

4.7 การใช้เทคโนโลยีในการสอนพีชคณิต

ในปัจจุบันได้มีเทคโนโลยีเข้ามามีบทบาทในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในเรื่องที่เป็นนามธรรมให้มีความเป็นรูปธรรมยิ่งขึ้น พีชคณิตมีเนื้อหาที่เป็นนามธรรมอย่างยิ่ง ดังนั้นการนำเทคโนโลยีเข้ามาใช้จะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจยิ่งขึ้น เทคโนโลยีที่กล่าวถึงนั้น หมายถึง โปรแกรมสำเร็จรูปต่าง ๆ เช่น CAI สื่อมัลติมีเดีย

The Geometer's Sketchpad (GPS) เหล่านี้สามารถช่วยในการสร้างความเข้าใจเรื่อง กราฟ การค้นพบรูปแบบพีชคณิต การฝึกทักษะ

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้สาระพีชคณิต ครูต้องใช้ความพยายามในการจัดกิจกรรมให้เป็นรูปธรรมมากที่สุด เพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น โดยมีหลักการในการจัดกิจกรรมคือ ต้องมีการสร้างแรงจูงใจในการเรียนพีชคณิตให้กับนักเรียน กิจกรรมนั้นต้องเป็นกิจกรรมที่สามารถสร้างความเข้าใจในการแก้สมการ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องลำดับและอนุกรมต้องน่าสนใจ มีรูปจำลองทางพีชคณิตที่สามารถนำมาทดลองได้ มีการจัดสื่ออุปกรณ์และกิจกรรมเสริม และต้องมีการใช้เทคโนโลยีในการสอนพีชคณิต

5. กระบวนการกลุ่ม

5.1 ความหมายของกระบวนการกลุ่ม

มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายของกระบวนการกลุ่มไว้หลายท่าน ดังนี้

จุฑา บุรีภักดี (2537 : 4) ได้ให้ความหมายของกระบวนการกลุ่มไว้ว่า เป็นเรื่องที่ว่าด้วยความสัมพันธ์ หรือปะทะสังสรรค์ของคนแต่ละกลุ่มชน โดยที่คนหนึ่งมีบทบาทกระตุ้นให้อีกคนหนึ่งได้กระทำอย่างหนึ่งอย่างใดให้มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และเป็นการช่วยกันทำงานใด ๆ ได้อย่างมีความสุข และได้ผลงานที่ดี

พนม ลิ้มอารีย์ (2540 : 1) ได้ให้ความหมายของกระบวนการกลุ่มไว้ว่า เป็นกระบวนการที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันในกลุ่ม ซึ่งกลุ่ม (Group) จะต้องประกอบขึ้นด้วยคนตั้งแต่สองคนขึ้นไปมาร่วมสังสรรค์ทำกิจกรรม หรือมเกี่ยวข้องสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน

ทิศนา แขมมณี และคณะ (2545 : 1) ได้กล่าวว่า กระบวนการกลุ่ม วิชาแขนงหนึ่งซึ่งพยายามศึกษาเรื่องเกี่ยวกับกลุ่มคน เพื่อให้ได้ซึ่งความรู้ที่จะนำไปใช้ในกรปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงเจตคติ และพฤติกรรมของตน อันจะเป็นประโยชน์ในด้านการเสริมสร้างคามสัมพันธ์และปรับปรุงการทำงานของกลุ่มให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

คาร์ทไรท์ และแซนเดอร์ (Cartwrigth and Zander. 1990 : 4) ได้ให้ความหมายของกระบวนการกลุ่มไว้ 3 ความหมาย คือ

1. กระบวนการกลุ่ม หมายถึง อุดมการณ์ทางการเมืองแบบหนึ่ง (A Sort of Political Ideology) ที่กลุ่มควรจัดให้มีและดำเนินการ อุดมการณ์ดังกล่าวจะเป็นเรื่องเกี่ยวกับความเป็นผู้นำในระบอบประชาธิปไตย การมีส่วนร่วมในการตัดสินใจของสมาชิก และคุณค่าหรือประโยชน์ที่สมาชิกหรือสังคมควรจะได้รับ ซึ่งนับเป็นการรวมกลุ่มในอุดมคติที่สมาชิก

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ทุกคนมีความเท่าเทียมกัน ไม่มีการกำหนดความเป็นผู้นำ ผู้ตาม ทุกคนจะใช้สติปัญญาและความสามารถที่ตนมีอยู่อย่างเต็มที่ เพื่อให้เกิดประโยชน์ต่อตนเองและสังคม

2. กระบวนการกลุ่ม หมายถึง เทคนิคต่าง ๆ ที่นำมาใช้เพื่อฝึกทักษะเกี่ยวกับมนุษยสัมพันธ์ หรือการเรียนรู้เรื่องราวเกี่ยวกับกลุ่ม เช่น การแสดงบทบาทจำลอง (Role Playing) การสังเกต (Observation) และการให้ข้อวิจารณ์แก่กัน (Feedback) เป็นต้น

3. กระบวนการกลุ่ม หมายถึง สาขาวิชาที่ว่าด้วยการสืบสวนสอบสวน (A Field of Inquiry) เพื่อให้ทราบธรรมชาติของกลุ่ม กฎการพัฒนาการของกลุ่ม ความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกด้วยกันเองและระหว่างกลุ่ม

เรกอน และเชฟเฟร็ด (Ragon and Shephred. 1995 : 197) กล่าวว่า กระบวนการกลุ่ม คือ การศึกษาธรรมชาติของกลุ่มที่เกิดขึ้นขณะที่มนุษย์ทำงานร่วมกัน มุ่งศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมของสมาชิกทุกคน ตลอดจนความสัมพันธ์ของสมาชิกโดยการใช้การอภิปราย การเตรียมการ และการประเมินผลร่วมกัน สมาชิกทุกคนจะได้ทราบถึงสิ่งที่เกิดขึ้นภายในกลุ่ม

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า กระบวนการกลุ่ม หมายถึง กระบวนการที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันในกลุ่ม ซึ่งประกอบด้วยบุคคลตั้งแต่สองคนขึ้นไป เพื่อร่วมกันทำกิจกรรมใด ๆ ให้เกิดความรู้ ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ได้ผลงานที่มีประสิทธิภาพ และมีความสุขในการทำกิจกรรมนั้น ๆ

5.2 ความเป็นมาของกระบวนการกลุ่ม

ทิศนา แขมมณี และคณะ (2545 : 3) ได้กล่าวถึงความเป็นมาของกระบวนการกลุ่มว่าเป็นการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับกระบวนการกลุ่ม เกิดจากแนวความคิดของ เคิร์ท เลวิน (Kurt Lewin) นักวิทยาศาสตร์และนักจิตวิทยาชาวเยอรมัน โดยในระหว่างปี ค.ศ. 1930 – 1948 เลวิน และคณะ ได้ศึกษาทดลองเกี่ยวกับกลุ่มในสังคม การเปลี่ยนแปลงบรรยากาศของกลุ่ม ความเป็นผู้นำแบบต่าง ๆ ของกลุ่ม และได้ตั้งทฤษฎีสนาม (Field Theory) ขึ้น โดยได้รับอิทธิพลจากทฤษฎีเกสตอลท์ (Gestalt Theory) และริเริ่มใช้คำว่า “Group Dynamics” ซึ่งในภาษาไทยใช้คำว่า “พลังกลุ่ม’ หรือ “พลวัตรกลุ่ม” หรือ “กระบวนการกลุ่ม” หรือ “กลุ่มสัมพันธ์” ซิกมันต์ ฟรอยด์ (Sigmund Freud) เป็นอีกผู้หนึ่งที่มีส่วนต่อการศึกษากระบวนการกลุ่มอย่างไม่เป็นทางการ โดยฟรอยด์ใช้กลุ่มทางสังคม (Social Group) มาเป็นวิธีการในการบำบัดทางจิต (Psychotherapy) ซึ่งก่อให้เกิดศูนย์วิจัยเกี่ยวกับกระบวนการกลุ่มที่สำคัญในประเทศอังกฤษชื่อว่า ทาวิสต๊อก คลีนิค (Tavistock Clinic) นอกจากนี้ทฤษฎีของ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ฟรอยด์ที่รู้จักคือ ทฤษฎีจิตวิยาวิเคราะห์ (Psychoanalytic Theory) ก็ยังมีอิทธิพลต่อการสร้างหลักการของกระบวนการกลุ่ม

ในปี ค.ศ. 1946 และ 1947 โรเจอร์ (Rogers) ได้ทำการศึกษาถึงประสบการณ์ภายในกลุ่ม โดยโรเจอร์ และคณะ ได้ตั้งศูนย์ให้คำปรึกษาแห่งมหาวิทยาลัยชิคาโก (Counseling Center of the University of Chicago) ขึ้น โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อฝึกบุคลากรสำหรับการแนะแนว ซึ่งหลักสูตรการอบรมจะเน้นการฝึกเพื่อให้ผู้เข้ารับการอบรมได้เข้าใจตนเอง ตลอดจนวิธีการในการสร้างความสัมพันธ์กับผู้อื่น

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า กระบวนการกลุ่มมีจุดเริ่มต้นมาจากการที่นักจิตวิทยาต้องการศึกษาพฤติกรรมของบุคคลซึ่งอยู่ร่วมกันในสังคม โดยได้มีการทดลองที่เกี่ยวกับกลุ่มในสังคม การเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ของกลุ่ม จนได้มีการสร้างทฤษฎีที่เกี่ยวกับกระบวนการกลุ่มขึ้นหลายทฤษฎี

5.3 ความเป็นมาของกระบวนการกลุ่มในประเทศไทย

ในปี พ.ศ. 2515 ทิศนา เทียนเสม ได้ทำปริญญานิพนธ์ระดับดุษฎีบัณฑิต เรื่อง A Model for Pre – service Teacher Training in Human Relation for Thailand ซึ่งเป็นเรื่องของการใช้กระบวนการกลุ่มในการฝึกอบรมด้านมนุษยสัมพันธ์สำหรับนิสิตฝึกหัดครู ต่อมา ทิศนา แขมมณี ได้นำเรื่องนี้มาทดลองสอนวิชากระบวนการกลุ่ม กับนิสิตปริญญาตรีก่อนเป็นอันดับแรกและต่อมาได้ขยายไปถึงระดับปริญญาโท ต่อมาในเดือนตุลาคม พ.ศ. 2516 ทองจันทร์ หงส์ลดารมภ์ ได้จัดประชุมเชิงปฏิบัติการแก่คณาจารย์แพทย์ โดยนำวิธีการของกระบวนการกลุ่มไปใช้ แต่เรียกเสียใหม่ว่า กลุ่มสัมพันธ์ ซึ่งถือว่าเป็นคนแรกที่ใช้ชื่อนี้และยอมรับจนเป็นที่นิยมในเวลาต่อมา (พนม ลิ้มอารีย์. 2540 : 5) ในปี พ.ศ. 2517 สุธีรพันธ์ กรลักษณ์ และหลุย จำปาเทศ ได้ทดลองนำกระบวนการกลุ่มมาใช้ในการสอน และการให้บริการทางด้านการแนะแนวและการให้คำปรึกษาแก่นิสิตนักศึกษา นอกจากนี้ยังได้นำไปใช้ในการพัฒนาบุคลากรขององค์การธุรกิจต่าง ๆ จนถึงปลายปี พ.ศ. 2517 อำไพ สุจริตกุล ได้สนับสนุนให้ทิศนา แขมมณี และคณะ เริ่มดำเนินงานโครงการวิจัยเรื่อง การฝึกกลุ่มสัมพันธ์และการรับรู้สำหรับครูจากสถาบันฝึกหัดครูระดับประถมศึกษา จึงเป็นจุดเริ่มต้นทำให้เรื่องกระบวนการกลุ่มแพร่หลายไปในวงการศึกษาและวงการฝึกหัดครู (ทิศนา แขมมณี และคณะ. 2545 : 8 – 10) ต่อมาในปี พ.ศ. 2519 กรมการฝึกหัดครู กระทรวงศึกษาธิการ ได้พิจารณาเห็นประโยชน์และความสำคัญของวิชาการนี้ จึงได้บรรจุเข้าไว้เป็นวิชาบังคับใน

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

หลักสูตร ซึ่งมีผลให้นิสิตนักศึกษาฝึกหัดครูทั่วประเทศได้มีโอกาสศึกษาวิชานี้ และนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ในประเทศไทยนั้นกระบวนการกลุ่มมีจุดเริ่มต้นจากการทำปริญญานิพนธ์ระดับดุษฎีบัณฑิต ต่อมาได้มีผู้เห็นประโยชน์และความสำคัญ จึงมีการนำไปใช้สอนนิสิตฝึกหัดครู จนในที่สุดก็ได้รับการบรรจุเป็นหนึ่งในวิชาบังคับของหลักสูตร เพื่อให้นิสิตนักศึกษาฝึกหัดครูได้มีโอกาสศึกษา และนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์

5.4 ทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับกระบวนการกลุ่ม

ทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับกระบวนการกลุ่ม มีดังนี้ (ทิศนา แขมมณี. 2545 : 10–12)

1. ทฤษฎีสนามของ เคิร์ท เลวิน (Kurt Lewin) ทฤษฎีนี้มีความสำคัญ สรุปได้ดังนี้

1.1 พฤติกรรมเป็นผลมาจากพลังความสัมพันธ์ของสมาชิกในกลุ่ม

1.2 การรวมกลุ่มแต่ละครั้ง จะต้องมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกในกลุ่มอยู่ในรูปของการกระทำ ความรู้สึก และความคิด

1.3 โครงสร้างของกลุ่มจะเกิดจากการรวมกลุ่มของบุคคลที่มีลักษณะแตกต่างกัน

1.4 ปฏิสัมพันธ์ในรูปแบบการกระทำ ความรู้สึก และความคิด จะก่อให้เกิดโครงสร้างของกลุ่ม แต่ละครั้งจะมีลักษณะแตกต่างกัน

1.5 สมาชิกในกลุ่มจะมีการปรับตัวเข้าหากัน และพยายามช่วยกันทำงาน การที่บุคคลพยายามปรับบุคลิกของตนที่มีความแตกต่างกันนี้ จะก่อให้เกิดความเป็นอันหนึ่งอันเดียวกัน และก่อให้เกิดพลังของกลุ่มที่ทำให้การทำงานเป็นไปด้วยดี

2. ทฤษฎีปฏิสัมพันธ์ (Interaction Theory) ของเบลล์ (Beles) โฮมาน (Homans) และไวท์ (Whyte) แนวคิดของทฤษฎีนี้คือ

2.1 กลุ่มจะมีปฏิสัมพันธ์กัน โดยการกระทำกิจกรรม (Activity) อย่างใดอย่างหนึ่ง

2.2 ปฏิสัมพันธ์จะเป็นปฏิสัมพันธ์ทุก ๆ ด้าน คือ

2.2.1 ปฏิสัมพันธ์ทางร่างกาย (Physical Interaction)

2.2.2 ปฏิสัมพันธ์ทางวาจา (Verbal Interaction)

2.2.3 ปฏิสัมพันธ์ทางจิตใจ (Emotional Interaction)

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

2.3 กิจกรรมต่างที่กระทำผ่านการมีปฏิสัมพันธ์นี้ จะก่อให้เกิดอารมณ์ ความรู้สึก (Sentiment) ขึ้น

3. ทฤษฎีระบบ (System Theory) ทฤษฎีนี้มีแนวคิดสำคัญ คือ

3.1 กลุ่มจะประกอบด้วยโครงสร้างหรือระบบ ซึ่งมีการแสดงบทบาทและการกำหนดตำแหน่งห้าที่ของสมาชิก อันถือว่าเป็นการลงทุน (Input) เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ (Output) อย่างใดอย่างหนึ่ง

3.2 การแสดงบทบาทตำแหน่งหน้าที่ของสมาชิกจะกระได้โดยการสื่อสารระหว่างกัน (Communication) และจากการเปิดเผยตัวเองในกลุ่ม (Open System)

4. ทฤษฎีสังคมมิติ (Sociometric Orientation) ของโมเรโน (Moreno) ทฤษฎีนี้มีแนวคิดสำคัญดังต่อไปนี้ คือ

4.1 การกระทำและจริยธรรม หรือขอบเขตของการกระทำของกลุ่มจะเกิดความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกในกลุ่ม ซึ่งจะศึกษาได้โดยให้สมาชิกเลือกสัมพันธ์ทางสังคมระหว่างกัน

4.2 เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาความสัมพันธ์ คือ การแสดงบทบาทจำลอง (Role Playing) หรือใช้เครื่องมือวัดการเลือกทางสังคม (Sociometric Test)

5. ทฤษฎีจิตวิเคราะห์ (Psychoanalysis Orientation) ของซิกมันต์ (Sigmund Freud) ทฤษฎีนี้มีแนวคิดที่สำคัญ ดังนี้

5.1 เมื่อบุคคลอยู่ร่วมกันเป็นกลุ่ม จะต้องอาศัยกระบวนการจูงใจ (Motivation Process) ซึ่งอาจเป็นรางวัลหรือผลจากการทำงานในกลุ่ม

5.2 ในการรวมกลุ่ม บุคคลจะมีโอกาสแสดงตนอย่างเปิดเผย หรือพยายามป้องกันปิดบังตนเองโดยวิธีต่าง ๆ (Defense Mechanism) การใช้แนวคิดนี้ในการวิเคราะห์กลุ่ม โดยให้บุคคลแสดงออกตามความเป็นจริงโดยใช้วิธีการบำบัด (Therapy) ก็จะช่วยให้สมาชิกในกลุ่มเกิดความเข้าใจตนเองและผู้อื่นได้ดียิ่งขึ้น

6. ทฤษฎีจิตวิทยาทั่วไป (General Psychology) ทฤษฎีนี้มีแนวคิดว่า การใช้หลักจิตวิทยาต่าง ๆ เกี่ยวกับการเรียนรู้ การรับรู้ ความคิด ความเข้าใจ การให้แรงจูงใจ ฯลฯ จะช่วยให้เข้าใจพฤติกรรมของบุคคลในแง่การรวบรวมข้อมูล

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ทฤษฎีพื้นฐานของกระบวนการกลุ่ม มี 6 ทฤษฎี ได้แก่ ทฤษฎีสนามของ เคิร์ท เลวิน (Kurt Lewin) ทฤษฎีปฏิสัมพันธ์ (Interaction Theory) ของ เบลล์ (Beles) โฮมาน (Homans) และไวท์ (Whyte) ทฤษฎีระบบ (System Theory) ทฤษฎี

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

สังคมมิติ (Sociometric Orientation) ของโมเรโน (Moreno) ทฤษฎีจิตวิเคราะห์ (Psychoanalysis Orientation) ของซิกมันต์ (Sigmund Freud) และทฤษฎีจิตวิทยาทั่วไป (General Psychology)

5.5 หลักการของกระบวนการกลุ่ม

หลักการของกระบวนการกลุ่ม ได้มีนักการศึกษาหลายท่านกล่าวไว้ ดังนี้

ทองเรียน อมรัชกุล (2537 : 29 – 31) ได้กล่าวถึงหลักการของกระบวนการกลุ่ม สรุปได้ดังนี้

1. ให้ความเคารพต่อความเป็นสมาชิกของแต่ละบุคคล โดยเชื่อว่าสมาชิกทุกคนมีสมรรถภาพในตัวเอง และช่วยให้สมาชิกได้พัฒนาเต็มที่ภายใต้กลุ่มที่มีประสิทธิภาพ

2. กระสบการณ์กลุ่มจะช่วยตอบสนองความต้องการของบุคคลในด้านการยอมรับนับถือ การหาประสบการณ์ใหม่และการสร้างความมั่นคงปลอดภัยให้สมาชิก

3. สมาชิกทุกคนต้องยอมรับบทบาทอย่างใดอย่างหนึ่งที่ตนจะต้องแสดงออก ซึ่งมีผลต่อการที่จะให้กลุ่มบรรลุความมุ่งหมาย

4. สมาชิกทุกคนควรมีความรับผิดชอบในการดำเนินกิจกรรมกลุ่ม

5. สมาชิกทุกคนจะต้องรู้จักยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น และเปิดเผยตัวเองในกลุ่ม

6. สมาชิกควรจะได้รับแรงเสริม เมื่อมีส่วนร่วมในกลุ่มอย่างแท้จริง นอกจากนี้สมาชิกจะต้องถือว่าตนมีคุณค่าก็ต่อเมื่อได้ทำงานให้แก่กลุ่มอย่างเต็มความสามารถ

7. สมาชิกในกลุ่มจะต้องมองเห็นคุณค่าของบุคลิกภาพที่แตกต่างกันออกไป โดยถือว่าความแตกต่างนั้นจะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อความสำคัญ และความมั่นคงของกลุ่ม

8. กิจการของกลุ่มที่มีความแตกต่างกันออกไป จะทำให้สมาชิกในกลุ่มมีการแลกเปลี่ยนประสบการณ์กันอย่างกว้างขวาง

9. สมาชิกทุกคนจะต้องเอาใจใส่ และมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาของกลุ่มอย่างจริงจัง

10. สมาชิกทุกคนมีส่วนร่วมในการรักษา ส่งเสริม และธำรงไว้ซึ่งชื่อเสียงของกลุ่มและเสถียรภาพทางอารมณ์ของสมาชิกในกลุ่ม

11. การให้ความร่วมมือของสมาชิกจะมีพลังสูงขึ้นก็ต่อเมื่อ ทุกคนได้ตระหนักถึงความมุ่งหมายที่ซ่อนเงื่อนที่บุคคลแต่ละคนมีอยู่

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

12. กระบวนการกลุ่มย่อมทำให้เกิดการเรียนรู้ระหว่างสมาชิกต่อสมาชิกด้วยกันเป็นอย่างดี

13. สมาชิกทุกคนควรร่วมมือในการแก้ปัญหาการสื่อสารภายในกลุ่ม ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

14. เทคนิคการทำงานร่วมกันของกลุ่ม รวมทั้งประเมินผลในกลุ่มจะเป็นแนวทางที่จะทำให้กลุ่มบรรลุวัตถุประสงค์อย่างมีประสิทธิภาพ

นอกจากนี้ สวาท เมืองจันทร์ (2538 : 51) กล่าวไว้สรุปได้ว่า วิธีการของกระบวนการกลุ่มนั้น เน้นกระบวนการมากกว่าเนื้อหาวิชา และถือว่าการเรียนรู้โดยการกระทำ (Learning by Doing) เป็นการเรียนรู้ที่แท้จริง

ประสาท อิศรปรีดา (2542 : 163 – 166) ได้แบ่งการเรียนรู้ตามวิธีของกระบวนการกลุ่มออกเป็น 4 ขั้นตอน คือ

1. ระยะการมีส่วนร่วม (Participation or Involvement Stage) ระยะนี้ผู้เรียนจะเข้ามามีส่วนร่วมในฐานะสมาชิกคนหนึ่งของกลุ่ม และเป็นผู้ลงมือปฏิบัติ หรือคิดค้นแสวงหาสิ่งที่ต้องการเรียนรู้ด้วยตนเอง ผลการเรียนรู้จะเกิดจากผู้เรียนโดยตรง ผู้ที่มีส่วนร่วมมากก็จะได้รับผลการเรียนรู้มาก นั่นคือ ผู้เรียนจะต้องมีส่วนทั้งด้านร่างกาย จิตใจ และสติปัญญาหรือสมอง

2. ระยะวิเคราะห์ (Analysis Stage) เป็นระยะที่ผู้เรียนจะร่วมมือกันวิเคราะห์ประสบการณ์การเรียนรู้นั้นทันที ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนมีความรู้อย่างกว้างขวาง สามารถประเมินความสัมพันธ์ของสมาชิกในกลุ่ม วิธีการ ผลของการเรียนรู้ ตลอดจนช่วยให้ผู้เรียนรู้จักตนเองดียิ่งขึ้น

3. ระยะสรุปและประยุกต์หลักการ (Generalization and Application Stage) ระยะนี้ผู้เรียนจะรวบรวมแนวคิดที่ตนค้นพบและแนวคิดที่ได้จากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้อื่น แล้วสรุปเป็นหลักการของตนเอง แล้วสรุปเป็นหลักการของตนเอง ซึ่งจะทำได้สองลักษณะ คือ

3.1 การประยุกต์เพื่อการปรับปรุงบุคลิกภาพหรือพัฒนาตนเอง (Self Development) ให้เหมาะสมยิ่งขึ้น ตลอดจนการเสริมสร้างความสัมพันธ์กับผู้อื่น (Interpersonal Relation) หรือการมีมนุษยสัมพันธ์อันดีกับผู้อื่น

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

3.2 การประยุกต์เพื่อใช้กับการแก้ปัญหา (Problem Solving) ต่าง ๆ ในอนาคต เพื่อใช้ในการปรับปรุงและควบคุมธรรมชาติ และสังคมให้ดีกว่าเดิม ตลอดจนช่วยกันคิดประดิ่นสิ่งใหม่

4. ระยะประเมินผล (Evaluation Stage) ผู้เรียนจะเป็นผู้ประเมินผลการเรียนรู้ของตนเองและของกลุ่มจากการอภิปรายให้ข้อเสนอแนะ และติชมร่วมกับสมาชิกคนอื่น ๆ ในกลุ่ม

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า หลักการของกระบวนการกลุ่ม เป็นสิ่งสำคัญในการจัดกิจกรรมโดยใช้กระบวนการกลุ่ม ซึ่งจะเน้นกระบวนการมากกว่าเนื้อหาวิชา และถือว่าการเรียนรู้โดยการกระทำ (Learning by Doing) เป็นการเรียนรู้ที่แท้จริง และการดำเนินงานของกลุ่มจะเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพได้นั้น ขึ้นอยู่กับความร่วมมือกันของสมาชิกในกลุ่มทุก ๆ คนนั่นเอง

5.6 เทคนิคของกระบวนการกลุ่ม

การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่สอดคล้องกับหลักทฤษฎีของกระบวนการกลุ่มมีอยู่หลายวิธี สรุปได้ดังต่อไปนี้ (ทิศนา แขมมณี. 2545 : 201 – 202)

1. เกม (Game) เป็นวิธีการหนึ่งที่นำมาใช้ในการสอนได้ดี โดยครูผู้สอนสร้างสร้างสถานการณ์สมมติขึ้นให้ผู้เรียนลงเล่นด้วยตนเอง ภายใต้ข้อตกลงหรือกติกาบางอย่างที่กำหนดไว้ ซึ่งผู้เรียนจะต้องตัดสินใจทำอย่างใดอย่างหนึ่งอันจะมีผลออกมาในรูปของการแพ้การชนะ วิธีกรนี้จะช่วยให้ผู้เรียนได้วิเคราะห์ความรู้สึกนึกคิด และพฤติกรรมต่าง ๆ ที่มีอิทธิพลต่อการตัดสินใจ นอกจากนั้นยังช่วยให้ผู้เรียนเกิดความสนุกสนานในการเรียนด้วย

2. บทบาทสมมติ (Role - Play) เป็นวิธีการหนึ่งที่ได้รับความนิยมนำมาใช้ในการสอน วิธีการนี้มีลักษณะเป็นสถานการณ์สมมติเช่นเดียวกับเกม แต่มีการกำหนดบทบาทของผู้เล่นในสถานการณ์ที่สมมติขึ้นมานั้น แล้วให้ผู้เรียนเข้าสวมบทบาทนั้นแสดงออกตามธรรมชาติ โดยอาศัยบุคลิกภาพ ประสบการณ์ และความรู้สึกนึกคิดของตนเป็นหลัก ดังนั้นวิธีการนี้จึงมีส่วนช่วยให้ผู้เรียนได้มีโอกาสศึกษาวิเคราะห์ถึงความรู้สึก และพฤติกรรมของตนอย่างลึกซึ้ง ทั้งยังช่วยเสริมบรรยากาศการเรียนรู้ให้น่าสนใจ และน่าติดตามอีกด้วย

3. กรณีตัวอย่าง (Case) เป็นวิธีการหนึ่งซึ่งใช้กรณีหรือเรื่องราวต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจริง ๆ มาดัดแปลงและใช้เป็นตัวอย่างในการที่ให้ผู้เรียนได้ศึกษา วิเคราะห์และอภิปรายกัน เพื่อสร้างความเข้าใจและฝึกฝนแก้ไขปัญหานั้น วิธีการนี้จะช่วยให้ผู้เรียนได้รู้จักคิดและพิจารณาข้อมูลที่ตนได้รับอย่างถี่ถ้วน และการอภิปรายจะช่วยให้ผู้เรียนได้มีโอกาสแลกเปลี่ยน

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ข้อมูลซึ่งกันและกัน รวมทั้งการนำเอากรณีต่าง ๆ ซึ่งคล้ายคลึงกับชีวิตจริงมาใช้ จะช่วยให้การเรียนรู้มีลักษณะใกล้เคียงกับความเป็นจริง ซึ่งมีส่วนทำให้การเรียนรู้มีความหมายสำหรับผู้เรียนมากขึ้น

4. สถานการณ์จำลอง (Simulation) คือการจำลองสถานการณ์จริง หรือสร้างสถานการณ์ใกล้เคียงกับความจริงแล้วให้ผู้เรียนเข้าไปอยู่ในสถานการณ์นั้น และมีปฏิกิริยาโต้ตอบกัน วิธีการนี้จะช่วยให้ผู้เรียนได้มีโอกาสทดลองแสดงพฤติกรรมต่าง ๆ ซึ่งในสถานการณ์จริงผู้เรียนอาจจะไม่กล้าแสดงออก เพราะอาจจะเป็นการเสี่ยงต่อผลที่จะได้รับจนเกินไป

5. ละคร (Acting or Dramatization) คือวิธีการที่ให้ผู้เรียนได้แสดงบทบาทตามบทเรียนที่กำหนดไว้ให้ โดยไม่นำเอาบุคลิกภาพและความรู้สึกนึกคิดของตนเข้าไปมีส่วนเกี่ยวข้อง อันจะมีส่วนทำให้เกิดผลเสียต่อการแสดงบทบาทนั้น ๆ วิธีการนี้จะช่วยให้ผู้เรียนได้มีประสบการณ์ในการที่จะเข้าใจความรู้สึก เหตุผล และพฤติกรรมของผู้อื่น ซึ่งความเข้าใจนี้มีส่วนช่วยส่งเสริมความเห็นอกเห็นใจกัน นอกจากนั้นการที่ผู้เรียนได้มีโอกาสแสดงละครร่วมกัน จะช่วยฝึกให้ผู้เรียนเกิดความรับผิดชอบในการเรียนรู้ร่วมกัน และได้ฝึกการทำงานร่วมกันด้วย

6. กลุ่มย่อย (Small Group) วิธีการใช้กลุ่มย่อยในการสอนนี้ นิยมใช้กันมานานแล้ว อาจจะเป็นเพราะเล็งเห็นแล้วว่าเป็นประโยชน์ในการเรียนของผู้เรียนกลุ่มย่อย เปิดโอกาสให้นักเรียนทุกคนได้มีส่วนในการแสดงออกและช่วยให้ผู้เรียนได้ข้อมูลเพิ่มเติมมากขึ้น การใช้กลุ่มย่อยมีหลายวิธีแตกต่างกันออกไปแล้วแต่ผู้จัดจะกำหนด เช่น กลุ่มระดมสมอง กลุ่มนกกระจอก กลุ่มเพื่อนช่วยเพื่อน เป็นต้น

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า เทคนิคของกระบวนการกลุ่มที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีคุณภาพ ประกอบด้วย คือ เกม (Game) บทบาทสมมติ (Role - Play) กรณีตัวอย่าง (Case) สถานการณ์จำลอง (Simulation) ละคร (Acting or Dramatization) และกลุ่มย่อย (Small Group)

5.7 การจัดกลุ่มในกระบวนการกลุ่ม

การเข้าร่วมกลุ่มในกระบวนการกลุ่มมีคุณค่าสำหรับสมาชิกในกลุ่ม เพราะสมาชิกจะได้ศึกษาสภาวของคน ธรรมชาติของคน ว่ามีลักษณะหรือความน่าจะเป็นไปมากน้อยแค่ไหน อย่างไร นอกจากนี้สมาชิกกลุ่มยังเกิดความเจริญงอกงามทางความรู้ ความสามารถ และลักษณะบางประการ การเข้าร่วมกลุ่มจะช่วยให้สมาชิกกลุ่มมีความเจริญงอกงาม เพิ่มความ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

มั่นใจในตนเอง (Self Concept) ดีขึ้น และช่วยให้เกิดความรู้สึกว่าตนเองมีคุณค่า คมเพชร ฉัตรศุภกุล. 2540 : 10 – 15) กลุ่มจะช่วยให้เกิดความรู้สึกปลอดภัย ให้ความอบอุ่น ให้ความรัก ให้กำลังใจ และกลุ่มยังเป็นเครื่องบำรุงขวัญของสมาชิกด้วย (พนม ลิ้มอารีย์. 2540 : 56 – 64)

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ผลของการเข้าร่วมกลุ่มในกระบวนการกลุ่มนั้นช่วยให้สมาชิกของกลุ่มพัฒนาด้านความคิด เจตคติ ค่านิยม และพฤติกรรม นั่นคือได้ค้นพบตนเอง เข้าใจผู้อื่น ยิ่งไปกว่านั้นการเข้าร่วมกลุ่มยังช่วยให้มีประสบการณ์ในการดำรงชีวิตแบบประชาธิปไตย รู้จักรับผิดชอบในบทบาทของตนเอง และรู้จักแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผล

5.8 ขนาดของกระบวนการกลุ่ม

ขนาดของกลุ่ม คือ จำนวนสมาชิกในกลุ่มซึ่งมีผลกระทบต่อคุณภาพของปฏิสัมพันธ์และการสื่อสารระหว่างสมาชิก ซึ่งได้มีผู้แสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับจำนวนสมาชิกภายในกลุ่มไว้ดังนี้

ประสาท อิศรปรีดา (2542 : 34) กล่าวไว้พอสรุปได้ว่า ขนาดของกลุ่มที่ช่วยให้การทำงานหรือการเรียนการสอนประสบผลดีควรเป็นกลุ่มขนาดเล็ก ซึ่งมีสมาชิกประมาณ 5 – 15 คน ทั้งนี้ครูผู้สอนควรเลือกกำหนดให้เหมาะสมกับลักษณะเนื้อหาและกิจกรรม

จำเนียร โชติช่วง และคณะ (2543 : 5) ได้กล่าวไว้ว่า นักจิตวิทยานิยมศึกษากลุ่มขนาดเล็กที่มีสมาชิกไม่เกิน 15 คน เพราะจะทำให้ดูการเปลี่ยนแปลงและการเคลื่อนไหวในกลุ่มที่เกี่ยวข้องได้ง่าย ถ้ามีสมาชิกจำนวนมากเกินไปสมาชิกไม่มีโอกาสได้แสดงความต้องการ

วัตสัน และแฮร์ (Deighton. 1991 : 225 ; citing Watson and Hare. n.d.) กล่าวว่า กลุ่มควรมีขนาดไม่ใหญ่นัก ควรมีจำนวน 5 คนเป็นอย่างน้อย แต่บางทีก็อาจกำหนดให้มีจำนวน 12 – 15 คน ก็ได้ เพื่อเหตุผลทางเศรษฐกิจ แต่ก็ควรมีการแบ่งออกเป็นกลุ่มย่อย 2 กลุ่มเพื่อให้มีขนาดเหมาะสม

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า กลุ่มควรมีขนาดไม่ใหญ่จนเกินไป สมาชิกของกลุ่มควรมีจำนวนไม่เกิน 15 คน เพื่อให้การทำงานหรือการเรียนการสอนมีประสิทธิภาพมากที่สุด

5.9 ประโยชน์ของกระบวนการกลุ่ม

กระบวนการกลุ่มมีประโยชน์ทั้งในการทำงาน และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงประโยชน์ของกระบวนการกลุ่มไว้ ดังนี้

ทิศนา แขมมณี และคณะ (2545 : 30 – 31) กล่าวว่า เมื่อผู้เรียนได้เข้าร่วมในกระบวนการกลุ่มแล้วจะทำให้เกิดทักษะเพิ่มเติม ดังนี้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

1. ทักษะในการติดต่อสื่อสาร
2. ทักษะในการใช้วิจารณญาณตัดสินและแก้ปัญหาต่าง ๆ
3. ทักษะในการวิจารณ์ วิเคราะห์คุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมต่าง ๆ
4. ทักษะในการช่วยเหลือผู้อื่น
5. ทักษะในการพัฒนาตนเอง ให้รู้จักตนเองมากยิ่งขึ้น

ประสาท อิศรปรีดา (2542 : 16 – 17) ได้กล่าวว่า การให้สมาชิกได้ร่วมกลุ่มนั้นได้ประโยชน์คือ สมาชิกทุกคนมีส่วนร่วมในกิจกรรม สมาชิกพยายามค้นพบในสิ่งที่ตนต้องการเรียนด้วยตนเอง ฝึกทำงานร่วมกันอย่างมีเหตุผล และสมาชิกมีความรับผิดชอบมากขึ้น

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า กระบวนการกลุ่มมีประโยชน์ในการจัดกิจกรรมต่าง ๆ ทำให้สมาชิกของกลุ่มพยายามค้นพบในสิ่งที่ตนต้องการเรียนด้วยตนเอง ฝึกทำงานร่วมกันอย่างมีเหตุผล และสมาชิกมีความรับผิดชอบมากขึ้น และผู้ที่เข้าร่วมกระบวนการกลุ่มจะเกิดทักษะหลายทักษะ อันได้แก่ ทักษะในการติดต่อสื่อสาร ทักษะในการใช้วิจารณญาณตัดสินและแก้ปัญหาต่าง ๆ ทักษะในการวิจารณ์ วิเคราะห์คุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมต่าง ๆ ทักษะในการช่วยเหลือผู้อื่น และทักษะในการพัฒนาตนเอง

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษางานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศ พบว่า มีการศึกษาเกี่ยวกับพีชคณิต โดยเฉพาะในเรื่องสมการเชิงเส้นเป็นจำนวนมาก นอกจากนั้นผู้วิจัยยังได้ศึกษาในเรื่องความวิตกกังวลในการเรียนเพื่อเป็นการยืนยันถึงความสำคัญของกระบวนการกลุ่มในการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเฉพาะพีชคณิต ดังรายละเอียดต่อไปนี้

6.1 งานวิจัยในประเทศ

เย็นตา อมตวณิชกุล. (2540 : 79 - 80) ได้ศึกษาการใช้แผนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีการวิเคราะห์ การเรียนรู้ตามแนวคิดของกานเย เรื่อง สมการและอสมการ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการศึกษาปรากฏว่า แผนการสอนมีการวิเคราะห์เนื้อหา และทักษะย่อยในรูปลำดับขั้นที่ชัดเจนช่วยให้เขียนจุดประสงค์ แบ่งคาบสอน และวางแผนกิจกรรมการเรียนการสอนได้ง่าย เมื่อนำแผนการสอนไปใช้ ครูมีความคิดเห็นว่าแผนการสอนนี้ให้ความสำคัญต่อความรู้พื้นฐานมาก โดยแผนการสอนนี้ได้มีการวิเคราะห์เนื้อหาและทักษะย่อยที่ชัดเจน ช่วยให้สอนได้ครบคลุมเนื้อหา ซึ่งเมื่อนำแผนการสอนไปใช้นักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและต่ำสนใจในการเรียนดีมากและนักเรียนส่วนใหญ่สนใจ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตั้งใจเรียนอย่างต่อเนื่องทุกคาบ และนักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องชัดเจน สามารถเข้าใจบทเรียนได้เร็ว นักเรียนตั้งใจทำแบบฝึกหัดในห้องด้วยตนเอง กระตือรือร้นที่จะแก้ไขข้อบกพร่อง และบรรยากาศชั้นดึกดักน่าเรียนมาก ครูมีความกระตือรือร้นในการสอนและจัดกิจกรรมการสอนได้อย่างต่อเนื่อง เหมาะสมกับเวลา เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนการสอน และนักเรียนร้อยละ 80.64 สอบผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50 ของคะแนนสอบ

สุริยะพงศ์ พงศ์สิทธิศักดิ์ (2540 : 108 – 109) ได้ทำการศึกษาการพัฒนาแบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 3 สังกัดกรมสามัญศึกษา จังหวัดมหาสารคาม พบว่า แบบทดสอบวินิจฉัยทั้งสี่ฉบับมีค่าความยากเป็น 0.32 – 0.90 , 0.10 – 0.83 , 0.48 – 0.84 และ 0.44 – 0.87 ค่าอำนาจจำแนกเป็น 0.31 – 0.75 , 0.42 – 0.75 , 0.03 – 0.73 และ 0.29 – 0.64 ค่าความเชื่อมั่นคำนวณโดยวิธีของโลเวท มีค่าเป็น 0.80 , 0.83 , 0.93 และ 0.82 ตามลำดับ สำหรับความเที่ยงเชิงเนื้อหา พิจารณาโดยผู้เชี่ยวชาญทางด้านเนื้อหาวิชา ผลปรากฏว่า ข้อสอบแต่ละข้อสามารถวัดในเรื่องนั้นได้จริง

ทัศนียา ราสี (2541 : 121) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องระบบสมการ ระหว่าง กลุ่มที่สอนโดยวิธีคัดสรรกลวิธีการสอนกับการสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล โรงเรียนซับบอนวิทยาคม จังหวัดเพชรบูรณ์ ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง ระบบสมการ ของกลุ่มที่สอนโดยการคัดสรรกลวิธีการสอนสูงกว่ากลุ่มที่สอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อุไรวรรณ แรกเจริญ (2542 : 125) ได้ทำการศึกษาการสร้างบทเรียนสำเร็จรูปสอนซ่อมเสริมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อ สมการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการศึกษาพบว่า การสร้างบทเรียนสำเร็จรูปสอนซ่อมเสริมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 บทเรียนสำเร็จรูป มีประสิทธิภาพ 95.60 / 91.77 และมีดัชนีประสิทธิผลเท่ากับ 0.85

ยุพร ริมชลการ (2543 : 88) ได้ทำการวิจัย เรื่อง การพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยปรากฏว่า องค์ประกอบในหลักสูตรมีความเหมาะสมมากกับมากที่สุด โดยมีค่า $\bar{x}$ ระหว่าง 3.67 – 5.00 ค่า S.D. ระหว่าง 0.00 – 0.94 และเมื่อมีการประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตร ปรากฏว่า องค์ประกอบในหลักสูตรมีความสอดคล้องกัน โดยมีค่าดัชนีความสอดคล้อง IOC ระหว่าง 0.66 – 1.00 คะแนนที่ได้จากการทดสอบก่อนเรียนและหลัง

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

เรียนหลักสูตรพีชคณิตมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยคะแนนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีค่าเท่ากับ 59.11 ซึ่งมีค่ามากกว่าคะแนนจุดตัด (52 คะแนน)

สุนิสา พงษ์ประยูร (2543 : 162) ได้ทำการศึกษาข้อบกพร่องการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการ คิดเป็นร้อยละ 55 โดยมีระดับจำนวนนักเรียนที่มีข้อบกพร่องจากมากไปหาน้อย ดังนี้ อันดับที่ 1 มีข้อบกพร่องในการตรวจสอบคำตอบที่ได้กับเงื่อนไขในโจทย์คิดเป็นร้อยละ 80 อันดับที่ 2 มีข้อบกพร่องในการเปลี่ยนประโยคภาษาในโจทย์ปัญหาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ และเขียนสมการ คิดเป็นร้อยละ 72.5 อันดับที่ 3 มีข้อบกพร่องในการกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ให้หา หรือแทนสิ่งที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่โจทย์ให้หา คิดเป็นร้อยละ 47.5 อันดับที่ 4 มีข้อบกพร่องในการวิเคราะห์โจทย์ เพื่อหาว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้และให้หาอะไร คิดเป็นร้อยละ 32.5 อันดับที่ 5 มีข้อพกพร่องในการแก้สมการเพื่อหาคำตอบที่โจทย์ต้องการคิดเป็นร้อยละ 25

สุพัฒน์ กฤชอาคม (2543 : 102) ได้ศึกษาเกี่ยวกับรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การแก้สมการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ร่างกายเป็นสื่อประกอบการเรียนการสอน พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การแก้สมการของนักเรียนก่อนและหลังการสอน การแก้สมการโดยใช้ร่างกายเป็นสื่อประกอบการเรียนการสอนมีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 โดยที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังสอนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนสอน และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังสอนดีกว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนสอน

โสภา สุวรรณแสน (2543 : 125) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 1 ที่เรียนโดยวิธีสอนแบบแบ่งกลุ่มตามสังกัดสัมฤทธิผลทางการเรียน กับที่เรียนโดยวิธีสอนตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยวิธีการสอนแบบแบ่งกลุ่มตามสังกัดสัมฤทธิ์ผลทางการเรียน (STAD) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สูงขึ้น และมีดัชนีประสิทธิผลผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นทั้งแบบ STAD และวิธีสอนแบบปกติ

รติกร สุขมาก (2544 : 31) ได้วิจัยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการและอสมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่าง กลุ่มเรียนแบบแข่งขัน

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

กลุ่มที่เรียนแบบร่วมมือ และกลุ่มที่เรียนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนแบบแข่งขันและนักเรียนที่เรียนแบบร่วมมือ ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนแบบแข่งขันและนักเรียนที่เรียนแบบปกติ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 โดยนักเรียนที่เรียนแบบแข่งขันมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนแบบปกติ และผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนที่เรียนแบบร่วมมือและนักเรียนที่เรียนแบบปกติ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 โดยนักเรียนที่เรียนแบบร่วมมือมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนแบบปกติ

ละออง เลี้ยงจอหอ (2547 : 129 – 130) ได้ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ด้วยแบบฝึกทักษะ เรื่อง สมการและอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนรวมมิตรวิทยา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา พบว่า การศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับการพัฒนาการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ด้วยแบบฝึกทักษะ เรื่อง สมการและอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ประสบผลสำเร็จ นักเรียนมีทักษะที่หลากหลายในการคิดค้นหาคำตอบ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สุภัตรา ผ่านสันเทียะ (2547 : 120 – 123) ได้ศึกษาการพัฒนาการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยกิจกรรมการเรียนแบบร่วมมือ โรงเรียนบ้านหนองตะแบก อำเภอครบุรี จังหวัดนครราชสีมา พบว่า การพัฒนาการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยกิจกรรมการเรียนแบบร่วมมือประสบความสำเร็จตามความมุ่งหมายทุกประการเนื่องจากนักเรียนมีทักษะหลากหลายในการคิดหาคำตอบ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น และมีเจตคติที่ดีต่อกลุ่มสาระคณิตศาสตร์

สมพร สุขอุ้ม (2549 : 181) ได้ศึกษาการพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ด้วยกลุ่มร่วมมือกันเรียนรู้ พบว่า แผนการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ด้วยกลุ่มร่วมมือกันเรียนรู้ที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพ และประสิทธิภาพเพียงพอที่ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อพัฒนาให้ผู้เรียนบรรลุตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

สรุปได้ว่า สมการเชิงเส้นเป็นปัญหาที่ครูได้หาทางแก้ไขมาตลอดด้วยวิธีแตกต่างกันออกไปทั้งนี้ก็เพื่อมุ่งผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนให้สูงขึ้น และเพื่อขจัดปัญหานี้ให้เบาบางหรือหมดไปในที่สุด

6.2 งานวิจัยต่างประเทศ

เฮย์ล็อค (Haylock. 1986 : 205 – 206) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์กับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ อายุ 9 – 11 ปี จำนวน 215 คน (ชาย 126 คน หญิง 89 คน) ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนหญิงที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำมีความวิตกกังวลในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง

พลาสส์ และฮิลล์ (Plass and Hill. 1990 : 31 - 36) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความวิตกกังวลของนักเรียนเกรด 3 และเกรด 4 จำนวน 155 คน โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม คือกลุ่มที่มีความวิตกกังวลต่ำ (LTA) มีความวิตกกังวลปานกลาง (MTA) และกลุ่มที่มีความวิตกกังวลสูง (HTA) การศึกษาครั้งนี้เป็นการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาวิชาคณิตศาสตร์ในช่วงเวลาที่ได้รับความกดดัน และช่วงเวลาที่ไม่ได้รับความกดดันของนักเรียนทั้ง 3 กลุ่ม ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนชายที่มีความวิตกกังวลทางการเรียนสูงมีความสามารถในการแก้ปัญหาต่ำในช่วงเวลาที่ได้รับความกดดัน แต่เมื่อช่วงเวลานั้นผ่านไป นักเรียนชายเหล่านั้นก็สามารถแก้ปัญหาวิชาคริตศาสตร์ได้ดีขึ้น ส่วนนักเรียนชายที่มีความวิตกกังวลต่ำ และนักเรียนหญิงที่มีความวิตกกังวลสูงมีความสามารถในการแก้ปัญหาได้ดีกว่านักเรียนกลุ่มอื่น ๆ เมื่ออยู่ในสถานการณ์ที่ได้รับความกดดัน

วัตสัน (Watson. 1990 : 12 – 14) ได้ทำการวิจัยเรื่อง Research for Teaching. Learning and Teaching Algebra. ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนทำความเข้าใจได้ยากในการเรียนพีชคณิต ดังนั้นการสอนจะต้องมีลักษณะเฉพาะในการสร้างความเข้าใจ นอกจากนั้นการให้กำลังใจถือว่าเป็นสิ่งสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนค้นหาแบบรูป (patterns) และพัฒนาการคิดแก้ปัญหาที่หลากหลายเพื่อหาคำตอบในวิชาพีชคณิต

ฮันเลย์ (Huntley. 2006 : 39) ได้ศึกษายุทธวิธีการให้เหตุผลในการแก้สมการเชิงเส้นของนักเรียนเกรด 12 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงจากหลายมลรัฐ ในประเทศสหรัฐอเมริกา เพื่อจะดูว่านักเรียนสามารถแก้สมการเชิงเส้นตามคำตอบของสมการลักษณะใดได้ถูกต้องที่สุด และดูว่านักเรียนแก้สมการเชิงเส้นโดยใช้วิธีใด ระหว่างสัญลักษณ์ กราฟ และเครื่องคิดเลขกราฟิก ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนสามารถแก้สมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเฉพาะได้ถูกต้องสมบูรณ์มากที่สุด และนักเรียนส่วนใหญ่ใช้สัญลักษณ์ ซึ่งเป็นการใช้ความรู้

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ความเข้าใจในการแก้สมการเชิงเส้นมากกว่าการใช้สื่อ แต่สมการบางสมการก็เหมาะที่จะใช้เครื่องคิดเลขกราฟิกเข้ามาช่วยเพื่อให้เห็นภาพและทราบคำตอบของสมการได้รวดเร็วขึ้น

แซงวิน (Sangwin. 2007 : 987 – 1002) ได้ทำการวิจัยเรื่อง Assessing Elementary Algebra with STACK. การวิจัยครั้งนี้มีความต้องการที่จะศึกษาการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer Algebra System : CAS) เพื่อประเมินว่านักเรียนระดับประถมศึกษามีปฏิกิริยาตอบสนองต่อคำถามเชิงพีชคณิตอย่างไร วิธีดำเนินการวิจัย คือ ผู้วิจัยได้สำรวจว่า นักเรียนระดับประถมศึกษาเรียนรู้พีชคณิตเรื่องใดบ้าง จากนั้นก็ใช้ The STACK CAA system , http//www.stack.bham.ac.uk/ ซึ่ง The STACK CAA ใช้ CAS เพื่อจะนำไปใช้ศึกษากับนักเรียน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความเข้าใจว่า เครื่องหมายของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ (การบวก ลบ คูณ หาร) หมายความว่าอย่างไร และแต่ละตัวมีการกระทำอย่างไร

คาวานอก และคณะ (Cavanaugh and the others. 2008 : 67 – 95) ได้ทำการวิจัยเรื่อง Effectiveness of Interactive Online Algebra Learning Tools. โดยผู้วิจัยได้ศึกษาการแสดงออกของนักเรียนต่อการเรียนพีชคณิตออนไลน์ เรื่อง กราฟของสมการเชิงเส้น การวิจัยครั้งนี้เน้นที่ประสิทธิภาพของสื่อในการเรียนพีชคณิตของนักเรียน กับคอร์สที่ท้าทายครั้งนี้ ผลการวิจัยพบว่า การแสดงออกของนักเรียนในการเรียนออนไลน์กับการเรียนปกติไม่มีความแตกต่างกัน

ฟลูเลน (Fluellen. 2008 : 4) ได้ทำการวิจัยเรื่อง Algebra for Babies. การวิจัยครั้งนี้เป็นการสำรวจความสามารถในการเรียนรู้พีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาประเทศสหรัฐอเมริกา จำนวน 3 คน โดยให้เด็กแต่ละคนได้เรียนรู้ตามลำดับขั้นตอนตามกิจกรรมที่กำหนด ดังนี้คือ ให้ทำความเข้าใจกับจำนวนธรรมชาติ ศึกษาแบบรูป (patterns) ของจำนวนธรรมชาติ และหาความสัมพันธ์ (relationships) ด้วยเกม อุปกรณ์ นิทาน ในขั้นสุดท้ายเด็กแต่ละคนได้ทำการรู้จักกับจำนวนจัตุรัส (square numbers) ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า เด็กทั้ง 3 คน สามารถสรุปความรู้ที่ได้จากกิจกรรมในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และสามารถให้เหตุผลเชิงพีชคณิตได้

ลิมา และคณะ (Lema and the others. 2008 : 3 – 18) ได้ทำการวิจัยเรื่อง Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations. การวิจัยครั้งนี้ต้องการค้นหาว่านักเรียนมีความสามารถในพีชคณิตโดยเฉพาะการแก้สมการเชิงเส้นอย่างไรผู้วิจัยได้ทำการทดลองกับนักเรียนระดับมัธยมต้น (ช่วงชั้นที่ 3) โดยการให้ลองแก้สมการ ผลการวิจัยปรากฏ

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ว่า สมการ $3x + 2 = 8$ นักเรียนไม่สามารถแก้สมการโดยใช้การกำจัดจำนวนที่ไม่ใช่ตัวแปร หรือการทำตามกฎที่เคยเรียนมาได้ และในสมการ $3x - 1 = 3+x$ นั้น นักเรียนไม่แก้สมการตามกฎที่เรียนมา คือ สมบัติการเท่ากัน (บวกเข้า ลบออก) แต่เด็กกลับคิดวิธีใหม่ในการแก้สมการเชิงเส้น ซึ่งก็ได้คำตอบเช่นเดียวกัน กฎดังกล่าว ได้แก่ การเปลี่ยนข้าง เปลี่ยนเครื่องหมาย ปรากฏการนี้เป็นที่น่าสนใจ น่าศึกษาเป็นอย่างยิ่ง

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยดังกล่าว พบว่า ได้มีนักคณิตศาสตร์ศึกษาสนใจที่จะศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้พีชคณิตของนักเรียน เพื่อหาแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้นักเรียนเกิดความรู้ความเข้าใจพีชคณิตและสามารถนำไปปรับใช้ในการศึกษาคณิตศาสตร์ต่อไป และสมการเชิงเส้นก็เป็นอีกเนื้อหาหนึ่งที่นักการศึกษาใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาพัฒนาทางพีชคณิตของนักเรียน แต่สมการเชิงเส้นก็ยังเป็นเนื้อหาที่มีปัญหาในเรื่องผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนอยู่ จึงได้มีผู้พัฒนากิจกรรมต่าง ๆ เพื่อใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้น ตัวอย่างเช่น การพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น การเรียนแบบร่วมมือ การสร้างบทเรียนสำเร็จรูปสอนซ่อมเสริมวิชาคณิตศาสตร์ การใช้แบบฝึกทักษะ เป็นต้น

สรุปได้ว่า สมการเชิงเส้นเป็นเนื้อหาพีชคณิตที่มีความสำคัญและมีผู้สนใจที่จะพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพเพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีคุณภาพ และยังใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาพัฒนาการทางพีชคณิตของนักเรียนได้เป็นอย่างดี ผู้วิจัยจึงได้มีแนวคิดที่จะศึกษาวิธีการแก้สมการเชิงเส้นของนักเรียนช่วงชั้นที่ 4 โดยได้นำกรอบแนวคิดของฮันเลย์มาเป็นแนวในการดำเนินการวิจัยครั้งนี้ เพื่อหาแนวทางในการพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้สมการเชิงเส้นและพีชคณิตเพื่อให้ผู้เรียนมีประสิทธิภาพมากที่สุด

มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY